经济管理应用数学

中

经济管理应用数学（中）

线性代数　概率论与数理统计

Jingji Guanli Yingyong Shuxue

主　编：孙克泰 唐贵才

副主编：王　勤 张连波 赵静济 陈志强

辽宁科学技术出版社出版发行

（沈阳市南京街6段1里2号）

金　城　印　刷　厂　印　刷

开本：787×1092 1/32 印张：12 1/2 数字：300,000

1988年3月第1版　　　1989年6月第2次印刷

责任编辑：路　明　　　封面设计：王氏芳

印数：10,001－15,000

ISBN 7－5381－0275－2/O·27

定价：4.77元

出 版 说 明

本书为《经济管理应用数学》的中册，内容为线性代数、概率论与数理统计，教学时数为80学时。参加本书线性代数部分编写的有：陈志强（第一章）、李景昌（第二章）、陈宝民（第三章）、王玉勤、张宝良（第四章）；参加概率论与数理统计部分编写的有：孙克忠（第一、二、三、四章）、唐贵才（第五章）、张连诚（第六章）、赵建中（第七章）。

全书由孙克忠统稿，潘德惠教授审阅。

编 者

1987年11月

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　概率论与数理统计

第一篇　线性代数

线性代数是中学代数的继续和提高。线性关系是比较普遍的一种量变关系，就是本来不存在线性关系的量，在一定条件下也可以用线性关系来代替。例如我们在学习本教材上册“微积分”部分时，就曾经在小区间内以微分代替改变量，微分实质就是改变量的线性部分。这种思想渗透到经济管理中很多领域，如线性规划、投入产出分析等。更重要的是通过线性代数的学习使读者掌握后续课所必备的基础知识。

本篇共分四章，第一章行列式，第二章矩阵，第三章线性方程组，第四章投入产出分析。

第一章　行列式

本章是以二元一次联立方程组问题为背景，引进和讨论数学上一种重要工具——行列式。最后把所得到的理论又应用到原问题，从而圆满解决了线性方程组公式解法问题。

§1·1　行列式的定义

本节从二元一次方程组出发，逐步导出一般行列式的概念。

1. 二阶行列式

在中学里已经学过用加减消元法解二元一次方程组. 对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

为消去 x_2，必须使 x_2 系数相同. 为此用 a_{22} 遍乘方程（1）各项得方程（3），用 a_{12} 遍乘方程（2）各项得方程（4），以上运算以后用“$\rightarrow$”表示，即

$$\begin{matrix} a_{22} \longrightarrow \\ a_{12} \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1 & (3) \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2 & (4) \end{cases}$$

（3）减（4），得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \qquad (5)$$

在（5）中，如 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为了便于记忆，令

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

形如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

的式子叫**二阶行列式**. 它表示一个数，其值等于**主对角线**上元素 a、d 之积 ad 减去**副对角线**上元素 b、c 之积 bc 的差. 即

副对角线

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - \mathrm{dc}$$

主对角线

有了二阶行列式，x_1 就可以表示成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{6}$$

同理有

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{7}$$

当然公式（6）和（7）只有在分母上的二阶行列式不等于零时才适用。

例 1　用二阶行列式解下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$$

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1-6 = -7 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1+4 = 3$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2-3=-5$$

所以 $x_1=-\frac{3}{7}$，$x_2=\frac{-5}{-7}=\frac{5}{7}$是所给方程组的解。

2．三元一次方程组和三阶行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad (8)$$

我们的想法是选择适当的三个数 k_1、k_2、k_3 分别乘到（8）的三个方程上，然后把得到的三个新方程相加，使之能一次消去二个未知数，从而解出此方程组。这三个数 k_1、k_2、k_3 应如何选取呢？

先用 k_1 乘（8）中的第一个方程，再用 k_2 乘（8）中第二个方程，最后用 k_3 乘（8）中第三个方程。即

$$\begin{array}{l} k_1 \longrightarrow \\ k_2 \longrightarrow \\ k_3 \longrightarrow \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

然后把得到的三个新方程相加，得

$$(a_{11}k_1+a_{21}k_2+a_{31}k_3)x_1+(a_{12}k_1+a_{22}k_2+a_{32}k_3)x_2+$$
$$+(a_{13}k_1+a_{23}k_2+a_{33}k_3)x_3=b_1k_1+b_2k_2+b_3k_3 \qquad (9)$$

为解方程（9），首先解下面方程组

$$\begin{cases} a_{12}k_1+a_{22}k_2+a_{32}k_3=0 \\ a_{13}k_1+a_{23}k_2+a_{33}k_3=0 \end{cases}$$

此方程组又可以改写为下面形式

$$
\begin{cases}
a_{12}\dfrac{k_1}{k_3}+a_{22}\dfrac{k_2}{k_3}=-a_{32}\\[2mm]
a_{13}\dfrac{k_1}{k_3}+a_{23}\dfrac{k_2}{k_3}=-a_{33}
\end{cases}
$$

把$\dfrac{k_1}{k_3}$和$\dfrac{k_2}{k_3}$看成二个未知数，用二阶行列式解此方程组，只要

$$
\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0
$$

就可以用二阶行列式解出

$$
\frac{k_1}{k_3}=\frac{\begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}},\quad
\frac{k_2}{k_3}=\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}.
$$

于是只要取

$$
k_1=\begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix},\quad k_2=\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix},
$$

$$
k_3=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}
$$

就可以使 x_2、x_3 的系数为 0，为便于与（8）中式子对照，把 k_1、k_2、k_3 改写为

$$
k_1=\begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}=-a_{32}a_{23}+a_{22}a_{33}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
k_2=\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix}=-a_{12}a_{33}+a_{32}a_{13}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
k_3=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}
$$

把它们代入（9）式得

$$\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right)x_1 =$$

$$= b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad (10)$$

由此解出 x_1，为使公式解整齐一些，且便于记忆和使用，所以规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad (11)$$

我们称（11）式等号左边的式子叫**三阶行列式**，从而（10）可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

只要

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

可解出 x_1 为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{12}$$

用类似方法，可以把（9）中 x_1 和 x_3 的系数化为0，解出 x_2；以及把 x_1 和 x_2 的系数化为0，解出 x_3。以下公式读者可自行推导：

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{13}$$

把（12）、（13）式与（8）对照，把（6）、（7）与（1）（2）式对照，很容易记住这些公式，它们的求解规律是一致的。可能得到如下结论：

（1）都要求由未知数系数构成的行列式且不等于0；

（2）未知数解的分母都是由其系数构成的行列式；

（3）未知数解的分子是用常数项列替换系数行列式中相应列而成。如 x_1 的分子是用常数项列替换系数行列式中第一列而成；

（4）三个未知数方程求解问题可以化成二个未知数方程求解问题，从而用二阶行列式表示了三阶行列式。两个未知数方程求解化成了一个未知数方程求解问题。

我们自然会想到能否用类似方法把含有四个未知数的方

程求解问题化成三个未知数的方程来求解，从而用三阶行列式来表示四阶行列式．这个想法是成立的，将在 §1·3 中讨论．

三阶行列式的计算．

在实际计算三阶行列式时，并不用通过二阶行列式来计算．只要细心观察三阶行列式的展开式，就会发现三阶行列式中的数是按照一定的加、减、乘运算规则而组成的，展开式的规则只要按下面图示就很容易掌握，实线表示应加正号的乘积，虚线表示应加负号的乘积．有的线只有两个数要添对面角上的那个数．这种计算方法称为**对角线法则**．但四阶以上行列式情况就复杂得多，对角线法则不再成立．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

例 2　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 10 - 12 + 7 + 56 + 5 + 3 = 69 \neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 5 \end{vmatrix}=69$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=23$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}=-23$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{69}{69}=1 \qquad x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{23}{69}=\dfrac{1}{3}$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-23}{69}=-\frac{1}{3}$$

是所给方程组的解。

§1·2 行列式的性质

本节主要讨论二、三阶行列式的性质。讨论性质之前先介绍一些与行列式有关的概念。

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

未知数 x_1，x_2，x_3 的系数 a_{ij} $(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ 构成的行列式叫系数行列式。横排叫行，纵排叫列。行列式的行数和列数相等。a_{ij} 中角码 i 表示 a_{ij} 所在行数，叫行指

标；角码j表示a_{ij}所在列数，叫列指标。例如a_{32}表示第三行第二列上的元素。系数行列式是把方程组系数a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{31}，a_{32}，a_{33}按顺序分成三行三列写出来的。

由行列式的行与列互换形成的新行列式叫原行列式的**转置行列式**。

如果把一个行列式简写为D，则其转置行列式可用D'表示。

例，记

$$D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} \text{ 则 } D'=\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{vmatrix}$$

显然有$(D')'=D$，即$D''=D$。

例1 求

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \tag{14}$$

的转置行列式。

解 只要把D的行列互换即可。把第一行，第二行，第三行分别写成第一列，第二列，第三列，即

$$D'=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix} \tag{15}$$

下面讨论三阶行列式性质：

性质1 行列转置后其值不变。

这一性质表明了行列式行与列的对称性，即行列式对“行”所具有的性质，对“列”也成立。这样一来在以下讨论中工作量减少了一半，对每个性质只要说明或证明对行

（或列）成立就够了。所以，在以下讨论中采取了行列并提形式。

性质 2 交换行列式的两行（列），行列式的值改变符号。

证 不妨设将行列式的第一行和第二行互换。

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12}a_{33} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{23}a_{11}a_{32} -$$

$$- a_{23}a_{12}a_{31} - a_{21}a_{13}a_{32} - a_{22}a_{11}a_{33}$$

$$= -(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 3 行列式两行（列）相同时，其值为 0 。

证 设一个行列式D的第 i 行和第 j 行相同，互换这两行得到行列式 D_1，根据性质 2 应有 $D = -D_1$。但这时的 D_1 与D毫无区别，故有 $D = -D$，所以D必为 0 。

性质 4 如果行列式一行（列）的元素有公因子 k，则公因子 k 可以移到行列式外相乘。即

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (16)$$

只要把（16）式两边展开，即可证出。

性质 5 如果行列式两行（列）对应元素成比例（即一行元素为另一行元素的若干倍），则行列式的值为零。

此性质的证明留给读者练习，