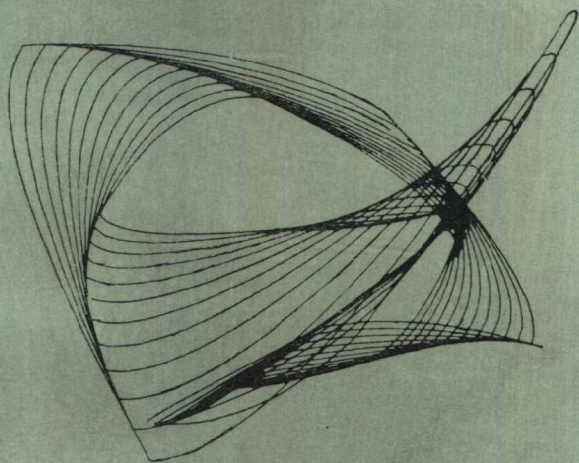


数学

III

[日] 小平邦彦 编



吉林人民出版社

数 学

Ⅲ

(日本高中数学)

〔日〕 小 平 邦 彦 编
孙福元 李素苹 王铭文 译

吉 林 人 民 出 版 社

数 学 Ⅲ

日本东京书籍株式会社
1977

数 学

Ⅲ

(日本高中数学)

〔日〕小平邦彦 编
孙福元 李素苹 王铭文

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行
长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 7 $\frac{1}{2}$ 印张 148,000字

1979年5月第1版 1979年5月第1次印刷

印数：1—60,000册

书号：7091·1059 定价：0.69元

内 部 发 行

前 言

这本书是为学完高中《数学ⅡB》的学生继续学习而编写的数学教科书。

如在《数学Ⅰ》的前言中所述，数学在本质上是自由的，数学家对于凡是可能思考的事物都可自由地思考。在这种意义下，可以说数学是人类精神的自由创造物。另一方面，数学又广泛地应用在各个领域里，其用途之大实在是达到了难以想象的程度。

本书共分四章。在第Ⅰ章，首先学习关于无穷数列的收敛、发散的意义，关于极限的法则，其次，学习无穷级数及其求和方法。

在第Ⅱ章研究微分法及其应用。关于微分法，在《数学ⅡB》中已经学过，但在那里研究的只不过是可以用简单的多项式表示的函数。关于三角函数、对数函数、指数函数等的微分法，在这一章才开始学习。此外，关于函数的商、复合函数、反函数等的微分法，也在这里学习。作为微分法的应用，还研究中值定理、函数的递增和递减、极大和极小、曲线的凹凸等等。

第Ⅲ章研究的是积分法及其应用。积分法初步已在《数学ⅡB》中学过，在本章继续学习各类函数的积分。此外，

作为积分的一般方法，学习替换积分法和分部积分法。作为积分法的应用，讲述面积、体积、曲线的弧长等的计算，并进一步阐述关于微分方程的解法。微分方程从物理学开始就广泛地应用于自然科学。

在最后的第IV章，学习概率和统计。关于概率初步，在《数学I》中已学过。在这一章，进一步学习二项分布、正态分布、方差和标准差。标准差的概念在理论上和应用上都是很重要的。在这一章的第2节，阐述关于统计推断问题。

如在《数学II B》的前言中叙述的那样，学习数学只靠读书、记忆还是不够的，充分独立思考、细心作计算、试解问题，这些都是很重要的。

凡

例

- 例** 为帮助理解课文而举出的具体例子。
- 例题** 例题是为帮助理解有关内容而提出的有代表性的题目；以框线围起来的〔解〕或〔证明〕是示范性的。
- 注意** *)是有助于理解的补充说明。
- 问** 为立刻掌握刚学过的内容以及为导入新内容而设的问题。
- 问题** 在各节末尾，为练习该节所学内容而设的问题。
- 习题** 在各章末尾列举了全章的复习题和应用题。A 是以基本问题为主，而 B 是程度稍高一些的题目。
- 附录** 卷末的补充问题，是更进一步的学习内容。

目 录

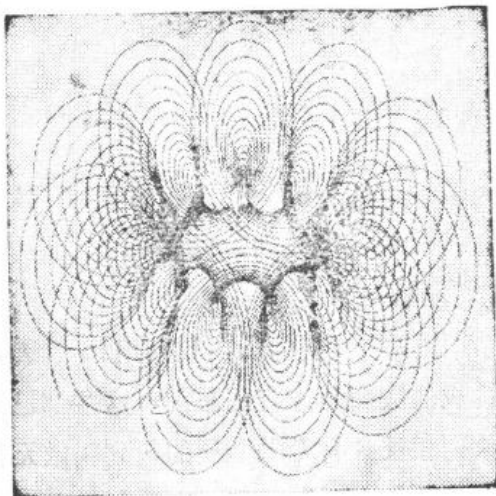
前言	(1)
凡例	(2)
I 数列的极限	(1)
第 1 节 数列的收敛及发散	(2)
1 收敛、发散的意義	(2)
2 求极限的方法	(6)
3 数列 $\{r^n\}$ 的极限	(12)
问 题	(15)
第 2 节 无穷级数	(16)
1 无穷级数	(16)
2 无穷等比级数	(19)
3 无穷级数的求和方法	(23)
问 题	(26)
习 题 A, B	(27)
II 微分法及其应用	(30)
第 1 节 函数的极限	(31)
1 函数的极限	(31)

2 函数的连续性	(38)
问 题	(44)
第 2 节 微分法	(45)
1 导函数	(45)
2 商的微分法	(48)
3 反函数的微分法	(51)
4 复合函数的微分法	(53)
问 题	(55)
第 3 节 各类函数的导函数	(56)
1 三角函数的导函数	(56)
2 对数函数、指数函数的导函数	(59)
3 高阶导函数	(65)
问 题	(67)
第 4 节 微分法的应用	(68)
1 切线	(68)
2 中值定理	(72)
3 函数的递增、递减	(76)
4 函数的最大、最小及极大、极小	(80)
5 曲线的凹凸	(87)
6 速度、加速度 曲线的参数表示	(91)
7 近似式	(98)
问 题	(103)

习题 A, B	(104)
III 积分法及其应用	(107)
第1节 不定积分	(108)
1 基本公式	(108)
2 替换积分法	(111)
3 分部积分法	(116)
4 各类函数的不定积分	(118)
问题	(122)
第2节 定积分	(123)
1 定积分	(123)
2 定积分的替换积分法	(125)
3 定积分的分部积分法	(130)
问题	(131)
第3节 积分法的应用	(133)
1 面积	(133)
2 体积	(139)
3 曲线的弧长	(142)
4 定积分的近似值	(146)
5 微分方程	(151)
问题	(159)
习题 A, B	(160)

IV 概率、统计	(162)
第1节 概率	(163)
1 随机变量与概率分布	(163)
2 二项分布	(169)
3 均值	(173)
4 方差、标准差	(177)
5 连续分布	(185)
6 正态分布	(187)
7 二项分布与正态分布	(193)
问题	(195)
第2节 统计推断	(196)
1 总体与样本	(196)
2 样本均值的分布	(201)
3 估计	(206)
4 假设检验	(210)
问题	(215)
习题 A, B	(216)
附录	(218)
补充问题	(219)
解答	(223)

I 数列的极限



第 1 节 数列的收敛及发散

第 2 节 无穷级数

第 1 节 数列的收敛及发散

1 收敛、发散的意義

例如

$$1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \dots, 1+\frac{1}{n}, \dots$$

按一定规律排成的有顺序的一列数叫做数列，这在数学 II B 中已经学过。一般地，把数列写成

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

各个数 a_n 都叫做这个数列的项，数列用 $\{a_n\}$ 表示。还有，由有限个项构成的数列叫作有限数列，这些都已经学过。

与有限数列相反，有无限个项的数列叫做无穷数列。

这一章，主要研究无穷数列。以后如果只说数列时，指的就是无穷数列。

例 1 试将下列数列的一般项随 n 增大而变化的趋势，用图表示出来。

$$(1) \quad 1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \dots, 1+\frac{1}{n}, \dots$$

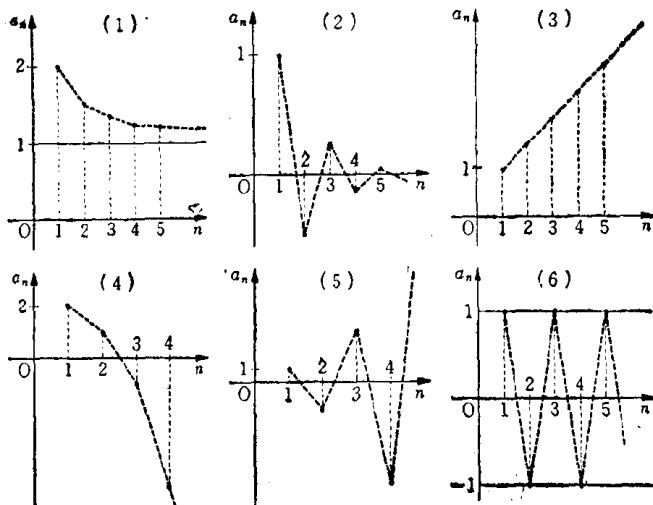
$$(2) \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$$

$$(3) \quad 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \dots, \frac{n+1}{2}, \dots$$

$$(4) \quad 3 - 1, 3 - 2, 3 - 2^2, \dots, 3 - 2^{n-1}, \dots$$

$$(5) \quad 1, -2, 4, -8, \dots, (-2)^{n-1}, \dots$$

$$(6) \quad 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$$



由上图可以看出一般项的值随 n 增大的变化趋势，这种变化趋势是随数列的不同而不同。例如，当 n 无限增大时，数列(1)的项 $1 + \frac{1}{n}$ 趋近于 1，数列(2)的项 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 趋近于 0。

一般地，当无穷数列

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

的项，随 n 无限增大而无限趋近于一定值 α 时，叫做数列 $\{a_n\}$ 收敛于 α 。 α 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限值。

数列 $\{a_n\}$ 的极限值是 α ，用

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

或用

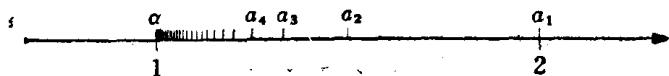
当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \rightarrow \alpha$

表示*)。(有时略去“当 $n \rightarrow \infty$ 时”,而只写“ $a_n \rightarrow \alpha$ ”。)

例2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

所谓数列 $\{a_n\}$ 收敛于 α , 就是如果在数直线上取点 a_n , 则当 n 无限增大时, 点 a_n 与点 α 的距离 $|a_n - \alpha|$ 可以任意小。

对于上面例2的数列 $(a_n = 1 + \frac{1}{n})$, 有如下图的趋势。



问1 试将数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ 从首项到第五项表示为数直线上的点。

如上所述, $a_n \rightarrow \alpha$ 与 $|a_n - \alpha| \rightarrow 0$ 相同。特别是, $a_n \rightarrow 0$ 与 $|a_n| \rightarrow 0$ 相同。

当数列 $\{a_n\}$ 收敛于 α 时, 在项 a_n 中, 即使有等于 α 的数也无妨。

特别是, 所有 a_n 都等于 α 的数列, 也就是

$$\alpha, \alpha, \alpha, \dots, \alpha, \dots$$

也可以看作它收敛于 α , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

*) ∞ 读作“无穷大”。

这样的数列叫做常数列。

在p.2的例1中，数列(3)，(4)，(5)，(6)都不收敛。不收敛的无穷数列叫做发散的。

在这几个数列中，(3)的项 $\frac{n+1}{2}$ 随 n 无限增大而无限增大。

一般地，对于数列 $\{a_n\}$ ，随 n 无限增大， a_n 也无限增大时，叫做数列 $\{a_n\}$ 发散于正无穷大。记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

或

$$\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } a_n \rightarrow \infty$$

与此相反，数列(4)的项 $3 - 2^{n-1}$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时，是负数而绝对值 $|3 - 2^{n-1}|$ 无限增大，也就是， $3 - 2^{n-1}$ 无限减小。

一般地，对于数列 $\{a_n\}$ ，随 n 无限增大， a_n 是负数而绝对值无限增大时，叫做数列 $\{a_n\}$ 发散于负无穷大，记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

或

$$\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } a_n \rightarrow -\infty$$

例3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} (3 - 2^{n-1}) = -\infty$

为了明显地区分负无穷大，也有时将正无穷大写为 $+\infty$ 。

例如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$

还有，p.3的数列(5)，(6)不收敛，既不发散于正无穷大，又不发散于负无穷大。这样的无穷数列叫做是振动的。

收敛..... $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

 { 发散于正无穷大... $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

 { 发散于负无穷大... $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

发散 { 振动.....其它情形

数列的收敛、发散

注意 当无穷数列发散于 ∞ 时,也说 $\{a_n\}$ 的极限是 ∞ 。对于发散于 $-\infty$ 的情形也一样。

问2 试指出下列数列是收敛还是发散。

(1) $-5, -2, 1, 4, \dots, 3n-8, \dots$

(2) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$

(3) $6, 4, 6, 4, \dots, 5 + (-1)^{n-1}, \dots$

(4) $2, \frac{2}{3}, \frac{10}{9}, \frac{26}{27}, \dots, 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \dots$

2 求极限的方法

数列

$1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, \dots$ (1)

收敛于1。数列

$4.2, 4.02, 4.002, 4.0002, \dots$ (2)

收敛于4。

如果将(1)的各项都乘以3, 作成数列

$3.3, 3.03, 3.003, 3.0003, \dots$

则它收敛于 $3 \times 1 = 3$

又如果以(1), (2)各对应项的和为项作数列, 则得

$$5.3, 5.03, 5.003, 5.0003, \dots$$

则它收敛于 $1 + 4 = 5$

同样, 对于差、积、商也成立。

[I] 如果数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 收敛:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

则

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k a \quad (k \text{ 是常数})$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + \beta$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - \beta$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = a \beta$$

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{\beta} \quad (\text{但 } \beta \neq 0)$$

极限的四则运算

应用上面的法则与

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

可以解下列问题。

例题 1 试求下列极限值。

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n-1}$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n^2-n+1}$$