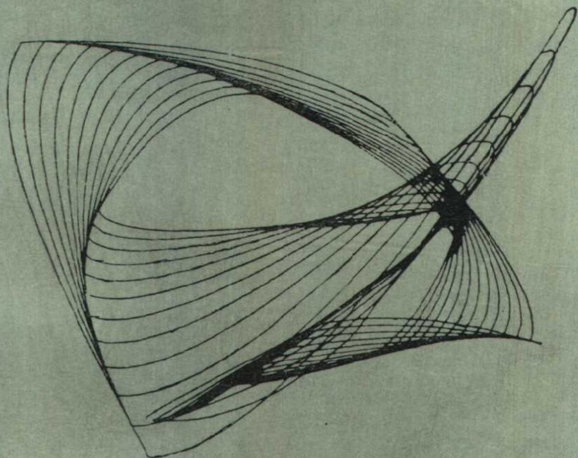
数学 Ⅲ

〔日〕小平邦彦 编



吉林人民出版社

数　学

Ⅲ

（日本高中数学）

〔日〕小平邦彦 编
孙福元　李素苹　王铭文 译

吉林人民出版社

数　学 III

日本东京书籍株式会社
1977

数　学
III
（日本高中数学）

〔日〕小平邦彦　编
孙福元　李素苹　王铭文

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行
长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　7½印张　148,000字
1979年5月第1版　1979年5月第1次印刷
印数：1—60,000册
书号：7091·1059　定价：0.69元

内 部 发 行

前　　言

这本书是为学完高中《数学ⅡB》的学生继续学习而编写的数学教科书。

如在《数学Ⅰ》的前言中所述，数学在本质上是自由的，数学家对于凡是可能思考的事物都可自由地思考。在这种意义下，可以说数学是人类精神的自由创造物。另一方面，数学又广泛地应用在各个领域里，其用途之大实在是达到了难以想象的程度。

本书共分四章。在第Ⅰ章，首先学习关于无穷数列的收敛、发散的意义，关于极限的法则，其次，学习无穷级数及其求和方法。

在第Ⅱ章研究微分法及其应用。关于微分法，在《数学ⅡB》中已经学过，但在那里研究的只不过是可以用简单的多项式表示的函数。关于三角函数、对数函数、指数函数等的微分法，在这一章才开始学习。此外，关于函数的商、复合函数、反函数等的微分法，也在这里学习。作为微分法的应用，还研究中值定理、函数的递增和递减、极大和极小、曲线的凹凸等等。

第Ⅲ章研究的是积分法及其应用。积分法初步已在《数学ⅡB》中学过，在本章继续学习各类函数的积分。此外，

作为积分的一般方法，学习替换积分法和分部积分法。作为积分法的应用，讲述面积、体积、曲线的弧长等的计算，并进一步阐述关于微分方程的解法。微分方程从物理学开始就广泛地应用于自然科学。

在最后的第Ⅳ章，学习概率和统计。关于概率初步，在《数学Ⅰ》中已学过。在这一章，进一步学习二项分布、正态分布、方差和标准差。标准差的概念在理论上和应用上都是很重要的。在这一章的第2节，阐述关于统计推断问题。

如在《数学ⅡB》的前言中叙述的那样，学习数学只靠读书、记忆还是不够的，充分独立思考、细心作计算、试解问题，这些都是很重要的。

凡　　例

例　为帮助理解课文而举出的具体例子。

例题　例题是为帮助理解有关内容而提出的有代表性的题目；以框线围起来的〔解〕或〔证明〕是示范性的。

注意　*)是有助于理解的补充说明。

问　为立刻掌握刚学过的内容以及为导入新内容而设的问题。

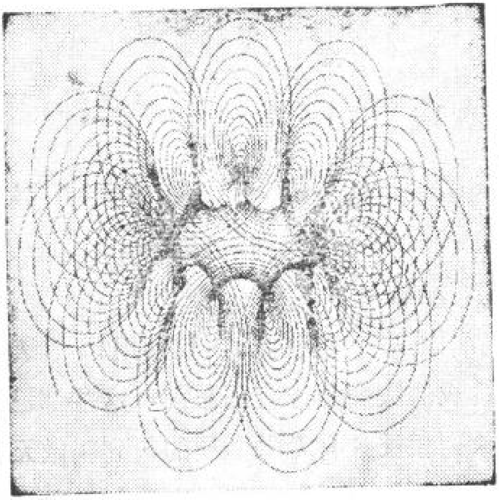
问题　在各节末尾，为练习该节所学内容而设的问题。

习题　在各章末尾列举了全章的复习题和应用题。A 是以基本问题为主，而 B是程度稍高一些的题目。

附录　卷末的补充问题，是更进一步的学习内容。

目　　录

I　数列的极限



第 1 节　数列的收敛及发散

第 2 节　无穷级数

第1节　数列的收敛及发散

1　收敛、发散的意义

例如

$$1+1, 1+\frac{1}{2}, \ 1+\frac{1}{3}, \cdots, 1+\frac{1}{n}, \cdots$$

按一定规律排成的有顺序的一列数叫做数列，这在数学ⅡB中已经学过。一般地，把数列写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

各个数 a_n 都叫做这个数列的项，数列用 $\{a_n\}$ 表示。还有，由有限个项构成的数列叫作**有限数列**，这些都已经学过。

与有限数列相反，有无限个项的数列叫做**无穷数列**。

这一章，主要研究无穷数列。以后如果只说数列时，指的就是无穷数列。

例1　试将下列数列的一般项随 n 增大而变化的趋势，用图表示出来。

(1)　$1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \cdots, 1+\frac{1}{n}, \cdots$

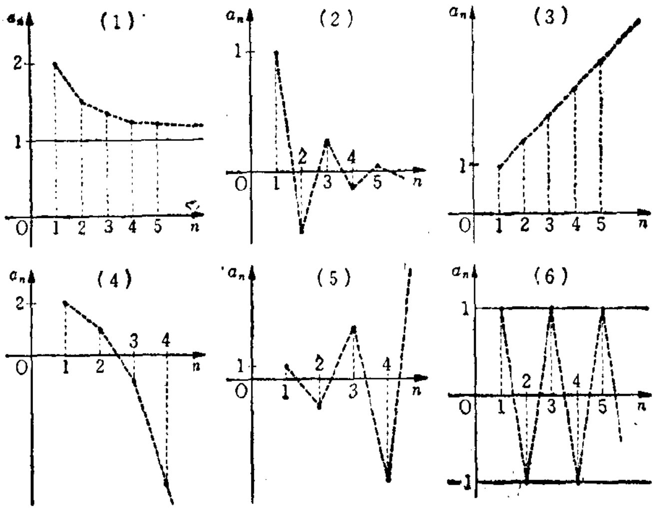
(2)　$1, -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ -\frac{1}{8}, \cdots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \cdots$

(3)　$1, \ 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \cdots, \frac{n+1}{2}, \cdots$

（4） $3-1$，$3-2$，$3-2^2, \cdots, 3-2^{n-1}, \cdots$

（5） 1，-2，4，$-8, \cdots, (-2)^{n-1}, \cdots$

（6） 1，-1，1，$-1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$



由上图可以看出一般项的值随 n 增大的变化趋势，这种变化趋势是随数列的不同而不同。例如，当 n 无限增大时，数列（1）的项$1+\frac{1}{n}$趋近于1，数列（2）的项$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$趋近于0。

一般地，当无穷数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

的项，随 n 无限增大而无限趋近于一定值 α 时，叫做数列 $\{a_n\}$ 收敛于 α。α 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限值。

数列 $\{a_n\}$ 的极限值是 α，用

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

或用

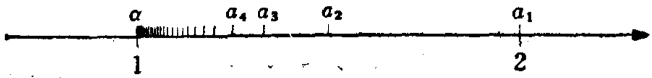
$$当\ n\to\infty时，a_n\to\alpha$$

表示[*]。(有时略去"当 $n\to\infty$时"，而只写"$a_n\to\alpha$"。)

例 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

所谓数列$\{a_n\}$收敛于α，就是如果在数直线上取点a_n，则当n无限增大时，点a_n与点α的距离$|a_n-\alpha|$可以任意小。

对于上面例 2 的数列$\left(a_n=1+\dfrac{1}{n}\right)$，有如下图的趋势。



问 1 试将数列$\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$从首项到第五项表示为数直线上的点。

如上所述，$a_n\to\alpha$与$|a_n-\alpha|\to0$相同。特别是，$a_n\to0$与$|a_n|\to0$相同。

当数列$\{a_n\}$收敛于α时，在项a_n中，即使有等于α的数也无妨。

特别是，所有a_n都等于α的数列，也就是

$$\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\cdots,\ \alpha,\cdots$$

也可以看作它收敛于α，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

---

[*]) ∞读作"无穷大"。

这样的数列叫做常数列。

在p.2的例1中，数列(3)，(4)，(5)，(6)都不收敛。不收敛的无穷数列叫做发散的。

在这几个数列中，(3)的项$\frac{n+1}{2}$随n无限增大而无限增大。

一般地，对于数列$\{a_n\}$，随n无限增大，a_n也无限增大时，叫做**数列$\{a_n\}$发散于正无穷大。记为**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

或

$$\text{当 } n\to\infty \text{ 时}, a_n\to\infty$$

与此相反，数列(4)的项$3-2^{n-1}$，当$n\to\infty$时，是负数而绝对值$|3-2^{n-1}|$无限增大，也就是，$3-2^{n-1}$无限减小。

一般地，对于数列$\{a_n\}$，随n无限增大，a_n是负数而绝对值无限增大时，叫做数列$\{a_n\}$**发散于负无穷大**，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

或

$$\text{当 } n\to\infty \text{ 时}, a_n\to-\infty$$

例 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=\infty, \lim\limits_{n\to\infty}(3-2^{n-1})=-\infty$

为了明显地区分负无穷大，也有时将正无穷大写为$+\infty$。例如$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=+\infty$

还有，p.3的数列(5)，(6)不收敛，既不发散于正无穷大，又不发散于负无穷大。这样的无穷数列叫做是振动的。

$$
\begin{cases}
\text{收敛}\cdots\cdots\cdots\cdots & \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\
\text{发散} \begin{cases} \text{发散于正无穷大}\cdots & \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ \text{发散于负无穷大}\cdots & \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \\ \text{振动}\cdots\cdots\cdots\cdots & \text{其它情形} \end{cases}
\end{cases}
$$

——**数列的收敛、发散**——

注意 当无穷数列发散于∞时，也说$\{a_n\}$的极限是∞。对于发散于$-\infty$的情形也一样。

问 2 试指出下列数列是收敛还是发散。

（1） $-5,\ -2,\ 1, 4, \cdots, 3n-8, \cdots$

（2） $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \cdots, \dfrac{1}{n^2}, \cdots$

（3） $6,\ 4,\ 6,\ 4, \cdots, 5+(-1)^{n-1}, \cdots$

（4） $2, \dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{9}, \dfrac{26}{27}, \cdots, 1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}, \cdots$

2 求极限的方法

数列

$$1.1,\ 1.01,\ 1.001,\ 1.0001, \cdots \qquad (1)$$

收敛于1。数列

$$4.2,\ 4.02,\ 4.002,\ 4.0002, \cdots \qquad (2)$$

收敛于4。

如果将(1)的各项都乘以3，作成数列

$$3.3,\ 3.03,\ 3.003,\ 3.0003, \cdots$$

则它收敛于$3\times1=3$

又如果以（1），（2）各对应项的和为项作数列，则得

5.3，5.03，5.003，5.0003，…

则它收敛于$1+4=5$

同样，对于差、积、商也成立。

〔I〕 如果数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$收敛：

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\quad \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$$

则

（1） $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$（$k$是常数）

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

（4） $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$

（5） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$（但$\beta\neq0$）

——极限的四则运算

应用上面的法则与

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

可以解下列问题。

例题1 试求下列极限值。

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)$ （2） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{n-1}$

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n^2-n+1}$