高等财经专科学校教材

经济应用数学

(修订版)

下册

刘应辉 主编

中国财政经济出版社

高等财经专科学校教材

经 济 应 用 数 学

（修 订 版）

下 册

刘应辉 主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学（下）/刘应辉主编．—修订版．—北京：中国财政经济出版社，1996

高等财经专科学校教材

ISBN 7-5005-3010-2

Ⅰ．经…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．经济数学-高等学校-教材

Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第21775号

出版

社址：[redacted]寺东街8[redacted]　　邮政编码：100010

北京印刷三厂印刷　　各地[redacted]华书店经销

8[redacted]×1168[redacted]　　32开　9.8[redacted]印张　233 000字

19[redacted]年1月[redacted]2版　　19[redacted]7月北京第2次印刷

印[redacted]10 031—34 040　定价：10.60元

ISBN 7-5005-3010-2/F·2839

（图书出现印装问题，本社负责调换）

编审说明

本书是全国财经类通用教材。经审阅，我们同意作为高等财经专科学校教材出版。书中不足之处，请读者批评指正。

财政部教材编审委员会

1995年11月2日

目　　录

第二编　矩阵代数

第三编　概　率　初　步

第四编　线性规划方法

第二编 矩阵代数

第八章 矩 阵

矩阵在经济领域有着广泛的应用，是处理许多实际问题有力的数学工具。本章将介绍有关矩阵的基础知识，即矩阵的概念与运算、矩阵的初等变换、n阶矩阵行列式以及逆矩阵等。

§8.1 矩阵的概念

先看一个例子：某种货物从甲、乙、丙三个产地运往四个销地，其调运计划见表8-1。

表8-1 单位：吨

产地 \ 产量 \ 销地	A	B	C	D
甲	48	34	18	65
乙	23	52	9	7
丙	14	4	0	34

这个货物调运计划表可以简单地表示为：

$$\begin{pmatrix} 48 & 34 & 18 & 65 \\ 23 & 52 & 9 & 7 \\ 14 & 4 & 0 & 34 \end{pmatrix}$$

数学上把这样的矩形数表叫做矩阵。

定义 8.1 由 $m\times n$ 个数 Q_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$）排成的 m 行 n 列的矩形数表，称为一个 $m\times n$ 矩阵，通常用大写字母 A、B、C、…等表示，记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

也可以简记为 $A_{m\times n}$或 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，矩阵 A 中的横排为行，纵排为列，数 a_{ij}称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素，即前一个足标为行标，后一个足标为列标。

当 $m=1$ 时，为只有一行的矩阵

$$A=(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

叫做行矩阵；当 $n=1$ 时，为只有一列的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

叫做列矩阵。

所有元素都是 0 的矩阵叫做零矩阵，记为 O。

定义 8.2 如果矩阵 A 的行数与列数都等于 n，则称此矩阵为 n 阶矩阵，也叫 n 阶方阵，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

n 阶矩阵 A 中从左上角到右下角的对角线称为 A 的主对角线。

特别地，规定一阶矩阵 $A=(a)=a$ (8.3)

下面介绍几种常用的特殊 n 阶矩阵

（一）对角矩阵

如果 n 阶矩阵 A 中除主对角线上的元素外，其它的元素均为 0，则称 A 为 n 阶对角矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

注：矩阵中有大块元素为 0 时，可略去不写。

（二）数量矩阵

如果 n 阶对角矩阵 A 中主对角线上的元素均为 a，则称 A 为 n 阶数量矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

（三）单位矩阵

如果 n 阶数量矩阵 A 中的元素均为 1，则称 A 为 n 阶单位矩

阵，记作 I_n，或简记为 I，即

$$I=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

（四）三角形矩阵

如果 n 阶矩阵 A 中主对角线左下方的元素均为 0，则称 A 为 n 阶上三角形矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

如果 n 阶矩阵 A 中主对角线右上方的元素均为 0，则称 A 为 n 阶下三角形矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

注：为方便起见，矩阵中的零元素可以省略不写。

定义 8.3 如果两个矩阵 A，B 有相同的行数与相同的列数，并且对应位置上的元素均相等，则称矩阵 A 与矩阵 B 相等，记为 $A=B$，即设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，若 $a_{ij}=b_{ij}$（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$），则 $A=B$。

显然，两个矩阵相等，则它们的行列数必然分别相等，也只有行列数分别相等的矩阵才有可能相等。

§8.2 矩阵的运算

我们可以对矩阵定义一些具有实际意义的运算，使之成为解决实际问题的有力工具。

（一）矩阵的加法和减法

例 1 设两种货物（单位：吨）从三个产地运往四个销地，其调运方案分别由矩阵 A 和矩阵 B 表示。

$$A=\begin{pmatrix}3&5&4&2\\6&3&5&0\\2&8&4&3\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}2&1&6&0\\4&2&3&5\\0&4&3&2\end{pmatrix}$$

那么从各产地运往各销地两种货物的总量为矩阵

$$C=\begin{pmatrix}3+2&5+1&4+6&2+0\\6+4&3+2&5+3&0+5\\2+0&8+4&4+3&3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6&10&2\\10&5&8&5\\2&12&7&5\end{pmatrix}$$

我们规定矩阵 C 是矩阵 A 与矩阵 B 的和。

例 2 设某厂生产甲、乙、丙三种产品，上月的销售收入及生产成本（单位：万元）分别为矩阵 A 和 B

$$A=(32\quad 18\quad 40);\qquad B=(15\quad 8\quad 21)$$

那么，该厂上月生产这三种产品的利润（单位：万元）应为矩阵 A 与矩阵 B 的差，即

$$\begin{aligned}A-B&=(32\quad 18\quad 40)-(15\quad 8\quad 21)\\&=(32-15\quad 18-8\quad 40-21)\\&=(17\quad 10\quad 19)\end{aligned}$$

一般地，可得如下定义：

定义 8.4 两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，对应位置元素相加或相减而得到的 $m\times n$ 矩阵，分别称为矩阵 A 与矩阵 B 的

和或差，记作

$$A\pm B=(a_{ij})_{m\times n}\pm(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n} \tag{8.9}$$

应该注意的是，只有当两个矩阵具有相同的行数和相同的列数，才能进行矩阵的加减运算。

可以验证，矩阵的加减法满足下面运算律：

设 A、B、C、O 都是 $m\times n$ 矩阵，则

(1) $A+B=B+A$；　　(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$；

(3) $A+O=A$；　　(4) $A-A=O$。

（二）数与矩阵的乘法

定义 8.5 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，k 是数，用数 k 乘矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$中的每一个元素而得到的 $m\times n$ 矩阵称为数 k 与矩阵 A 的乘积，记作

$$kA=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n} \tag{8.10}$$

注：数与任一个矩阵都可以相乘。

例 3 设某两地与另外四个地区之间的里程（单位：km）为矩阵 A。

$$A=\begin{pmatrix}75 & 90 & 50 & 80\\ 60 & 45 & 70 & 55\end{pmatrix}$$

如果货物每吨公里的运价是 2 元，则上述地区之间每吨货物的运费（单位：元/吨）应是 2 元与矩阵 A 的乘积，即

$$\begin{aligned}B=2A&=2\begin{pmatrix}75 & 90 & 60 & 80\\ 60 & 45 & 70 & 55\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2\times75 & 2\times90 & 2\times60 & 2\times80\\ 2\times60 & 2\times45 & 2\times70 & 2\times55\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}150 & 180 & 120 & 160\\ 120 & 90 & 140 & 110\end{pmatrix}\end{aligned}$$

可以验证，数与矩阵的乘法满足以下运算律：

设 A，B 均为 $m\times n$ 矩阵，k，l 是数，则

（1）$kA=Ak$；　　（2）$k(A+B)=kA+kB$；

（3）$(k+l)A=kA+lA$；　（4）$(kl)A=k(lA)$

例 4　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3&4&6\\5&2&4\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}2&-2&5\\-3&7&8\end{pmatrix}$$

（1）计算 $3A+2B$；

（2）设 $2A-3X=B$，求 X。

解　（1）$$3A+2B=3\begin{pmatrix}3&4&6\\5&2&4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2&-2&5\\-3&7&8\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}9&12&18\\15&6&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-4&10\\-6&14&16\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}13&8&28\\9&20&38\end{pmatrix}$$

（2）原方程变形，得

$$X=\frac{1}{3}(2A-B)$$
$$=\frac{1}{3}\left[2\begin{pmatrix}3&4&6\\5&2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-2&5\\-3&7&8\end{pmatrix}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&10&7\\13&-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&\frac{10}{3}&\frac{7}{3}\\\frac{13}{3}&-1&0\end{pmatrix}$$

（三）矩阵的乘法

先看一个实例：设有甲、乙、丙三种产品，其中两年的产量用矩阵 A 表示，产品的成本和单价用矩阵 B 表示，求两年的成本总额和销售总额。

$$
\begin{array}{cccc}
& \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \\
A= & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 200 & 300 & 400 \\ 600 & 700 & 800 \end{pmatrix}} \\
\end{array}
\begin{array}{l} \text{第一年} \\ \text{第二年} \end{array};\quad
B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{array}
$$

成本 售价

则第一年的成本总额为

$$200\times2+300\times3+400\times5=3300$$

第一年的销售总额为

$$200\times3+300\times4+400\times6=4200$$

第二年的成本总额为

$$600\times2+700\times3+800\times5=7300$$

第二年的销售总额为

$$600\times3+700\times4+800\times6=9400$$

用矩阵表示应是

$$C=\begin{pmatrix} 3300 & 4200 \\ 7300 & 9400 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \text{第一年} \\ \text{第二年} \end{array}$$

成本总额　销售总额

显然，矩阵 C 的第 i 行第 j 列的元素是矩阵 A 的第 i 行的元素与矩阵 B 的第 j 列对应元素的乘积之和，我们把矩阵 C 称为矩阵 A 与矩阵 B 的乘积 $AB=C$。

定义 8.6　设 $A=(a_{ik})_{m\times l}$，$B=(b_{kj})_{l\times n}$它们的乘积 $AB=C=(C_{ij})_{m\times n}$，是一个行与左边矩阵 A 相同，列与右边矩阵 B 相同的 $m\times n$ 矩阵，而积矩阵 C 的第 i 行第 j 列的元素是

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{l_j}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj} \qquad (8.11)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

注：只有当左矩阵 A 的列数与右矩阵 B 的行数相同时，AB 才有意义。

例 5 设甲、乙两个机床厂均生产Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三种型号的机床，其年产量（单位：台）为

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}200 & 250 & 180\\ 160 & 240 & 270\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{乙}\end{array}$$

若生产这三种型号的机床每台的利润（单位：万元）为

$$B=\begin{pmatrix}0.2\\ 0.5\\ 0.7\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{Ⅰ}\\ \text{Ⅱ}\\ \text{Ⅲ}\end{array}$$

那么，这两个机床厂的年利润（单位：万元）应是

$$AB=\begin{pmatrix}200 & 250 & 180\\ 160 & 240 & 270\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.2\\ 0.5\\ 0.7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}200\times0.2+250\times0.5+180\times0.7\\ 160\times0.2+240\times0.5+270\times0.7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}291\\ 341\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{乙}\end{array}$$

例 6 设矩阵

$$A=(1\quad 2\quad 3);\qquad B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}，求 AB、BA$$

解

$$AB=(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=1\times1+2\times2+3\times3=14$$

$$BA=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

例 7 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -5 & -8\end{pmatrix},$$

求 AB、BA 和 AC

解 $AB=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AC=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$

综上，容易得到：

（1）矩阵的乘法不满足交换律。因为 AB 有意义，BA 不一定有意义，如例 4 的 BA 就无意义；即使 AB 与 BA 都有意义，AB 与 BA 也不一定相等，如例 5、例 6。因此，矩阵相乘时有左乘与右乘的区别。我们把 AB 称为 A 左乘 B，或称 B 右乘 A。

（2）矩阵的乘法不满足消去律。两个非零矩阵之积可能是零矩阵，如例 6。因此不能由 $AB=O$ 而推得 $A=O$ 或 $B=O$。此外，即使 $A\neq O$，也不能由 $AB=AC$ 而推得 $B=C$，如例 6，$AB=AC$，但 $B\neq C$。

矩阵的乘法满足以下运算律：

设矩阵 A、B、C 及单位矩阵 I 都可以进行有关运算，k 是数，则

（1）$(AB)C=A(BC)$；

（2）$A(B+C)=AB+AC$；

（3）$(A+B)C=AC+BC$；

（4）$k(AB)=(kA)B=A(kB)$；

（5）$AI=A$；

（6）$IA=A$

证 现在证（2），其余可以仿此得到证明

设 $A=(a_{ik})_{m\times l}$，$B=(b_{kj})_{l\times n}$，$C=(c_{kj})_{l\times n}$则

$A(B+C)=(a_{ik})_{m\times l}(b_{kj}+c_{kj})_{l\times n}$