SPT 高等院校选用教材

工科类

线性代数

陈治中　主编

科学出版社

高等院校选用教材

线性代数

陈治中　主编

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书根据高等院校工科各专业的《线性代数课程基本要求》,同时又照顾到不同层次、不同学时的实际需要编写而成.全书共7章,主要介绍行列式、矩阵、n 维向量空间、线性方程组、矩阵的对角化、二次型、线性空间与线性变换等.每章末附有习题,书末有习题答案.

本书可作为高等院校理工科有关专业的教材,也可供各类成人教育与自学考试人员等使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈治中主编.-北京:科学出版社,2001

高等院校选用教材

ISBN 7-03-008712-7

Ⅰ.线… Ⅱ.陈… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 39589 号

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717

北京双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年2月第 一 版 开本:710×1000 1/16
2001年2月第一次印刷 印张:14
印数:1—7 500 字数:265 000

定价:18.00 元

序

数学作为自然科学的一个分支所研究的是现实世界中的客观存在:数与形以及它们之间的关系.由于从宏观的宇宙银河系到微观的粒子结构,从物质生产到人们的社会生活,无处不含有数与形,也就无处不含有运用数学描述、处理和解决那里出现问题的可能性.而且.随着人们对于自然界和社会认识的深化,愈来愈会显示数学对于人类文明发展的重要性.

数学与其他自然科学学科一样源于对于客观存在的观察和实验,以便从中发现其固有的规律性.然而,它之所以独立于其他学科的永恒的生命力在于它的抽象性与严密的逻辑推理.正是因为如此,学习数学使得能够熟练地运用它分析和解决问题决非易事.为此不仅要投人,而且要注意学习方法.后者尤其要重视,因为它会使你的投入适得其所,甚至有时会事半功倍.

在方法上,一般而言,要抓住如下几个环节:

博学 在掌握课堂上所学主要内容的基础上,广泛地阅读有关的文献,特别是参考书籍.本系列丛书照顾到了这种广度.

审问 多问几个为什么还要问好为什么.不会提出问题,更不会提出合适的问题,就很难说掌握了所学的内容.本系列丛书照顾到了这方面,适度地提出了一定量的问题,并给出了提示或解答,以引导读者养成这种习惯.

慎思 数学本身就是一门训练人的思维,增强人的智力的学问.不善于思索,不慎于思索,就难于了解数学,更不用说掌握它了.本系列丛书照顾到了人们在学数学中的思想发展,逐渐引导读者举一反三.

明辨 着力了解数学各分支之间的区别与联系,不区别无以深入,不能了解和掌握各分支的独特的思维方式和处理方法,更不能得其精髓.不联系无以高远,就难以发展了.本系列丛书照顾到了这种区别和联系.

笃行 最重要的还是亲自去做.不折不扣地做,由此及彼地做,异想天开地做.学习的过程就含有创造.在充分地作练习、解题中就会有所体现和体验.本系列丛书均着重于引导读者心体力行.

在方法得体的基础上,若能以"人一能之己十之,人十能之己百之"的精神去投入,就会取得'虽愚必明,虽柔必强'的效果.

虽然本系列丛书是面对工科,因为这里的作者均为工科执教数学多年,有较丰富的教与学的经验.然而,并不意味这里的数学仅适用于工科,因为数学本身绝无

纯粹与应用的明显界限，可以想像，本系列丛书对于理科也会不无裨益.

谨以此为序，

刘彦佩

前　　言

本书是根据高等院校工科各专业《线性代数课程基本要求》，同时考虑到不同层次以及不同课内学时等的不同要求而编写的.

本书内容包括行列式、矩阵、n 维向量空间、线性方程组、矩阵的对角化、二次型、线性空间与线性变换等共七章，并配备一定数量的习题，书末附有习题答案.

线性代数是高等院校一门重要的基础数学课程.它是由解线性方程组发展起来的理论.具有较强的逻辑性、抽象性，以及广泛的实用性.学习线性代数课程，除了获取必要的基础知识外，它的基本概念、基本思想与基本方法，对于培养学生的基本数学素质，锻炼抽象思维能力和逻辑推理能力，也是必不可少的.

本书在内容的处理上，既注意保持教材本身体系的完整性和结构的合理性，又考虑到学生学习线性代数课程的实际情况.特别是针对一部分学生学习线性代数课程感到抽象与不易适应的问题，在重要概念引进时尽可能做到简明与自然，而对一些难点与比较抽象的部分，则增加评注与说明.要求学生在理解与掌握基本概念与基本理论的同时，更要注重代数思想的培养与抽象思维能力的锻炼.

本书可作为高等院校理工科各专业本科生与专科生的教材，也可供各类成人教育与自学考试等使用.

本书由陈治中教授担任主编.陈治中编写预备知识、第三、五、六章，王秋媛编写第一、二、四章，季文铎编写第七章.最后由陈治中统一定稿.

本书的出版得到了科学出版社以及北方交通大学教务处、理学院的热情关怀与大力支持，在此一并致以衷心的感谢.

由于编者水平所限，错误与不妥之处在所难免，恳请广大读者与各位同行批评指正.

编著者

目　录

预 备 知 识

一、数　　域

代数学的基本特征是解方程.在研究线性方程组解的方法与解的理论的过程中,逐步形成了行列式理论、矩阵理论、线性空间与线性变换的理论,成为现在线性代数的主要内容.显然,由于所讨论的数的范围不同,方程的解也不相同,因此有必要确定研究的范围.在线性代数中,通常是在一个数域内进行讨论.

定义　设$\mathbb{P}$是复数集$\mathbb{C}$的一个子集,如果$\mathbb{P}$中至少包含两个不同的数,而且$\mathbb{P}$对于加法、减法、乘法、除法(除数不为零)四则运算是封闭的,即对于$\mathbb{P}$中任意二数a和b,恒有

$$a+b\in\mathbb{P},\qquad a-b\in\mathbb{P},$$

$$ab\in\mathbb{P},\qquad \frac{a}{b}\in\mathbb{P}\,(b\neq 0),$$

则称$\mathbb{P}$是一个**数域**.

显然,整数集$\mathbb{Z}$不是数域,因为两个整数相除(除数不为0)后一般不再是整数.而有理数集$\mathbb{Q}$,实数集$\mathbb{R}$,复数集$\mathbb{C}$则都是数域,就叫做有理数域、实数域和复数域.

定理 1　任何数域$\mathbb{P}$都包含0与1.

证:在数域$\mathbb{P}$中任取一个数a,由数域定义

$$a-a\in\mathbb{P},$$

所以

$$0\in\mathbb{P}.$$

又因为$\mathbb{P}$中至少有两个数,假设除0外还有一个$b\neq 0$,则由数域的定义可知

$$\frac{b}{b}\in\mathbb{P},$$

所以

$$1\in\mathbb{P}.$$

例 1　数集

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$$

是一个数域.

证:因为

$$0=0+0\cdot\sqrt{2},$$

$$1=1+0\cdot\sqrt{2},$$

所以$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$中至少有两个不同的数 0 和 1.

在$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$中任取两个数 $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2}, (a,b,c,d\in\mathbb{Q})$,于是

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

所以$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$关于加法、减法、乘法是封闭的.

现设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$,于是 c,d 不全为 0,因此 $c-d\sqrt{2}\neq 0$,$(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})=c^2-2d^2\neq 0$,所以

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}$$

$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

即$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$对于除法也是封闭的.故$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$是一个数域.

同样可以证明.

例 2 数集

$$\mathbb{Q}(i)=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$$

是一个数域.

证明留给读者自己完成.

例 3 数集

$$\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$$

不是数域,因为其中任意两个数的商(除数不为 0)不一定在这个集合中.

定理 2 任何一个数域都包含有理数域.

证:设$\mathbb{P}$是一个数域.由定理 1,$\mathbb{P}$包含 0 与 1.

由定义,$\mathbb{P}$关于加法封闭,所以$\mathbb{P}$包含 $1+1=2, 2+1=3, \cdots, (n-1)+1=n, \cdots$,则$\mathbb{P}$包含全体自然数.

又因为$\mathbb{P}$关于减法封闭,所以$\mathbb{P}$包含 $0-n=-n(n=1,2,\cdots)$,即$\mathbb{P}$包含全体负整数,所以$\mathbb{P}$包含全体整数.

由于任一有理数都可表为两个整数的商,因此也在$\mathbb{P}$中,故$\mathbb{P}$包含有理数域.

注:综上,有理数域$\mathbb{Q}$是最小的数域.

二、连加号∑

连加号∑表示数的连加,例如

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

用下标 i 表示从第 1 项到第 n 项求和.显然下标也可用其他字母如 j,k 等表示.

设 $m \times n$ 个数

$$\begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n}, \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn}, \end{array}$$

要求它们的和 S,可以按行相加,共中第 i 行的和为

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},$$

即对下标 j 求和.然后把 m 个行的和 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 相加,记作

$$S = \sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

同样也可以先按列相加,其中第 j 列的和为

$$S_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij},$$

这时是对下标 i 求和.然后把 n 个列的和相加,记作

$$S = \sum_{j=1}^{n} S_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

显然,这两个用双重连加号表示的和式是相等的,都为 $m \times n$ 个数的和 S,即有

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij},$$

这表明,利用双重连加号求和时,对下标 i,j 的求和次序可以交换.但一般情况下,只有和不变时才能交换连加号.

用双重连加号表示 m 个数的和与 n 个数的和的乘积也是比较方便的,利用分配律计算可得

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) &= \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j,$$

显然

$$\sum_{j=1}^{n} a_i b_j = a_i \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_j = b_j \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

三、连乘号$\prod$

连乘号$\prod$表示数的连乘,例如

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

同样,下标 i 也可用其他字母如j,k 等表示.

n 个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 在条件 $1\leqslant j<i\leqslant n$ 下所有可能的差(a_i-a_j)的连乘积记作

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j),$$

该符号的含义是,例如:

当 $n=2$ 时

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(a_i-a_j)=a_2-a_1;$$

当 $n=3$ 时

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(a_i-a_j)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2);$$

当 $n=4$ 时

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(a_i-a_j)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3);$$

$$\cdots\cdots$$

一般地有

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)=&(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\\&\cdot(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)\\&\cdots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})(a_n-a_{n-1}).\end{aligned}$$

值得注意的是

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

中连乘积的项数规律如下：

$n=2$ 时，有 1 项；

$n=3$ 时，有 $1+2=3$ 项；

$n=4$ 时，有 $1+2+3=6$ 项；

……

一般地，当为 n 时，有 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 项.

第一章　行　列　式

行列式是一个很重要的数学工具.不但在数学的各个分支中,而且还在数学以外的其他许多学科中,都要经常用到行列式.它可以用来表达许多数学性质,从而可以用来解释并推断许多实际现象.

§1.1　二(三)阶行列式

本节的主要目的是叙述行列式的来源.行列式是从二元和三元线性方程组的公式解引出来的.下面首先讨论解线性方程组的问题.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

用消元法求解,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,可求得解为

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 &= \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

这就是一般二元线性方程组(1.1.1)的解的公式.但式(1.1.2)不易记忆,应用时不方便,于是就引进新的符号来表示式(1.1.2)的结果.

定义 1.1.1　令

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{1.1.3}$$

我们把式(1.1.3)中由 4 个数 a,b,c,d 排成的两行两列,并定义为 $ad - bc$ 的式子

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

称为**二阶行列式**.

注:行列式算出来就是一个数.

这样式(1.1.2)就有下述便于记忆的形式:

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.4}$$

记法:

(1)x_1,x_2 的分母相同,其行列式形式由式(1.1.1)中未知数系数按其原有的相对位置而排成.

(2)x_1,x_2 的分子不同,分别是把居分母地位的行列式中 x_1,x_2 的系数所在位置换成两个常数项,并保持该二数原有的上、下相对位置.

例 1.1.1 解方程组

$$\begin{cases} 3x+4y=8, \\ 2x+7y=5. \end{cases}$$

解:由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=13\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=36,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-1,$$

故

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{36}{13},\quad y=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{13}.$$

定义 1.1.2 对于由 9 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$排成三行三列并定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

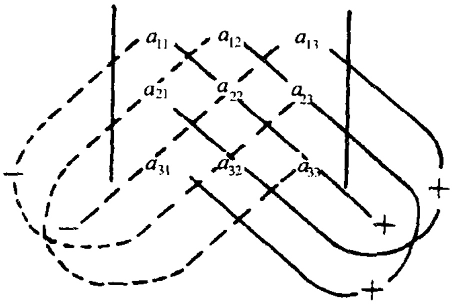
$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}
\end{aligned} \tag{1.1.5}
$$

的式子

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1.6}
$$

称为**三阶行列式**.

上述定义表明三阶行列式由 6 项构成,每项都是不同行、不同列的 3 个元素的乘积.这 6 项可由下图所示方法得到.此法称为对角线法则(也称 Sarrus 法).



如果把三元一次方程组

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.1.7}
$$

中未知量的系数排成三阶行列式(称为**系数行列式**).

记

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
$$

当 $D \neq 0$ 时,可用消元法验证方程组(1.1.7)的解为

$$
x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}, \tag{1.1.8}
$$

其中 $D_j\,(j=1,2,3)$是用常数项 b_1,b_2,b_3 替换 D 中第 j 列所得的三阶行列式,即

$$
D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},
$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

可见,引入二(三)阶行列式的概念,使二(三)元线性方程组的公式解便于记忆使用.

人们自然想到把二阶和三阶行列式推广到 n($n\geqslant 4$ 的正整数)阶行列式,并利用 n 阶行列式这个工具来解含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组,使它的解有便于记忆使用的形式.问题是如何定义 n 阶行列式?直接检验便可发现:四阶和四阶以上的行列式如果沿用“对角线法则”来定义,那么它们将失去二阶和三阶行列式的主要性质,也没有类似于二阶、三阶行列式的应用[二(三)元线性方程组的公式解],因此必须另想其他方法来定义. n 阶行列式可以用几种不同的方法来定义,我们采用排列与逆序法.

§1.2 排列与逆序

定义 1.2.1 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个**排列**是指由这 n 个数组成的一个有序组.

例如,1234,3124 都是 4 个数 1,2,3,4 的一个排列.

n 个数的不同排列共有 $n!$ 个.实际上,在作 n 个数的一个排列时,第一位置的数可以取这 n 个数中的任何一个,所以有 n 种取法;当这一位置取定后,第二位置的数只能在剩下的 $n-1$ 个数中选取,有 $n-1$ 种取法,这样继续下去,到第 n 个位置时就只剩下一个数了,只有 1 种取法.于是一共可有

$$n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$$

种不同的排列.

例如,1,2,3 这 3 个数的全体不同的排列一共有 $3!=6$ 个.分别是 123,213,312,321,231,132.

注意到在上面的 3 个数的排列中,除了 123 是按自然顺序排列以外,其余的排列中都有较大的数排在较小的数的前面.例如,在排列 231 中,3 比 1 大,但 3 排在 1 的前面.

定义 1.2.2 在一个排列中,如果某一个较大的数排在某一较小的数前面,就