

统计学数学方法

〔瑞典〕H. 克拉美著

上海科学技术出版社

統計学数学方法

[瑞典] H. 克拉美 著

魏宗舒等 译

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书以现代数学的观点为数理统计建立了一套理论体系，共分三部分。第一部分专讲数学的基础知识，分十二章，内容包括点集论， R_1 和 R_n 中的测度论与积分论，及若干有关知识。第二部分讲述随机变量与概率分布，分十二章，内容包括基础理论， R_1 中的变量与分布， R_n 中的变量与分布。第三部分讲述统计推断理论，分十三章，内容包括一般概念，抽样分布，显著性检验，估计理论等。可供高等学校概率论和数理统计专业的师生阅读，也可供科学工作者和实际工作者参考。

MATHEMATICAL METHODS OF STATISTICS

H. Cramer

Princeton Univ. Press, 1946.

统计学数学方法

魏宗毓 郑朴 吴锦译

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 18 字数 442,000

1966年1月第1版 1982年6月第2次印刷

印数 3,201—8,800

书号: 13119-663 定价: (料五) 2.40元

译者序

H. Cramér 写这本书的目的,是要把数理统计学建立在现代数学的基础上,使能适应现代的要求。

要达到这样的目的,不可避免地要用到很多的现代数学,但作者知道,对读者的数学水平却又不能要求过高,这样就提出了要用多少和多高的数学准备知识的问题。关于这两个问题,作者凭着他多年的教学和科研经验,选取点集论、欧几里得空间内的测度论及积分论、Fourier 变换、矩阵论等列入第一部分作为本书的数学基础知识。凡具有相当于我国大学理工科二年级数学程度的读者都可以自己阅读。

第二部分包括近代概率论的基础知识。作者在这里着重两个方面:一方面强调概率的频率解释,另一方面侧重于离散型及连续型的概率分布。

第三部分才进入数理统计学。这一部分的选材是可以讨论的,但是总的说来,是经过作者郑重考虑的。这一部分如他在原序中所说,仅对抽样分布理论、统计估计及显著性检验等作了叙述。虽然这里集中讨论一些较重要的问题,但其中具体材料仍较丰富。此外,在讲解方面以及各部分的相互关系方面也处理得较好,而且一切需要证明的定理都一贯证到底。

本书在取材上也有某些不足之处。比如在内容方面,关于理论的叙述多,而实际的考虑过少,除了第 30 及 31 两章中有几个具体的例子外,在很有实用价值的方差分析中竟然一个例子也没有。

总之,这是一本数理统计学的理论著作,有一定的参考价值,但也同时存在着缺点。

原 序

在晚近二十五年中，統計科学^①取得了巨大的进展。在此时期内，古典概率論已发展成为純粹的数学理論，从严密性来讲已达到了近代水平。

本书的目的，是要綜合这两方面的发展而对以概率概念为基础的近代統計方法中的数学理論作一闡述。要充分理解这些方法的理論，要求有較高的純粹数学的知識。我是本着讀者只掌握了微积分、代数与解析几何的基本知識这一观点来写这本书的。

本书的第一部分，可視為一种数学引論。在这里，有一些数学知識对讀者可能是較为生疏而对于学习第二、第三部分又是必需的。其中特別以分布及关于一个分布的积分的基本概念为重点。在第四、第五两章中，对勒貝克測度和积分的理論作了簡單的叙述，作为分布及分布的积分等基本概念的一个引言。而在第六、第七两章中，則概述这些基本概念的直接推广。

本书的第二部分，包含了随机变量和概率分布的一般理論。第三部分則对抽样分布理論、統計估計及显著性檢驗等作了闡述。最后一部分所討論的問題的選擇必然有些随意性，但我尽量集中討論一般的重要問題。当讀者已充分掌握这些知識后，就能够自己解决在应用中遇到的特殊問題了。为了給本书的篇幅以一个适当的限制，不得不舍弃我原来打算討論的某些很有趣的題目，例如随机过程的理論、統計時間序列及周期图。

統計檢驗的理論可借用各种应用領域內的数字的例子來說明。限于篇幅，例題的数目必然要作很大的縮減。关于数值計算

^① 这里的統計科学是指数理統計而言。——譯者注

实际步骤的问题,也必须不加讨论。

要学习本书的其余部分,并不必要先学完整个第一部分。读者若急于要学习第二、第三部分,可先熟悉一下前面提到的那些基本概念。为此,只须阅读了第一至三章及 4.1~4.2、5.1~5.3、6.1~6.2、6.4~6.6、7.1~7.2、7.4~7.5、8.1~8.4 诸节之后,即可开始阅读第十三章,在阅读过程中可随时参阅第一部分中的有关问题。

本书是以我自 1930 年以来在大学中的讲稿为基础,其中大部分是于 1942~1944 年写成。由于战争的原因,这些年中,在瑞典能用作参考的国外科学著作极不完备,而且得到的很迟。因此,本书可能遗漏了一些应该引用的材料及参考文献。

H. 克拉美

斯德哥尔摩大学

数理统计系

1945 年 5 月

目 录

譯者序
原 序

第一部分 数学的基础知識

第一至三章 点 集

第 一 章 集合的一般性质	1
1.1 集合(1) 1.2 子集,空間(2) 1.3 集合的运算(3) 1.4 集合的序列(6) 1.5 单調序列(7) 1.6 集合的可加族(8)	
第 二 章 綫性点集	9
2.1 区間(9) 2.2 R_n 中集合的各种性质(10) 2.3 Borel 集(11)	
第 三 章 n 維空間內的点集	13
3.1 区間(13) 3.2 R_n 中集合的各种性质(14) 3.3 Borel 集(14) 3.4 綫性集(15) 3.5 子空間,乘积空間(15)	

第四至七章 R_1 中的测度与积分論

第 四 章 綫性点集的 Lebesgue 测度	17
4.1 区間的长(17) 4.2 推广(19) 4.3 区間的和的测度(20) 4.4 有界集的外测度和內测度(23) 4.5 可测集与 Lebesgue 测度(26) 4.6 可测集族(28) 4.7 可测集与 Borel 集(30)	
第 五 章 一元函数的 Lebesgue 积分	32
5.1 有界函数在一具有有限测度集合上的积分(32) 5.2 B -可测函数(35) 5.3 积分的性质(38) 5.4 在一具有有限测度的集合上的无界函数的积分(40) 5.5 无限测度的集合上的积分(44) 5.6 作为一个可加集函数的 Lebesgue 积分(46)	
第 六 章 R_1 中的非負可加集函数	47
6.1 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分的推广(47) 6.2 集函数和点函数(48) 6.3 集函数的构造(51) 6.4 P -测度(54) 6.5 有界集函数(55) 6.6 分布(55) 6.7 分布序列(57) 6.8 一个收敛定理(59)	

第七章 一元函数的 Lebesgue-Stieltjes 积分61

7.1 在具有有限 P -测度的集合上的有界函数的积分(61) 7.2 无界函数与具有无限 P -测度的集合(64) 7.3 具有参数的 Lebesgue-Stieltjes 积分(65) 7.4 关于分布的 Lebesgue-Stieltjes 积分(69) 7.5 Riemann-Stieltjes 积分(70)

第八至九章 R_n 中的测度与积分论第八章 R_n 中的 Lebesgue 测度及其他的可加集函数75

8.1 R_n 中的 Lebesgue 测度(75) 8.2 R_n 中的非真可加集函数(76) 8.3 有界集函数(76) 8.4 分布(79) 8.5 分布序列(81) 8.6 乘积空间中的分布(82)

第九章 n 元函数的 Lebesgue-Stieltjes 积分84

9.1 Lebesgue-Stieltjes 积分(84) 9.2 关于分布的 Lebesgue-Stieltjes 积分(85) 9.3 关于累次积分的一个定理(86) 9.4 Riemann-Stieltjes 积分(87) 9.5 Schwarz 不等式(87)

第十至十二章 各种有关知識

第十章 Fourier 积分88

10.1 R_1 中分布的特征函数(88) 10.2 某些辅助函数(90) 10.3 R_1 中特征函数的唯一性定理(91) 10.4 R_1 中特征函数的連續性定理(94) 10.5 某些特殊的积分(97) 10.6 R_n 中的分布的特征函数(99) 10.7 R_n 中特征函数的連續性定理(100)

第十一章 矩陣、行列式与二次型 101

11.1 矩陣(102) 11.2 向量(104) 11.3 綫性变换的矩陣表示(105) 11.4 双綫性型与二次型的矩陣表示(106) 11.5 行列式(106) 11.6 秩(107) 11.7 附加矩陣与逆矩陣(109) 11.8 綫性方程(110) 11.9 正交矩陣, 特征数(111) 11.10 非真二次型(112) 11.11 $\sum_{i=1}^n x_i^2$ 的分解(114) 11.12 一些积分公式(116)

第十二章 若干补充120

12.1 記号 O, o 与 ∞ (120) 12.2 Euler-MacLaurin 求和公式(121) 12.3 Γ -函数(123) 12.4 β -函数(124) 12.5 Stirling 公式(126) 12.6 正交多項式(128)

第二部分 随机变量与概率分布

第十三至十四章 基 础

第十三章 統計与概率133

13.1 随机实验(133)	13.2 例(134)	13.3 统计规则性(137)	13.4 数学理论的目的(140)	13.5 数学的概率(143)	
第十四章 基本定义及公理					147
14.1 随机变量(公理1~2)	14.2 联合变量(公理3)	14.3 条件分布	14.4 独立的变量	14.5 随机变量的函数	14.6 结论
第十五至二十章 R_1 中的变量与分布					
第十五章 一般性质					161
15.1 分布函数与频率函数	15.2 两种简单类型的分布	15.3 平均值	15.4 矩	15.5 位置度量	15.6 离散度量
15.7 Tchebycheff 定理	15.8 偏度度量及超越度量	15.9 特征函数	15.10 半不变量	15.11 独立的变量	15.12 独立变量之和
第十六章 几种离散型分布					186
16.1 函数 $\varepsilon(x)$	16.2 二项分布	16.3 Bernoulli 定理	16.4 De Moivre 定理	16.5 Poisson 分布	16.6 Poisson 推广的二项分布
第十七章 正态分布					200
17.1 正态函数	17.2 正态分布	17.3 独立的正态变量之和	17.4 中心极限定理	17.5 中心极限定理的附注	17.6 由正态分布导出的正交展开式
17.7 由正态分布导出的渐近展开式	17.8 正态分布在统计学中的地位				
第十八章 几种与正态分布有关的分布					224
18.1 χ^2 -分布	18.2 学生分布	18.3 Fisher 的 ε -分布	18.4 β -分布		
第十九章 另外几种连续型分布					235
19.1 矩形分布	19.2 Cauchy 分布及 Laplace 分布	19.3 截尾分布	19.4 Pearson 分布系		
第二十章 一些收敛定理					241
20.1 分布的收敛与变量的收敛	20.2 某些收敛到正态分布的分布的收敛性	20.3 依概率收敛	20.4 Tchebycheff 定理	20.5 Khintchine 定理	20.6 一个收敛定理
第十五至二十章的习题					246

第二十一至二十四章 R_n 中的变量与分布

第二十一章 二維的情形	251
21.1 两种简单类型的分布(251)	21.2 平均值,矩(253)
21.3 特征函数(256)	21.4 条件分布(257)
21.5 回归 I(260)	21.6 回归 II(262)
21.7 相关系数(268)	21.8 变量的綫性变换(270)
21.9 相关比与均方联系(271)	21.10 密集椭圆(273)
21.11 独立变量之和(275)	21.12 正态分布(277)
第二十二章 R_n 中的分布的一般性质	281
22.1 两种简单类型的分布,条件分布(281)	22.2 連續型分布中的变量变换(283)
22.3 平均值,矩(284)	22.4 特征函数(286)
22.5 分布的秩(287)	22.6 变量的綫性变换(288)
22.7 密集椭球体(290)	
第二十三章 n 元的回归与相关	291
23.1 回归面(291)	23.2 綫性均方回归(292)
23.3 剩余(294)	23.4 偏相关(295)
23.5 复相关系数(297)	23.6 正交均方回归(298)
第二十四章 正态分布	299
24.1 特征函数(299)	24.2 非异的正态分布(300)
24.3 奇异的正态分布(301)	24.4 正态分布变量的綫性变换(302)
24.5 平方和的分布(302)	24.6 条件分布(303)
24.7 独立变量之和,中心极限定理(305)	
第二十一至二十四章的习题	306

第三部分 統計推断

第二十五至二十六章 一般概念

第二十五章 抽样的基本概念	309
25.1 引言(309)	25.2 简单随机抽样(309)
25.3 子样的分布(311)	25.4 子样值作为随机变量,抽样分布(312)
25.5 一个分布的統計縮影(313)	25.6 偏性抽样,随机抽样数字(315)
25.7 抽出后不放回的抽样,代表性法(317)	
第二十六章 統計推断	317
26.1 引言(317)	26.2 理論符合实际,显著性檢驗(318)
26.3 描述(320)	26.4 分析(321)
26.5 預測(324)	

第二十七至二十九章 抽样分布

第二十七章 抽样分布的特征	326
---------------	-----

27.1 記号(326)	27.2 子样平均数 \bar{x} (329)	27.3 矩 a_v (331)	27.4 方差 m_2 (332)	27.5 高阶中心矩与半不变量(333)	27.6 无偏估計(335)	27.7 矩的函数(337)	27.8 多維分布的特征(342)	27.9 分組的修正(343)	
第二十八章 抽样分布的漸近特性.....347									
28.1 引言(347)	28.2 矩(348)	28.3 中心矩(349)	28.4 矩的函数(350)	28.5 分位数(351)	28.6 极值与极差(354)				
第二十九章 精确的抽样分布.....362									
29.1 問題(362)	29.2 Fisher 引理, 自由度(363)	29.3 由正态分布抽取之子样的 \bar{x} 与 s^2 的联合分布(365)	29.4 学生比(370)	29.5 一个引理(373)	29.6 二維正态分布中的抽样(378)	29.7 相关系数(381)	29.8 回归系数(384)	29.9 k -維正态分布中的抽样(386)	29.10 广义方差(388)
29.11 广义的学生比(389)	29.12 回归系数(392)	29.13 偏相关系数与复相关系数(393)							
第三十至三十一章 显著性檢驗 I									
第三十章 拟合优度檢驗与有关的檢驗.....399									
30.1 理論分布完全明确規定时的 χ^2 檢驗(399)	30.2 例(403)	30.3 某些参数須由子样估計时的 χ^2 檢驗(407)	30.4 例(417)	30.5 联系表(424)	30.6 χ^2 作为同质性檢驗(428)	30.7 死亡率的判別准則(432)	30.8 其他拟合优度檢驗(433)		
第三十一章 参数的显著性檢驗.....435									
31.1 依据标准誤差的檢驗(435)	31.2 依据于精确分布的檢驗(438)	31.3 例(439)							
第三十二至三十四章 估計理論									
第三十二章 估計的分类.....455									
32.1 問題(455)	32.2 两个引理(456)	32.3 一个估計的最小方差, 有效估計(459)	32.4 充分估計(469)	32.5 漸近有效估計(470)	32.6 两个未知参数的情形(472)	32.7 几个未知参数(477)	32.8 推广(477)		
第三十三章 估計法.....479									
33.1 矩法(479)	33.2 极大似然法(480)	33.3 极大似然估計的漸近性质(481)	33.4 最小 χ^2 法(487)						
第三十四章 置信域.....488									
34.1 引言(488)	34.2 一个未知参数(488)	34.3 一般的情况(497)	34.4 例(498)						

第三十五至三十七章 显著性檢驗 II

第三十五章 統計假設檢驗的一般理論.....505

 35.1 显著性檢驗的選擇(505) 35.2 簡單及复合假設(508) 35.3 几种簡單假設的檢驗. 最有力檢驗(509) 35.4 无偏檢驗(511) 35.5 几种复合假設的檢驗(514)

第三十六章 方差分析.....516

 36.1 平均值的变异(516) 36.2 簡單的变量分組(517) 36.3 推广(521)

 36.4 随机区組(523) 36.5 拉丁方(525)

第三十七章 某些回归問題.....527

 37.1 含有非随机变量的問題(527) 37.2 簡單回归(528) 37.3 复回归(530) 37.4 其他回归問題(534)

表1~2 正态分布.....536

表3 χ^2 -分布.....538

表4 t -分布.....540

参考文献.....542

索引.....556

第一部分

数学的基础知識

第一至三章 点 集

第一章 集合的一般性质

1.1 集合 在純粹数学和应用数学中，我們常常会遇到要去研究具有某些特定性质的对象的总体的情形。这样定义了的任何对象的总体，我們称它为集合，每一个属于这种集合的对象，則称为集合的一个元素。

集合的元素可以是任意种类的对象：点，数，函数，事件，人等等。例如(1)全体正整数組成的集合，(2)在一条給定的直綫上的全体的点組成的集合，(3)二个变量的全体有理函数組成的集合，(4)出生在某一国家而到1940年底还活着的人全体組成的集合。在本书的第一部分，我們主要將討論元素是点或数的那种集合，但在这一章里，我們將从元素可以是任何种类的一般情况来考虑。

在上述例(4)中，虽然可能不知道集合中元素的个数，但可以知道它只包含有穷个元素，而在上述的前三个例子中，集合所包含的元素的个数显然不是有穷的。因此，我們必須去区别有穷集合与无穷集合。

一个无穷集合,若其中的元素可以排列成一个序列: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, 且使得 (a) 每一个 x_n 均为集合的一个元素, 及 (b) 集合中的每一个元素, 均在这序列的一个确定的位置上出现, 便叫做可数的. 由这样的一种排列, 我们可以建立起集合的元素与全体正整数 $1, 2, \dots, n, \dots$ 组成的集合的元素之间的一一对应. 由全体正整数组成的集合, 即为可数集合的一个最简单的例子.

以后我们将会知道存在着不可数的无穷集. 从这样的集合中选出任意一系列元素, 总还有一些不在这序列中出现的元素留在集合中, 因此, 一个不可数集合可以说是较一个可数集合的无穷的阶为高的集合. 以后我们可以知道, 在一条给定直线上的点的全体所组成的集合就是一个不可数集(见 4.3).

1.2 子集, 空间 假如有两个集合 S 和 S_1 , S_1 中的每一个元素也属于 S , 则称 S_1 是 S 的一个子集, 且记为

$$S_1 \subset S \text{ 或 } S \supset S_1.$$

有时, 我们也称 S_1 包含在 S 中或 S_1 属于 S . 当 S_1 只含有一个元素 x 时, 我们用记号 $x \in S$ 来表示 x 属于 S .

在特别的情形, 即当关系 $S_1 \subset S$ 及 $S \subset S_1$ 同时成立时, 则称这两个集合为相等, 并且记为

$$S = S_1.$$

有时, 为了便利起见, 我们要考虑一个不含任何元素的集合 S . 我们称这种集合为空集, 且记为 $S = \emptyset$. 空集是任意集合的一个子集. 若视空集为有穷集合的一个特例, 则易知有穷集合的任一子集亦为一有穷集合, 而可数集合的任一子集为有穷集合或可数集合. 例如由介于 20 到 30 之间的整数组成的集合是由全体正整数 $1, 2, \dots, n, \dots$ 组成的集合的一个有穷子集, 而由全体奇数 $1, 3, \dots$ 组成的集合是它的一个可数子集.

在许多研究中, 我们要涉及已给集合 S 的各种子集的性质和相互关系. 这个包含了研究中出现的全部元素的集合 S , 我们称

之为研究的空間。例如，假如我們要去考虑那些在一条直綫上的点所組成的不同的集合，則我們可以取直綫上全部的点組成的集合 S 作为我們的空間。空間 S 的任意子集 S' ，簡称为 S 中的集合。

1.3 集合的运算 設空間 S 已經給定，現在我們要考虑 S 中的不同集合。首先，我們来定义集合的加法、乘法和減法运算。

两个集合 S_1 及 S_2 之和是一个集合 S' ：

$$S' = S_1 + S_2,$$

S' 是由至少属于集合 S_1 及 S_2 二者之一的所有元素所組成。两个集合之积

$$S'' = S_1 S_2$$

是两个集合的共同部分，或者说集合 S'' 是由同时属于 S_1 及 S_2 的所有的元素組成。最后，两个集合之差

$$S''' = S_1 - S_2$$

仅当 S_2 是 S_1 的子集时才有定义，因此集合 S''' 是由属于 S_1 但不属于 S_2 的全体元素組成。

例如，若集合 S_1 及 S_2 各为曲綫 C_1 及 C_2 内部的点(見图1)所組成，則 $S_1 + S_2$ 是由至少在这两条曲綫中的一条的内部的全体点所組成的集合，而 $S_1 S_2$ 是由这两条曲綫的公共区域内的全体点所組成的集合。

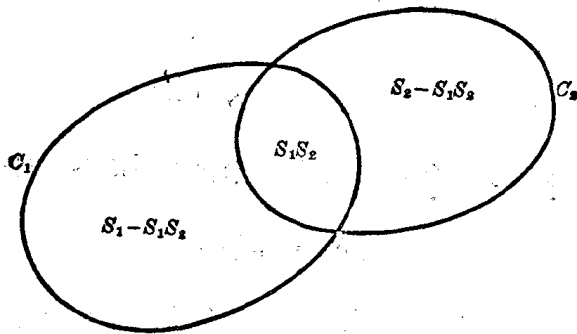


图1 集合的簡單运算

乘积 $S_1 S_2$ 显然同时是 S_1 及 S_2 的子集. 差 $S_n - S_1 S_2$ ($n = 1$ 或 2) 是由属于 S_n 而不属 $S_1 S_2$ 的全体点所组成的集合.

在特别的情形, 即当 S_1 及 S_2 无共同元素时, 则其乘积是一个空集, 于是有 $S_1 S_2 = 0$. 另一方面, 若 $S_1 = S_2$, 则差 $S_1 - S_2$ 是一个空集, 即有 $S_1 - S_2 = 0$.

在 S_2 为 S_1 的子集的特殊情形, 则有 $S_1 + S_2 = S_1$ 及 $S_1 S_2 = S_2$.

由于和与积的定义的对称性, 可知加法与乘法的运算是可交换的, 即

$$S_1 + S_2 = S_2 + S_1 \quad \text{及} \quad S_1 S_2 = S_2 S_1.$$

我们还可以发现, 类似于算术运算中的结合律与分配律, 对于集合的运算也成立. 即

$$(S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3),$$

$$(S_1 S_2) S_3 = S_1 (S_2 S_3),$$

$$S_1 (S_2 + S_3) = S_1 S_2 + S_1 S_3.$$

这样, 我们可以说任意有穷个集合的和与乘积而不致含义不明:

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n \quad \text{及} \quad S_1 S_2 \cdots S_n,$$

此处, 加项和乘积因子的次序可以任意排列.

我们还可以将这两个运算的定义推广到加项个数或乘积因子个数为可数序列的情形. 为此, 对于 S 中的已知集合序列 S_1, S_2, \cdots , 我们将其和

$$\sum_1^{\infty} S_\nu = S_1 + S_2 + \cdots$$

定义为由至少属于一个 S_ν 的全体元素组成的集合, 而将其乘积

$$\prod_1^{\infty} S_\nu = S_1 S_2 \cdots$$

定义为由属于全部 S_ν 的元素所组成的集合. 于是有, 例如,

$$S(S_1 + S_2 + \cdots) = SS_1 + SS_2 + \cdots.$$