统计学数学方法

〔瑞典〕H. 克拉美著

上海科学技术出版社

統計学数学方法

〔瑞典〕H. 克拉美 著
魏宗舒等譯

上海科学技术出版社

內容提要

本书以現代数学的观点为数理統計建立了一套理論体系，共分三部分．第一部分专讲数学的基础知識，分十二章，內容包括点集論，R_1 和 R_n 中的测度論与积分論，及若干有关知識．第二部分讲述随机变量与概率分布，分十二章，內容包括基础理論，R_1 中的变量与分布，R_n 中的变量与分布．第三部分讲述統計推断理論，分十三章，內容包括一般概念，抽样分布，显著性檢驗，估計理論等．可供高等学校概率論和数理統計专业的师生閱讀，也可供科学工作者和实际工作者参考．

MATHEMATICAL METHODS
OFSTATISTICS
H.Cramer
Princeton Univ, Press, 1946.

统计学数学方法

魏宗舒 郑朴 吴锦 译

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷
开本850×1156 1/32　印张18　字数442,000
1966年1月第1版　1982年6月第2次印刷
印数：3,201—8,000
书号：13119·663　定价：（科五）2.40元

译 者 序

H. Cramér 写这本书的目的，是要把数理统计学建立在现代数学的基础上，使能适应现代的要求．

要达到这样的目的，不可避免地要用到很多的现代数学，但作者知道，对读者的数学水平却又不能要求过高，这样就提出了要用多少和多高的数学准备知识的问题．关于这两个问题，作者凭着他多年的教学和科研经验，选取点集论、欧几里得空间内的测度论及积分论、Fourier 变换、矩阵论等列入第一部分作为本书的数学基础知识．凡具有相当于我国大学理工科二年级数学程度的读者都可以自己阅读．

第二部分包括近代概率论的基础知识．作者在这里着重两个方面：一方面强调概率的频率解释，另一方面侧重于离散型及连续型的概率分布．

第三部分才进入数理统计学．这一部分的选材是可以讨论的，但是总的说来，是经过作者郑重考虑的．这一部分如他在原序中所说，仅对抽样分布理论、统计估计及显著性检验等作了叙述．虽然这里集中讨论一些较重要的问题，但其中具体材料仍较丰富．此外，在讲解方面以及各部分的相互关系方面也处理得较好，而且一切需要证明的定理都一贯证到底．

本书在取材上也有某些不足之处．比如在内容方面，关于理论的叙述多，而实际的考虑过少，除了第 30 及 31 两章中有几个具体的例子外，在很有实用价值的方差分析中竟然一个例子也没有．

总之，这是一本数理统计学的理论著作，有一定的参考价值，但也同时存在着缺点．

本书译笔有欠通顺，致与原书颇多失真之处，如荷读者惠予批评指正，不胜感激之至。

译 者 谨志

原　序

在晚近二十五年中，統計科学①取得了巨大的进展．在此时期内，古典概率論已发展成为純粹的数学理論，从严密性来讲已达到了近代的水平．

本书的目的，是要綜合这两方面的发展而对以概率概念为基础的近代統計方法中的数学理論作一闡述．要充分理解这些方法的理論，要求有較高的純粹数学的知識．我是本着讀者只掌握了微积分、代数与解析几何的基本知識这一观点来写这本书的．

本书的第一部分，可視为一种数学引論．在这里，有一些数学知識对讀者可能是較为生疏而对于学习第二、第三部分又是必需的．其中特别以分布及关于一个分布的积分的基本概念为重点．在第四、第五两章中，对勒貝克測度和积分的理論作了簡单的叙述，作为分布及分布的积分等基本概念的一个引言．而在第六、第七两章中，則概述这些基本概念的直接推广．

本书的第二部分，包含了随机变量和概率分布的一般理論．第三部分則对抽样分布理論、統計估計及显著性検驗等作了闡述．最后一部分所討論的問題的选擇必然有些随意性，但我尽量集中討論一般的重要問題．当讀者已充分掌握这些知識后，就能够自己解决在应用中遇到的特殊問題了．为了給本书的篇幅以一个适当的限制，不得不舍弃我原来打算討論的某些很有兴趣的題目，例如随机过程的理論、統計时間序列及周期图．

統計検驗的理論可借用各种应用領域內的数字的例子来說明．限于篇幅，例題的数目必然要作很大的縮减．关于数值計算

① 这里的統計科学是指数理統計而言．——譯者注

实际步驟的問題，也必須不加討論.

要学习本书的其余部分，并不必要先学完整个第一部分. 讀者若急于要学习第二、第三部分，可先熟悉一下前面提到的那些基本概念. 为此，只須閱讀了第一至三章及4.1～4.2、5.1～5.3、6.1～6.2、6.4～6.6、7.1～7.2、7.4～7.5、8.1～8.4 諸节之后，即可开始閱讀第十三章，在閱讀过程中可随时参閱第一部分中的有关問題.

本书是以我自1930年以来在大学中的讲稿为基础，其中大部分是于1942～1944年写成. 由于战爭的原因，这些年中，在瑞典能用作参考的国外科学著作极不完备，而且得到的很迟. 因此，本书可能遺漏了一些应該引用的材料及参考文献.

H. 克拉美
斯德哥尔摩大学
数理統計系
1945年5月

目　录

第八至九章 $\boldsymbol{R}_n$ 中的测度与积分論

第十至十二章 各种有关知識

第二部分 随机变量与概率分布

第十三至十四章 基 础

第十五至二十章 R_1 中的变量与分布

第二十一至二十四章 R_n 中的变量与分布

第三部分 統計推断

第二十五至二十六章 一般概念

第二十七至二十九章 抽样分布

第三十五至三十七章 显著性检驗 II

第 一 部 分

数学的基础知識

第一至三章 点 集

第一章 集合的一般性质

1.1 集合 在純粹数学和应用数学中，我們常常会遇到要去研究具有某些特定性质的对象的总体的情形。这样定义了的任何对象的总体，我們称它为集合，每一个属于这种集合的对象，则称为集合的一个元素.

集合的元素可以是任意种类的对象：点，数，函数，事件，人等等. 例如(1)全体正整数組成的集合，(2)在一条給定的直綫上的全体的点組成的集合，(3)二个变量的全体有理函数組成的集合，(4)出生在某一国家而到1940年底还活着的人全体組成的集合. 在本书的第一部分，我們主要将討論元素是点或数的那种集合，但在这一章里，我們将从元素可以是任何种类的一般情况来考虑.

在上述例(4)中，虽然可能不知道集合中元素的个数，但可以知道它只包含有穷个元素，而在上述的前三个例子中，集合所包含的元素的个数显然不是有穷的. 因此，我們必須去区别有穷集合与无穷集合.

一个无穷集合，若其中的元素可以排列成一个序列：$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，且使得(a)每一个 x_n 均为集合的一个元素，及(b)集合中的每一个元素，均在这序列的一个确定的位置上出現，便叫做可数的．由这样的一种排列，我們可以建立起集合的元素与全体正整数 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ 組成的集合的元素之間的一一对应．由全体正整数組成的集合，即为可数集合的一个最簡单的例子．

以后我們将会知道存在着不可数的无穷集．从这样的集合中选出任意一列元素，总还有一些不在这序列中出現的元素留在集合中，因此，一个不可数集合可以說是較一个可数集合的无穷的阶为高的集合．以后我們可以知道，在一条給定直綫上的点的全体所組成的集合就是一个不可数集(見 4.3)．

1.2 子集，空間　假如有两个集合 S 和 S_1，S_1 中的每一个元素也属于 S，則称 S_1 是 S 的一个子集，且記为

$$S_1 \subset S \quad \text{或} \quad S \supset S_1.$$

有时，我們也称 S_1 包含在 S 中或 S_1 属于 S．——当 S_1 只含有一个元素 x 时，我們用記号 $x \in S$ 来表示 x 属于 S．

在特别的情形，即当关系 $S_1 \subset S$ 及 $S \subset S_1$ 同时成立时，則称这两个集合为相等，并且記为

$$S = S_1.$$

有时，为了便利起見，我們要考虑一个不含任何元素的集合 S．我們称这种集合为空集，且記为 $S=0$．空集是任意集合的一个子集．若視空集为有穷集合的一个特例，則易知有穷集合的任一子集亦为一有穷集合，而可数集合的任一子集为有穷集合或可数集合．例如由介于 20 到 30 之間的整数組成的集合是由全体正整数 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ 組成的集合的一个有穷子集，而由全体奇数 $1, 3, \cdots$ 組成的集合是它的一个可数子集．

在許多研究中，我們要涉及已給集合 S 的各种子集的性质和相互关系．这个包含了研究中出現的全部元素的集合 S，我們称

之为研究的空間. 例如, 假如我們要去考虑那些在一条直綫上的点所組成的不同的集合, 則我們可以取直綫上全部的点組成的集合 $\boldsymbol{S}$ 作为我們的空間. 空間 $\boldsymbol{S}$ 的任意子集 S, 簡称为 $\boldsymbol{S}$ 中的集合.

1.3 集合的运算　設空間 $\boldsymbol{S}$ 已經給定, 現在我們要考虑 $\boldsymbol{S}$ 中的不同集合. 首先, 我們来定义集合的加法、乘法和减法运算.

两个集合 S_1 及 S_2 之和是一个集合 S':

$$S'=S_1+S_2,$$

S' 是由至少属于集合 S_1 及 S_2 二者之一的所有元素所組成. 两个集合之积

$$S''=S_1S_2$$

是两个集合的共同部分, 或者說集合 S'' 是由同时属于 S_1 及 S_2 的所有的元素組成. 最后, 两个集合之差

$$S'''=S_1-S_2$$

仅当 S_2 是 S_1 的子集时才有定义, 因此集合 S''' 是由属于 S_1 但不属于 S_2 的全体元素組成.

例如, 若集合 S_1 及 S_2 各为曲綫 C_1 及 C_2 內部的点(見图1)所組成, 則 S_1+S_2 是由至少在这两条曲綫中的一条的內部的全体点所組成的集合, 而 S_1S_2 是由这两条曲綫的公共区域內的全体点所組成的集合.

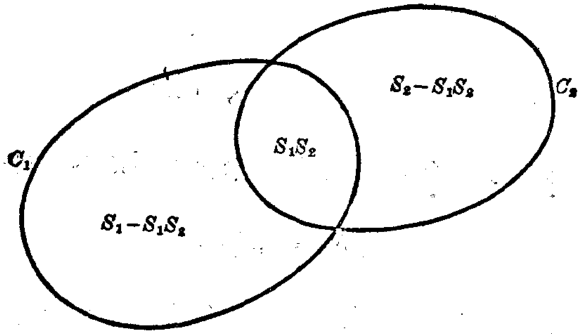

图1　集合的簡单运算

乘积 S_1S_2 显然同时是 S_1 及 S_2 的子集. 差 $S_n-S_1S_2$ ($n=1$ 或 2)是由属于 S_n 而不属 S_1S_2 的全体点所組成的集合.

在特别的情形,即当 S_1 及 S_2 无共同元素时,则其乘积是一个空集,于是有 $S_1S_2=0$. 另一方面,若 $S_1=S_2$,则差 S_1-S_2 是一个空集,即有 $S_1-S_2=0$.

在 S_2 为 S_1 的子集的特殊情形,则有 $S_1+S_2=S_1$ 及 $S_1S_2=S_2$.

由于和与积的定义的对称性,可知加法与乘法的运算是可交换的,即

$$S_1+S_2=S_2+S_1 \quad 及 \quad S_1S_2=S_2S_1.$$

我們还可以发現,类似于算术运算中的結合律与分配律,对于集合的运算也成立. 即

$$(S_1+S_2)+S_3=S_1+(S_2+S_3),$$
$$(S_1S_2)S_3=S_1(S_2S_3),$$
$$S_1(S_2+S_3)=S_1S_2+S_1S_3.$$

这样,我們可以說任意有穷个集合的和与乘积而不致含义不明:

$$S_1+S_2+\cdots+S_n \quad 及 \quad S_1S_2\cdots S_n,$$

此处,加項和乘积因子的次序可以任意排列.

我們还可将这两个运算的定义推广到加項个数或乘积因子个数为可数序列的情形. 为此,对于 **S** 中的已知集合序列 $S_1, S_2, \cdots$, 我們将其和

$$\sum_1^{\infty} S_\nu = S_1+S_2+\cdots$$

定义为由至少属于一个 S_ν 的全体元素組成的集合,而将其乘积

$$\prod_1^{\infty} S_\nu = S_1S_2\cdots$$

定义为由属于全部 S_ν 的元素所組成的集合. 于是有,例如,

$$S(S_1+S_2+\cdots)=SS_1+SS_2+\cdots.$$