

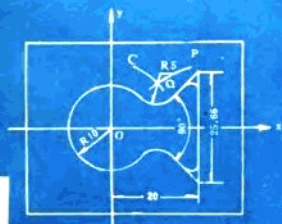
工人技术读物

技工应用数学

(下册)

周以铨 编

JIGONG YINGYONG SHUXUE



辽宁科学技术出版社

出版说明

为了适应社会主义现代化建设的迅速发展的需要，满足广大工人、特别是青年工人学习技术的要求，我们组织编辑车工、钳工、铆工、铣工、锻工、磨工、铸工、电工、电焊工、技工数学和技工应用物理、技工应用化学、技工应用数学等工人技术读物，并将陆续出版。

这套工人技术读物是由鞍钢机修总厂、大连造船厂、沈阳第一机床厂、沈阳风动工具厂、沈阳铸造厂、大连重型机器厂、大连电机厂、鞍钢修建部、沈阳松陵机械厂等单位分别编写的。内容切合实际，语言通俗易懂。可供工人、特别是青年工人业余学习和技工学校教学参考使用。

《技工应用数学》(下册)是一本结合生产实践，由浅入深的把中等数学应用到生产实践中去的工人技术读物。书中对各种概念叙述较为透彻，并附有很多例题，同时还注意了循序渐进的学习规律。在这本书的最后一篇中还讲解了电子数字计算机运算基础、集合代数、统筹方法、线性规划初步等的基本知识。

目 录

第三篇 三 角

第一章 锐角三角函数	1
第一节 直角三角形的边角关系	1
第二节 锐角与它的三角函数	6
第三节 30° 、 45° 、 60° 角的三角函数	8
第四节 互为余角的三角函数	12
第五节 同角三角函数间的关系	14
第六节 用线段表示三角函数	17
第七节 三角函数表的用法	21
内容提要	24
复习思考题	27
习 题	27
第二章 直角三角形解法	30
第一节 直角三角形解法	30
第二节 解直角三角形的应用	32
内容提要	48
复习思考题	48
习 题	49
第三章 0° 到 360° 角的三角函数	59
第一节 0° 到 360° 角的三角函数的定义	59

第二节	三角函数的符号	62
第三节	同角三角函数间的关系	63
第四节	0° 到 360° 角的三角函数值的变化	67
第五节	$180^\circ - \alpha$ 、 $180^\circ + \alpha$ 、 $360^\circ - \alpha$ 的三角函数	74
第六节	$90^\circ + \alpha$ 、 $270^\circ \pm \alpha$ 的三角函数	76
	内容提要	79
	复习思考题	81
	习 题	82
第四章	任意角三角函数	85
第一节	角的概念的普遍化	85
第二节	任意角三角函数	86
第三节	负角三角函数化为正角三角函数	88
第四节	任意角三角函数化为锐角三角函数	90
第五节	三角函数的周期性	93
第六节	三角函数的图象及性质	95
	内容提要	101
	复习思考题	104
	习 题	105
第五章	复角三角函数	107
第一节	二角和及差的三角函数	107
第二节	倍角与半角的三角函数	113
第三节	三角函数的和差化积与积化和差	119
	内容提要	122
	复习思考题	124
	习 题	124
第六章	任意三角形解法	127
第一节	三内角间的函数关系	127

第二节 正弦定理及其应用	128
第三节 余弦定理及其应用	137
内容提要	148
复习思考题	149
习 题	149
第七章 反三角函数和简单三角方程	156
第一节 反三角函数及其多值性	156
第二节 反正弦函数	158
第三节 反余弦函数	163
第四节 反正切函数	166
第五节 反余切函数	171
第六节 最简三角方程	175
第七节 简单三角方程	181
内容提要	186
复习思考题	188
习 题	189

第四篇 平面解析几何

第一章 直 线	192
第一节 几个基本问题	192
第二节 直线的方程	202
第三节 两直线的相互关系	209
第四节 直线型经验公式	219
内容提要	226
复习思考题	228
习 题	229
第二章 圆锥曲线	235
第一节 圆	236

第二节 椭圆	246
第三节 双曲线	257
第四节 抛物线	273
内容提要	296
复习思考题	298
习 题	299
第三章 坐标变换	309
第一节 坐标变换的一般概念	309
第二节 二次方程的化简与判别	321
内容提要	327
复习思考题	328
习 题	329
第四章 参数方程	332
第一节 参数方程	332
第二节 利用参数求轨迹的方程	340
内容提要	349
复习思考题	351
习 题	351
第五章 极坐标	354
第一节 极坐标系	354
第二节 曲线的极坐标方程	361
第三节 极坐标方程的图形	373
内容提要	378
复习思考题	380
习 题	381

第五篇 应用数学

第一章 电子数字计算机运算基础	386
-----------------------	-----

第一节 电子计算机的计数系统	386
第二节 电子计算机中的运算方法	405
内容提要	437
复习思考题	441
习 题	441
第二章 集合代数	443
第一节 集合	443
第二节 集合代数	448
内容提要	457
复习思考题	459
习 题	459
第三章 线性规划初步	462
第一节 工业材料的合理下料问题	463
第二节 生产能力的合理分配问题	472
内容提要	481
复习思考题	483
习 题	483
第四章 统筹方法	486
第一节 统筹方法的基本内容	486
第二节 人力和物资的配置	498
内容提要	509
复习思考题	512
习 题	512
附 表	
附表一 正、余弦函数表	513
附表二 正、余切函数表	516

第三篇 三角

第一章 锐角三角函数

大家都很熟悉勾股定理，它是论证在任意直角三角形中，三条边之间存在着的一定的运算关系，已知其中任两条的大小即可求得另一条。由于实践中经常遇到三角形或直角三角形，所以勾股定理有着广泛地应用。三角形或直角三角形，除了三条边外还有三个内角等等，若能找到边和角的内在联系，则解决实际问题的能力将更强，应用的范围将更广。三角学就是研究三角形中边和角的内在联系的科学。我们先来研究直角三角形中边和角的内在联系。

第一节 直角三角形的边角关系

如图1-1中，在 α 角的一边 AN 上任取两点 B 和 B' ，分别引 BC 与 $B'C'$ 垂直于 α 角的另一边 AM ，则得到直角 $\triangle ABC$

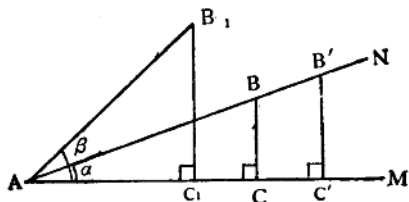


图1-1

和直角 $\triangle AB'C'$ ，且 $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ ，于是有

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \text{一定的数,}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \text{一定的数,}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \text{一定的数,}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC'}{B'C'} = \text{一定的数,}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \text{一定的数,}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'} = \text{一定的数.}$$

上述每个等式两边的分子、分母都不等，但其比值却相等，这就说明当角一定时，角的两边任意延长，所成的直角三角形的每两边的比值是不变的，是唯一确定的数。当角改变时，如图 1—1 中 β 角所构成的直角 $\triangle AB_1C_1$ 则每两边的比值也就随着改变。因此说，直角三角形中每两边的比值是随着锐角 α 的变化而变化的。锐角 α 叫做自变量，每两边的比叫做自变量 α 的三角函数。因为直角三角形有三条边，各两两的比共有六个，所以说，任一锐角 α 有六个锐角三角函数。它们反映出直角三角形中边和角的内在联系。在任意直角 $\triangle ABC$ 中，如图 1—2，为了便于讨论，我们记 α 角的对边长为 a ，邻边长为 b ，斜边长为 c ，则锐

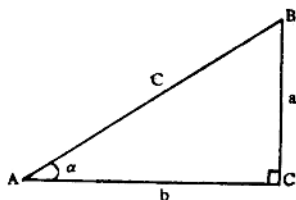


图 1—2

角 α 的六个三角函数分别为： $\frac{a}{c}$ 、 $\frac{b}{c}$ 、 $\frac{a}{b}$ 、 $\frac{b}{a}$ 、 $\frac{c}{b}$ 、 $\frac{c}{a}$ 。为便于研究，分别给取了名字（至于为什么这么叫以后再介绍），

α 角的正弦 = $\frac{\alpha \text{ 角的对边}}{\text{斜边}}$ ，写成

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad (\text{读作赛因 } \alpha) ;$$

α 角的余弦 = $\frac{\alpha \text{ 角的邻边}}{\text{斜边}}$ ，写成

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad (\text{读作柯赛因 } \alpha) ;$$

α 角的正切 = $\frac{\alpha \text{ 角的对边}}{\alpha \text{ 角的邻边}}$ ，写成

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad (\text{读作探金特 } \alpha) ;$$

α 角的余切 = $\frac{\alpha \text{ 角的邻边}}{\alpha \text{ 角的对边}}$ ，写成

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \quad (\text{读作柯探金特 } \alpha) ;$$

α 角的正割 = $\frac{\text{斜边}}{\alpha \text{ 角的邻边}}$ ，写成

$$\sec \alpha = \frac{c}{b} \quad (\text{读作赛根特 } \alpha) ;$$

α 角的余割 = $\frac{\text{斜边}}{\alpha \text{ 角的对边}}$ ，写成

$$\operatorname{csc} \alpha = \frac{c}{a} \quad (\text{读作柯赛根特 } \alpha) .$$

例 1 写出如图 1—3 所示的直角 $\triangle ABC$ 中的 $\sin A$ ；
 $\sin B$ ； $\cos A$ ； $\cos B$ ； $\operatorname{tg} A$ ；

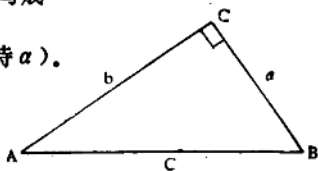


图 1—3

$\operatorname{tg} B$; $\operatorname{ctg} A$; $\operatorname{ctg} B$; $\sec A$; $\sec B$; $\csc A$; $\csc B$.

$$\text{解 } \sin A = \frac{a}{c}; \quad \sin B = \frac{b}{c};$$

$$\cos A = \frac{b}{c}; \quad \cos B = \frac{a}{c};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a};$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}; \quad \operatorname{ctg} B = \frac{a}{b};$$

$$\sec A = \frac{c}{b}; \quad \sec B = \frac{c}{a};$$

$$\csc A = \frac{c}{a}; \quad \csc B = \frac{c}{b}.$$

例2 已知直角 $\triangle ABC$ 中 (图 1-4) 两条边的比为 $\frac{b}{c}$ 和 $\frac{a}{c}$, 试分别写出它们是哪一个角的正弦, 又是哪一个角的余弦?

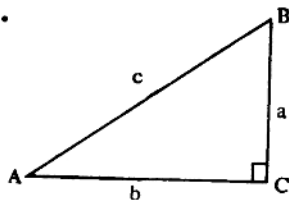


图 1-4

$$\text{解 } \frac{b}{c} = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \sin B;$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \cos A;$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \sin A;$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\angle B \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \cos B.$$

例3 写出如图1—5所示直角 $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 的六个三角函数。

解 $\sin B = \frac{AC}{AB}$;

$$\cos B = \frac{BC}{AB}$$
;

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$$
;

$$\operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC}$$
;

$$\sec B = \frac{AB}{BC}; \quad \csc B = \frac{AB}{AC}.$$

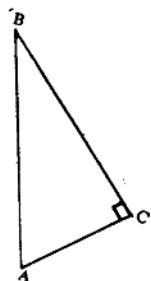


图1—5

例4 直角 $\triangle ABC$ 的斜边 c 长15厘米，直角边 b 长12厘米，求直角边 a 所对锐角 A 的三角函数（图1—6）。

解 由勾股定理 $a^2 = c^2 - b^2$ 知 $a = 9$ ，

所以 $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$;

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$
;

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$
;

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$
;

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$
;

$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

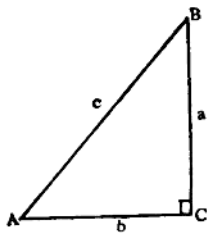


图1—6

第二节 锐角与它的三角函数

知道了锐角三角函数的定义以后，自然会引起下面的问题：已知一锐角，怎样算出它的三角函数值和已知一锐角的三角函数值，怎样作出这个锐角。我们举例说明如下：

例1 求 35° 角的三角函数值。

解 用量角器作一个 35° 的角 A (图 1-7)。过 $\angle A$ 的一边上任意一点 B ，例如取 $AB = 10$ 厘米，向另一边作垂线 BC ，尽可能准确地量出直角 $\triangle ABC$ 的其它两边的长，得 $BC = 5.7$ 厘米， $AC = 8.2$ 厘米。

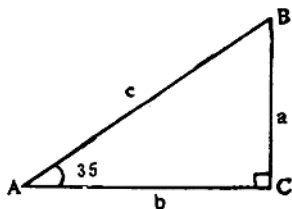


图 1-7

于是我们就可以把测量和计算的结果写成下面的形式：

$$\angle A = 35^\circ, a = 5.7, b = 8.2, c = 10.$$

$$\sin 35^\circ = \frac{a}{c} = \frac{5.7}{10} = 0.57,$$

$$\cos 35^\circ = \frac{b}{c} = \frac{8.2}{10} = 0.82,$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{a}{b} = \frac{5.7}{8.2} = 0.70,$$

$$\operatorname{ctg} 35^\circ = \frac{b}{a} = \frac{8.2}{5.7} = 1.4,$$

$$\sec 35^\circ = \frac{c}{b} = \frac{10}{8.2} = 1.2,$$

$$\operatorname{csc} 35^\circ = \frac{c}{a} = \frac{10}{5.7} = 1.7.$$

因为我们量 a 和 b 的长，都只量出两位有效数字，所以运算结果也只有开头两位是有效数字，以下就四舍五入。

例 2 已知一锐角的正切等于 $\frac{2}{3}$ ，求作这个锐角。

解 作任意直线 MC (图 1-8)，过 C 作 $CN \perp MC$ 。在 CN 上取 CB 等于两个单位，在 CM 上取 CA 等于三个单位，连 AB 。则 $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$ ， $\angle BAC$ 即为

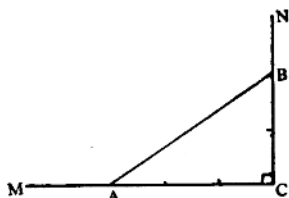


图 1-8

所求的锐角。用量角器可以量得这个角约等于 $33^\circ 40'$ 。

例 3 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ ，求这个锐角。

解 作直线 CM (图 1-9)，过 C 作 $CN \perp CM$ ，在 CN 上取 CB 等于三个单位，以 B 为圆心，四个单位长为半径作弧交 CM 于 A ，连 AB ，则

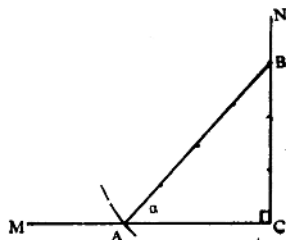


图 1-9

$$\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4},$$

$\angle BAC$ 即为所求的锐角 α 。

用量角器可以量得这个角约等于 $48^\circ 36'$ 。

例 4 已知 $\cos \alpha = 0.4$ ，求这个锐角 α 。

解 $0.4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 。

在任意直线 CN 上 (图 1—10) 取 AC 等于两个单位, 过 C 作 $CM \perp AC$, 以 A 为圆心, 五个单位长作半径, 画弧交 CM 与 B , 连 AB , 则

$$\cos \angle BAC = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{5},$$

$\angle BAC$ 即为所求的锐角 α 。

用量角器可以量得这个角约等于 $23^\circ 35'$ 。

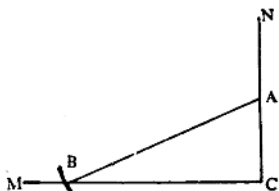


图 1—10

例 5 已知 $\operatorname{ctg} \alpha = 2$, 求这个锐角 α 。

解 在任意直线 CN 上 (图 1—11) 取 AC 等于两个单位长, 过 C 作 $CM \perp AC$, 在 CM 上取 CB 等于一个单位长, 连 AB , 则

$$\operatorname{ctg} \angle BAC = \frac{AC}{BC} = 2,$$

$\angle BAC$ 即为所求的锐角 α 。

用量角器可以量得这个角约等于 $26^\circ 35'$ 。

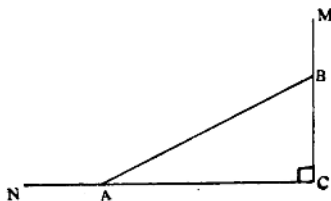


图 1—11

第三节 30° 、 45° 、 60° 角的三角函数

在上一节例 1 中, 我们已经看到, 当已知一个锐角的度数, 要找出它的三角函数时, 可以用画图的方法来解决。当然, 这样做, 我们只能求得近似值。但是, 30° 、 45° 、 60° 角的三角函数, 却可以利用几何学中的有关简单性质来求出它们的准确值。

(一) 30° 和 60° 角的三角函数值

作直角 $\triangle ABC$ ，使 $\angle A = 30^\circ$ （图 1—12），那么另一个锐角 $\angle B$ 一定是 60° 。

根据几何定理知道：
 30° 的角所对的直角边等于斜边的一半。设 $a = 1$ ，则 $c = 2$ ， $b = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$ 。
由此得

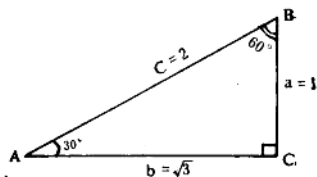


图 1—12

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$

同时也可以得到：

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(二) 45° 角的三角函数值

作直角 $\triangle ABC$ ，使 $\angle A = 45^\circ$ （图 1—13），这样的直角三角形是等腰的。

设 $a = b = 1$ ，则 $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 。

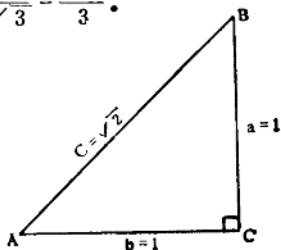


图 1—13

锐角的六个三角函数中，前四个用得较广，应着重记忆。

由此得:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707,$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707,$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1, \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

30° 、 45° 、 60° 角的三角函数值应用很广，必须熟记，兹列表于下，以便查考和记忆：

角 \ 函数	$30^\circ = \left(\frac{1}{6}\pi\right)$	$45^\circ = \left(\frac{1}{4}\pi\right)$	$60^\circ = \left(\frac{1}{3}\pi\right)$	
				$\frac{1}{2}\sqrt{1}$ 即 $\frac{1}{2}$
sin	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{2} = 1.4142$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\sqrt{3} = 1.7321$
tg	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.8660$

例 1 求下列各式的值：

(1) $2\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$;

(2) $\sin^2 45^\circ - \cos^2 30^\circ$.

解 (1) $2\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 1$$

$$= 3\frac{1}{2},$$

$\sin^2 a = (\sin a)^2$ 、 $\cos^2 a = (\cos a)^2$ 、 $\operatorname{tg}^2 a = (\operatorname{tg} a)^2$ 等，这是一种规定，必须这样写。