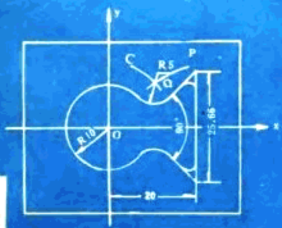
工人技术读物

技工应用数学

（下册）

周以铨 编

JIGONG YINGYONG SHUXUE



辽宁科学技术出版社

出版说明

为了适应社会主义现代化建设的迅速发展的需要，满足广大工人、特别是青年工人学习技术的要求，我们组织编辑车工、钳工、铆工、铣工、锻工、磨工、铸工、电工、电焊工、技工数学和技工应用物理、技工应用化学、技工应用数学等工人技术读物，并将陆续出版。

这套工人技术读物是由鞍钢机修总厂、大连造船厂、沈阳第一机床厂、沈阳风动工具厂、沈阳铸造厂、大连重型机器厂、大连电机厂、鞍钢修建部、沈阳松陵机械厂等单位分别编写的。内容切合实际，语言通俗易懂。可供工人、特别是青年工人业余学习和技工学校教学参考使用。

《技工应用数学》（下册）是一本结合生产实践，由浅入深的把中等数学应用到生产实践中去的工人技术读物。书中对各种概念叙述较为透彻，并附有很多例题，同时还注意了循序渐进的学习规律。在这本书的最后一篇中还讲解了电子数字计算机运算基础、集合代数、统筹方法、线性规划初步等的基本知识。

目　录

第三篇　三　角

第四篇　平面解析几何

第三篇　三　角

第一章　锐角三角函数

大家都很熟悉勾股定理，它是论证在任意直角三角形中，三条边之间存在着的一定的运算关系，已知其中任两条的大小即可求得另一条。由于实践中经常遇到三角形或直角三角形，所以勾股定理有着广泛地应用。三角形或直角三角形，除了三条边外还有三个内角等等，若能找到边和角的内在联系，则解决实际问题的能力将更强，应用的范围将更广。三角学就是研究三角形中边和角的内在联系的科学。我们先来研究直角三角形中边和角的内在联系。

第一节　直角三角形的边角关系

如图1—1中，在α角的一边AN上任取两点B和B'，分别引BC与$B'C'$垂直于α角的另一边AM，则得到直角$\triangle ABC$

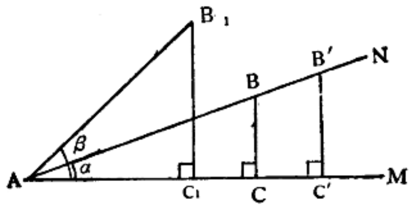


图1—1

和直角$\triangle AB'C'$，且$\triangle ABC\backsim\triangle AB'C'$，于是有

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\text{一定的数};$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\text{一定的数};$$

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}=\text{一定的数};$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AC'}{B'C'}=\text{一定的数};$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}=\text{一定的数};$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'}=\text{一定的数}.$$

上述每个等式两边的分子、分母都不等，但其比值却相等，这就说明当角一定时，角的两边任意延长，所成的直角三角形的每两边的比值是不变的，是唯一确定的数。当角改变时，如图1—1中β角所构成的直角$\triangle AB_1C_1$则每两边的比值也就随着改变。因此说，直角三角形中每两边的比值是随着锐角α的变化而变化的。锐角α叫做自变量，每两边的比叫做自变量α的三角函数。因为直角三角形有三条边，各两两的比共有六个，所以说，任一锐角α有六个锐角三角函数。它们反映出直角三角形中边和角的内在联系。在任意直角$\triangle ABC$中，如图1—2，为了便于讨论，我们记α角的对边长为a，邻边长为b，斜边长为c，则锐

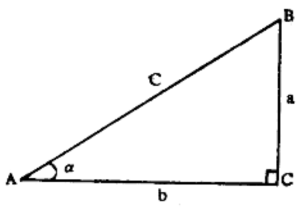


图1—2

角 α 的六个三角函数分别为：$\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{b}$、$\frac{c}{a}$。为便于研究，分别给取了名字（至于为什么这么叫以后再介绍）：

α 角的正弦 $=\frac{\alpha\text{角的对边}}{\text{斜　边}}$，写成

$\sin\alpha=\frac{a}{c}$（读作赛因 α）；

α 角的余弦 $=\frac{\alpha\text{角的邻边}}{\text{斜　边}}$，写成

$\cos\alpha=\frac{b}{c}$（读作柯赛因 α）；

α 角的正切 $=\frac{\alpha\text{角的对边}}{\alpha\text{角的邻边}}$，写成

$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a}{b}$（读作探金特 α）；

α 角的余切 $=\frac{\alpha\text{角的邻边}}{\alpha\text{角的对边}}$，写成

$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{b}{a}$（读作柯探金特 α）；

α 角的正割 $=\frac{\text{斜　边}}{\alpha\text{角的邻边}}$，写成

$\sec\alpha=\frac{c}{b}$（读作赛根特 α）；

α 角的余割 $=\frac{\text{斜　边}}{\alpha\text{角的对边}}$，写成

$\csc\alpha=\frac{c}{a}$（读作柯赛根特 α）。

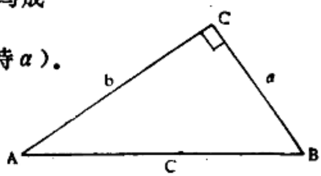


图 1—3

例 1　写出如图 1—3 所示的直角 $\triangle ABC$ 中的 $\sin A$；$\sin B$；$\cos A$；$\cos B$；$\mathrm{tg}\,A$；

$\operatorname{tg} B$；$\operatorname{ctg} A$；$\operatorname{ctg} B$；$\sec A$；$\sec B$；$\csc A$；$\csc B$。

解 $\sin A=\frac{a}{c}$； $\sin B=\frac{b}{c}$；

$\cos A=\frac{b}{c}$； $\cos B=\frac{a}{c}$；

$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$； $\operatorname{tg} B=\frac{b}{a}$；

$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}$； $\operatorname{ctg} B=\frac{a}{b}$；

$\sec A=\frac{c}{b}$； $\sec B=\frac{c}{a}$；

$\csc A=\frac{c}{a}$； $\csc B=\frac{c}{b}$。

例 2 已知直角 $\triangle ABC$ 中（图 1—4）两条边的比为 $\frac{b}{c}$ 和 $\frac{a}{c}$，试分别写出它们是哪一个角的正弦，又是哪一个角的余弦？

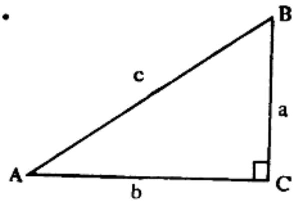


图 1—4

解 $\frac{b}{c}=\frac{\angle B\text{的对边}}{\text{斜　边}}=\sin B$；

$\frac{b}{c}=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜　边}}=\cos A$；

$\frac{a}{c}=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜　边}}=\sin A$；

$\frac{a}{c}=\frac{\angle B\text{的邻边}}{\text{斜　边}}=\cos B$。

例 3　写出如图 1—5 所示直角△ABC中∠B的六个三角函数。

解　$\sin B=\dfrac{AC}{AB}$;

$\cos B=\dfrac{BC}{AB}$;

$\operatorname{tg} B=\dfrac{AC}{BC}$;

$\operatorname{ctg} B=\dfrac{BC}{AC}$;

$\sec B=\dfrac{AB}{BC}$;　$\csc B=\dfrac{AB}{AC}$.

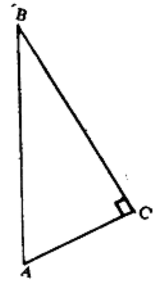


图 1—5

例 4　直角△ABC 的斜边 c 长15厘米，直角边 b 长 12 厘米，求直角边 a 所对锐角A的三角函数（图 1—6）.

解　由勾股定理　$a^2=c^2-b^2$　知$a=9$,

所以 $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$;

$\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$;

$\operatorname{tg} A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$;

$\operatorname{ctg} A=\dfrac{b}{a}=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$;

$\sec A=\dfrac{c}{b}=\dfrac{15}{12}=\dfrac{5}{4}$;

$\csc A=\dfrac{c}{a}=\dfrac{15}{9}=\dfrac{5}{3}$.

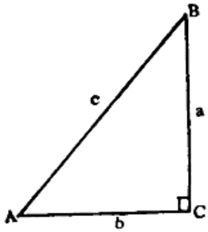


图 1—6

第二节　锐角与它的三角函数

知道了锐角三角函数的定义以后，自然会引起下面的问题：已知一锐角，怎样算出它的三角函数值和已知一锐角的三角函数值，怎样作出这个锐角。我们举例说明如下：

例1　求 35°角的三角函数值。

解　用量角器作一个35°的角A（图1—7）。过$\angle A$的一边上任意一点B，例如取$AB=10$厘米，向另一边作垂线BC，尽可能准确地量出直角$\triangle ABC$的其它两边的长，得$BC=5.7$厘米，$AC=8.2$厘米。

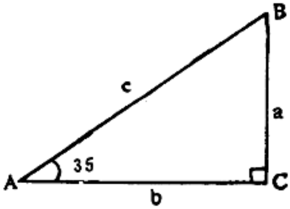


图1—7

于是我们就可以把测量和计算的结果写成下面的形式：

$\angle A=35°$，$a=5.7$，$b=8.2$，$c=10$。

$$\sin 35° = \frac{a}{c} = \frac{5.7}{10} = 0.57;$$

$$\cos 35° = \frac{b}{c} = \frac{8.2}{10} = 0.82;$$

$$\operatorname{tg} 35° = \frac{a}{b} = \frac{5.7}{8.2} = 0.70;$$

$$\operatorname{ctg} 35° = \frac{b}{a} = \frac{8.2}{5.7} = 1.4;$$

$$\sec 35° = \frac{c}{b} = \frac{10}{8.2} = 1.2;$$

$$\csc 35° = \frac{c}{a} = \frac{10}{5.7} = 1.7.$$

因为我们量 a 和 b 的长，都只量出两位有效数字，所以运算结果也只有开头两位是有效数字，以下就四舍五入。

例 2　已知一锐角的正切等于$\frac{2}{3}$，求作这个锐角。

解　作任意直线MC（图1—8），过C作$CN\perp MC$。在CN上取CB等于两个单位，在CM上取CA等于三个单位，连AB。则 $\text{tg}\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{3}$，$\angle BAC$即为所求的锐角。用量角器可以量得这个角约等于$33°40'$。

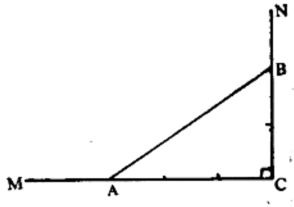


图 1—8

例 3　已知 $\sin\alpha=\frac{3}{4}$，求这个锐角。

解　作直线CM（图1—9），过C作$CN\perp CM$，在CN上取CB等于三个单位，以B为圆心，四个单位长为半径作弧交CM于A，连AB，则

$$\sin\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{4},$$

$\angle BAC$即为所求的锐角α。

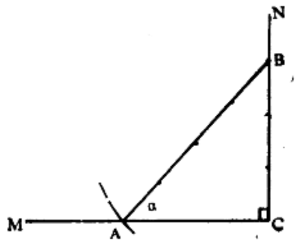


图 1—9

用量角器可以量得这个角约等于$48°36'$。

例 4　已知　$\cos\alpha=0.4$，求这个锐角α。

解　$0.4=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$。

在任意直线 CN 上（图1—10）取 AC 等于两个单位，过 C 作 $CM\perp AC$，以 A 为圆心，五个单位长作半径，画弧交 CM 与 B，连 AB，则

$$\cos\angle BAC=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{5},$$

$\angle BAC$ 即为所求的锐角 α。

用量角器可以量得这个角约等于23°35′。

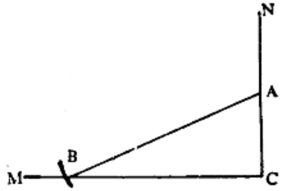


图1—10

例5　已知 $\operatorname{ctg}\alpha=2$，求这个锐角 α。

解　在任意直线 CN 上（图1—11）取 AC 等于两个单位长，过 C 作 $CM\perp AC$，在 CM 上取 CB 等于一个单位长，连 AB，则

$$\operatorname{ctg}\angle BAC=\frac{AC}{BC}=2,$$

$\angle BAC$ 即为所求的锐角 α。

用量角器可以量得这个角约等于26°35′。

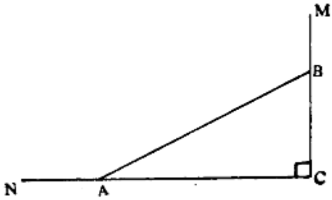


图1—11

第三节　30°、45°、60°角的三角函数

在上一节例1中，我们已经看到，当已知一个锐角的度数，要找出它的三角函数时，可以用画图的方法来解决。当然，这样做，我们只能求得近似值。但是，30°、45°、60°角的三角函数，却可以利用几何学中的有关简单性质来求出它们的准确值。

（一）30°和60°角的三角函数值

作直角$\triangle ABC$，使$\angle A=30°$（图1—12），那么另一个锐角$\angle B$一定是60°。

根据几何定理知道：30°的角所对的直角边等于斜边的一半。设$a=1$，则$c=2$，$b=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$。由此得

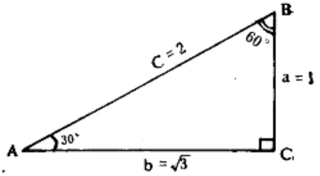


图1—12

$$\sin 30°=\frac{1}{2}；\quad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}；$$

$$\operatorname{tg} 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}；\ \operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3}。$$

同时也可以得到：

$$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}；\ \cos 60°=\frac{1}{2}；$$

$$\operatorname{tg} 60°=\sqrt{3}；\quad \operatorname{ctg} 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}。$$

（二）45°角的三角函数值

作直角$\triangle ABC$，使$\angle A=45°$（图1—13），这样的直角三角形是等腰的。

设　$a=b=1$，则

$$c=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}。$$

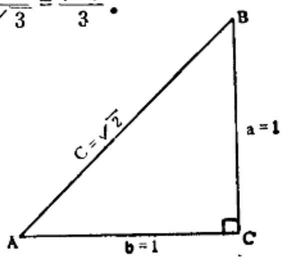


图1—13

锐角的六个三角函数中，前四个用得较广，应着重记忆。

由此得：

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707;$$

$$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707;$$

$\operatorname{tg}45^\circ=1$； $\operatorname{ctg}45^\circ=1$。

30°、45°、60° 角的三角函数值应用很广，必须熟记，兹列表于下，以便查考和记忆：

函数＼角	$30^\circ=\left(\frac{1}{6}\pi\right)$	$45^\circ=\left(\frac{1}{4}\pi\right)$	$60^\circ=\left(\frac{1}{3}\pi\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$ 即 $\frac{1}{2}$
sin	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}=1.4142$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\sqrt{3}=1.7321$
tg	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}=0.7071$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}=0.8660$

例 1　求下列各式的值：

（1） $2\sin30^\circ+3\cos60^\circ+\operatorname{tg}45^\circ$；

（2） $\sin^2 45^\circ-\cos^2 30^\circ$。

解　（1） $2\sin30^\circ+3\cos60^\circ+\operatorname{tg}45^\circ$

$$=2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2}+1$$

$$=3\frac{1}{2};$$

$\sin^2\alpha=(\sin\alpha)^2$、$\cos^2\alpha=(\cos\alpha)^2$、$\operatorname{tg}^2\alpha=(\operatorname{tg}\alpha)^2$ 等，这是一种规定，必须这样写。