

信号检测的统计理论

(修改增补第二版)

Carl W. Helstrom 著

刘武陈采合译

北京邮电学院

1980年1月

译 者 前 言

从需要来看，信息论和通信理论方面的某些课程为通信、雷达、遥测遥控、空间电子学或其他无线电专业学生必修的课程。当前对于教材的选编工作是十分繁重的，特别是考虑到本科高年级和研究生两种班级时。我们认为在近期解决这个问题的办法之一是使一本教科书通过选择内容兼用于本科和研究生班，同时国外教科书中适宜于在我国应用的，也可以直接或经过翻译后选用它们。从培养部分教师的角度出发，后者也有一定作用。这就是我们翻译这本书的理由。

本书1960年第一版于1965年由科学出版社出版过中译本，早已脱销。第二版已经过部分改写和增加了新的内容，所以必须重译。第二版是1968年出版，并在1975年重印过的。

这个中译本拟作为我院研究生一或二年级和本科某些专业四年级的“信号检测理论”或类似课程的试用教材。对于本科生我们建议以第一、二、三章和第四章的一部分为基本内容，结合专业需要，选择少量的后续部分。对于研究生也须作适当的选择。这样，本书的一部分（对本科生说是大部分）将留给他们以后自己阅读。特别指出这一点是为了表明我们对教科书编写的一个观点，当然它可能是欠妥当的。这本书对于相关的科技工作者，特别是工程师们，也是有阅读价值的，作者在他的序文中已经有所说明。

本书在翻译过程中参考了第一版的部分译文，谨在此对原译者陈宗鹭教授等致谢。

刘 武 陈 采
于北京邮电学院
1979年9月

著者第二版序

一本技术书籍不能热望成为 $\kappa\tau\eta\mu\alpha\ \acute{\epsilon}\zeta\ \alpha\iota\epsilon\iota$ ，“永恒不变是一种梦境或痴心妄想”。一本书的有效生命不过几年，而不可阻挡的发展将使我们落后。对于这个新版本也不能寄予长期不受淘汰的希望。

尽管如此，本书的大部分已经过改写。原来的论题作了较精炼的处理，讨论了新的课题。对数字通信增加了一章，对序贯和非参量检测增加了几节。现在的新版中每章末都附有习题。

在每章末的文献目录中即列出了材料的主要来源，也列出了读者在作进一步研究时可以阅读的书籍和论文的题目。没有企图使文献目录成为完备的，也不应该认为未列入的文献就是不受重视的。对于寻求更多参考文献者，我们提供下列线索：

Stumpers, F.H.L.M., "A Bibliography of Information Theory; Communication Theory-Cybernetics". Trans. I.R.E. PGIT-2, 1-60 (Nov. 1953); IT-1, 31-47 (Sept. 1955); IT-3, 150-66 (June 1957); IT-6, 25-51 (March 1960).

Chessin, P.L., "A Bibliography on Noise", Trans. I.R.E. IT-1, 15-31 (Sept. 1955).

Green, P.E., Jr., "A Bibliography of Soviet Literature on Noise, Correlation, and Information Theory", Trans. I.R.E. IT-2, 91-94 (June 1956).

Green, P.E., Jr., "Information Theory in the U.S.S.R.", IRE Wescon Record, pt. 2, 67-83 (1957).

Middleton, D., An Introduction to Statistical Communication Theory, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y. (1960)

Elias, P., et al., "Progress in Information Theory in the U.S.A., 1957-1960" Trans. I.R.E. IT-7, 128-44 (July 1961).

Zadeh, L.A. (ed), "Report on Progress in Information Theory in the U.S.A., 1960-1963", Trans. I.E.E.E. IT-9, 221-64 (Oct. 1963).

在本书中引用的文献由作者的姓名和发表年代指明。引用公式由章、节的次序指示，例如“式(3-2.10)”表示第三章第2节第10个公式，但对同一章内的公式将省去第一个数字。

本书的大部分对于电机工程，数学和物理方面的一年级研究生应该是易懂的。读者须具有概率论导论的课程基础。对于数学上的特别课题，例如积分方程和 Gram-Charlier 级数等在需要时介绍。对于只要求对基本理论作轮廓性了解的读者，可阅读前四章，并略去下列各节：第一章3、4、5、6节；第二章第6节；第四章3、4、5节。注有星号*的各节在初读时可略去。

信号检测在应用于物理和电机工程的同时，也有助于对人类知觉的研究，不过这个课题已出了本书的范围。对于这个题目的一般了解，读者可参考《信号检测理论和精神物理学》

目 录

译者前言	(1)
著者第二版序	(2)
著者第一版序摘录	(4)
第一章 信号和滤波器	(1)
1. 信号及其频谱	(2)
2. 滤波器	(3)
3. 窄带信号	(7)
4. 窄带滤波器	(10)
5. 测不准关系	(12)
6. 滤波器的综合	(16)
习题	(19)
参考文献	(20)
第二章 噪声	(23)
1. 随机过程和它们的分布	(23)
2. 谱密度	(27)
3. 两类噪声	(33)
4. 高斯随机过程	(37)
5. 噪声物理	(41)
6. 窄带噪声	(46)
习题	(51)
参考文献	(53)
第三章 假设检验	(56)
1. 信号检测和统计学	(56)
2. 一次测量的简单假设检验	(57)
3. 多次测量的简单假设检验	(65)
习题	(71)
参考文献	(72)
第四章 已知信号的检测	(74)
1. 白色高斯噪声中的检测	(74)
2. 匹配滤波器	(80)
3. 有色噪声中的检测	(83)
4. Karhunen-Loève 展开式	(89)

5. 积分方程的解.....	(95)
习题	(102)
参考文献	(104)
第五章 未知相位信号的检测	(108)
1. 复合假设检验	(108)
2. 未知相位信号的检测	(117)
3. 未知相位信号的可检测性	(120)
4. 未知幅度和相位信号的检测	(125)
5. 未知幅度、相位和到达时刻的信号	(126)
习题	(131)
参考文献	(132)
第六章 数字通信	(134)
1. 离散信息的传输	(134)
2. 二进信道	(136)
3. 多于两个信号的信道	(141)
4. 重迭脉冲的接收	(146)
习题	(150)
参考文献	(151)
第七章 用多次观察的检测	(153)
1. 一定数目的信号的检测	(153)
2. 平方律阈检测器的检定概率	(157)
3. 序贯检测	(169)
习题	(178)
参考文献	(179)
第八章 信号参量的估计	(182)
1. 估计理论	(182)
2. 估计信号的参量	(191)
3. 信号到达时刻的估计	(200)
4. 信号到达时刻和载波频率的估计	(204)
习题	(209)
参考文献	(210)
第九章 具有未知参量的信号检测	(212)
1. 极大似然检测	(212)
2. 未知到达时刻的信号检测	(215)
3. 未知到达时刻和载波频率的信号检测	(227)
4. 非参量检测	(229)
习题	(240)
参考文献	(242)
第十章 信号分辨	(245)

1. 接收机的规格	(245)
2. 信号的规格	(256)
3. 杂乱回波中信号的检测	(265)
习题	(270)
参考文献	(270)
第十一章 随机信号	(273)
1. 接收机的结构	(273)
2. 接收机的性能	(286)
3. 总结	(299)
习题	(301)
参考文献	(302)
附录	(304)
A. 积分变换	(304)
B. 特征函数	(310)
C. 随机过程的傅里叶系数的协方差	(315)
D. 圆高斯密度函数	(315)
E. 积分方程的解	(318)
F. Q 函数	(328)
G. 具有随机相位的两个非正交信号的信道的错误概率	(332)
索引	(335)

第一章 信号和滤波器

雷达是用来发现远距离目标如飞机和船只等的一种设备。它的发射机产生波长为几厘米的高幅度窄脉冲形式的电磁能,通过天线周期性地把这些电磁能以相当窄的射束辐射到空间。在这射束内的物体将电磁能辐射向四面八方散射,其中一小部分向发射方向返回,激励接收机的天线,在接收机中产生一个信号,经放大后加到阴极射线示波器的垂直偏转板上。

示波器的荧光面上由一个光点迅速地自左向右运动,当有回波脉冲被接收到时,就会出现一个高度与信号强度成比例的垂直脉冲尖。示波器的水平扫描速度由发送脉冲同步,从一个固定目标返回的回波信号总是出现在示波器的相同位置上。扫描起始点到回波脉冲尖的空间间隔正比于发送脉冲到达目标和返回的行程时间,而这个时间又正比于到目标的距离。

因为回波信号的能量与距离的四次方成反比,从远距离目标返回来的回波信号的能量可能是非常小的。可能会想到用增加接收机增益的简单方法就能检测任意远距离的目标。但是,这样做时,在示波器的扫描轨迹全线将出现密集而起伏的脉冲尖。雷达人员称这些众多的假目标为“草”(“脉冲细条”)。他们是由来自周围环境和接收机本身的随机干扰或噪声产生的。太弱的回波信号将淹没在噪声细条之中,因此使得信号难于从噪声之中辨识出来。

观察人员在荧光屏上寻找有距离的目标时,必须区别由回波信号产生的脉冲尖与由随机噪声产生的脉冲尖。接收机应设计得使观察员能侦察到最弱的可能回波,而不致造成过多的错误判决。信号检测的统计理论能够告诉我们如何做到这一要求。从研究一些简化和理想化的情况开始,就会使我们很清楚地理解这种理论,这也是本书的目的。关于实际雷达系统的构造细节,读者可参考大量的有关雷达的教科书,在本章末文献目录中列出了几本这种书籍。

通信系统将消息以很有限的功率传送到很远的距离,也同样存在着从随机噪声中检测弱信号的问题。接收机必须既能把将载荷信息的电磁波信号从噪声中区分出来,又能将这些信号互相区别出来;为了达到最可靠的通信,接收机必须最有效地做到这一点。在物理学中也有类似的问题,如常常需要在不可避免的背景噪声中测量弱电压或其他小的物理量。信号检测理论是解决所有这些问题的指南。

在一个典型的检测问题中所给定的是一个变动的电压,如在接收机天线端子间所出现的电压。根据对我们的利害关系。我们智慧地将这个电压分为信号和噪声两部分,信号携带着有价值的信息,而噪声干扰我们对信息的提取。在这一章中我们将复习描述信号和用来变换信号的滤波器的各种方法。第二章将论述噪声,引入适宜于这种讨论的统计方法。然后,通过与统计假设检验的类比来规定检测系统的目的,在此以后将阐述达到这些目的的方法。

1. 信号及其频谱

在研究信号时我们必须将他们区分为过渡的和永久的两种。一个过渡信号 $s(t)$ 是一个时间的函数，可以设这个函数是精确已知的，且其值直到一个初始时刻 t_0 为 0，

$$s(t) = 0, \quad t < t_0$$

而在时间趋于无穷大时趋于 0，

$$s(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

它是平方可积的，即量

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt \quad (1.1)$$

是有限的。例如， $s(t)$ 是跨在一个 R 欧姆电阻器上的电压时，流过该电阻器的电流是 $s(t)/R$ ，且有一个有限的能量

$$\int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt / R = E/R$$

消耗在这个电阻器上。这样一个过渡信号通常是以脉冲或一串脉冲的形式出现的。

无线电广播发射机的输出信号是不便于用过渡信号描述的示例。最方便的方法是把它表示为无始无终的时间函数 $s(t)$ ，并且不是平方可积的。像这样的信号可以叫做“永久信号”。最简单的一种永久信号就是周期函数。通信理论要涉及很广泛的一类永久信号，把他们引申到在下一章要研究的那一类随机过程。我们现在关心的主要是过渡信号。

一个脉冲信号不仅能用时间函数 $s(t)$ 描述，也可用它的傅里叶变换或频谱 $S(\omega)$ 描述，傅里叶变换被定义为*

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.2)$$

平方可积信号的频谱总是存在的，而且它本身也是平方可积的。我们把它记为 E 的，且通常称为信号能量的量由式

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega / 2\pi \quad (1.3)$$

给定，这是 Parseval 定理的结果（附录 A，公式(A.9)）。

把频谱 $S(\omega)$ 进行傅里叶逆变换，就能还原出原信号的时间函数

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega / 2\pi \quad (1.4)$$

上式表明信号是无穷多个频率为 ω 、复振幅为 $S(\omega) d\omega / 2\pi$ 的正弦振荡 $e^{i\omega t}$ 的叠加。若 $s(t)$

* 在本书中变量 ω 称为频率。它用弧度/秒来度量，是通常称为频率的、用赫或周/秒度量的量的 2π 倍。我们这样约定是为了使公式中 2π 这个因子在印刷时排列在方便的地方，而大家惯用的频率概念被保留了。变量 ω 有时叫角频率。这里仅应用傅里叶变换理论的最基本概念，在附录 A 中陈述了这些概念，并列出了有关这方面的参考文献目录。

是实函数, 频谱就满足条件 $S(-\omega) = S^*(\omega)$, 星号表示复共轭函数。

傅里叶积分是我们熟知的傅里叶级数的推广, 傅里叶级数将一个周期为 T 的周期性函数表示为频率为 $2\pi/T$ 的整数倍的、无穷多个可数的正弦和余弦的总和。公式(1.4)中积分可以认为是在信号的周期 T 变得很长以及正弦成分的数目变成不可数的无穷大时的结果。式(1.3)所示的信号能量 E 可以认为是所有这些正弦波的强度之总和。

信号的一个普通形式是持续时间为 T 的矩形脉冲,

$$\begin{aligned} s(t) &= A, & 0 < t < T, \\ s(t) &= 0, & t < 0, t > T, \end{aligned} \quad (1.5)$$

在一个时区 T 内把一个电池接到电路中就可以形成这个信号。它的频谱是

$$S(\omega) = A(1 - e^{-i\omega T})/i\omega \quad (1.6)$$

作出这个频谱的逆变换, 式(1.4), 对读者是有教益的。关于这个信号的分析在附录 A 中陈述。

当信号的频谱只是在从 $\omega=0$ 开始的一个频率范围内有显著不同于零的值时, 常称它为视频信号。这个名称起源于雷达和电视技术, 在这种技术中, 这个形式的信号常被加到阴极射线示波器的偏转板上, 使他们成为可见信号。视频信号的频谱范围用带宽来度量, 它一般有几种定义。若频谱在范围 $-\infty < \omega < \infty$ 内只有单峰, 由于对称性的理由, 这个峰必定位于 $\omega=0$ 。这时, 频带宽度可以定义为“半功率点”间的距离, 它等于 $2\omega_1$, 在这里 $|S(\omega_1)|^2 = \frac{1}{2}|S(0)|^2$ 。或者, 频带宽度可定义为频谱的均方根偏差,

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= (\overline{\omega^2})^{\frac{1}{2}}, \\ \overline{\omega^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned}$$

它类似于回转半径(惯性半径)。频带宽度的第三个定义是比率 $\int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)| d\omega / S(0)$ 。用哪一个定义多半看数学运算的方便。

与视频信号相对立的是那些高频振荡占优势的信号。如果信号的频谱集中于两个窄的对称峰附近, 一个在频率 $\omega = \Omega$ 附近, 另一个在 $\omega = -\Omega$ 附近, 并且峰的宽度比 Ω 小得很多, 则称这种信号为窄带信号或准谐波信号。象这样的信号在本书中是很重要的, 在本章的以后部分将讨论他们。

2. 滤 波 器

在我们将研究的系统中, 用被称为滤波器的装置来变换信号。通常滤波器是具有一对输入端子和一对输出端子的电网络。它可能包含有电阻器, 电感器, 电容器, 电子管, 继电器或其他元件。当一个变化的电压(或“输入信号”), $s_i(t)$ 施加于输入端时, 在输出端可以测得电压, 或“输出信号”, $s_o(t)$ 。设输出信号由输入信号唯一地确定。这样, 滤波器可以由所有可能的输入和输出信号配对的集合来定义, 这些配对记为 $\langle S_i(t) \rightarrow s_o(t) \rangle$ 。在这一节中我们将简单地描述滤波器的一些性质。

没有滤波器能在输入端发生变化以前的时刻, 响应这种变化。用符号描述, 如果对于由 $\langle s_i^{(1)}(t) \rightarrow s_o^{(1)}(t) \rangle$ 和 $\langle s_i^{(2)}(t) \rightarrow s_o^{(2)}(t) \rangle$ 给定的两对输入—输出, 当 $t < t_0$ 时 $s_i^{(1)}(t) = s_i^{(2)}(t)$, 但 $t > t_0$ 时, $s_i^{(1)}(t) \neq s_i^{(2)}(t)$, 那么, 当 $t < t_0$ 时, $s_o^{(1)}(t) = s_o^{(2)}(t)$ 。这些陈述表明因果原理, 满足上述原理的、概念上的滤波器可以说是“物理可实现的”。

不含能源的滤波器称为无源滤波器, 否则叫做有源滤波器。电子管放大器是有源滤波器; 变压器是无源滤波器。由时不变原件构成的滤波器有这样的性质: 若 $\langle s_i(t) \rightarrow s_o(t) \rangle$ 是一个输入—输出配对, 那么, $\langle s_i(t+a) \rightarrow s_o(t+a) \rangle$ 也是一个配对, 其中 a 为任意实数。它叫做非时变或平稳滤波器。

一个重要类型的滤波器是线性滤波器。线性滤波器的输出总是输入的线性变换, 这里的意思是: 若有两对输入和输出 $\langle s_i^{(1)}(t) \rightarrow s_o^{(1)}(t) \rangle$ 和 $\langle s_i^{(2)}(t) \rightarrow s_o^{(2)}(t) \rangle$, 那么

$$\langle As_i^{(1)}(t) + Bs_i^{(2)}(t) \rightarrow As_o^{(1)}(t) + Bs_o^{(2)}(t) \rangle$$

对于所有的 A 和 B 值都是可能的输入—输出配对。这一规律适用于任意数目的输入与输出的线性组合。

真实的信号是时间的实函数, 但有时考虑在输入端引入一个复信号

$$s_i(t) = s_i^{(1)}(t) + i s_i^{(2)}(t)$$

是方便的。从线性滤波器输出的将是与此相似的线性组合

$$s_o(t) = s_o^{(1)}(t) + i s_o^{(2)}(t)$$

当输入信号为实时, 输出也必须为实。如果每一个有界的实输入信号产生一个有界的输出信号, 那么可以说这个线性滤波器是稳定的。

一个稳定的线性滤波器可以被认为是按照积分

$$s_o(t) = \int_0^{\infty} K(\tau) s_i(t-\tau) d\tau \quad (2.1)$$

所描述的方式来变换输入 $s_i(t)$ 的。函数 $K(\tau)$ 称为滤波器的冲击脉冲响应 (也可简称为脉冲响应)。如果输入是一个可以表示为发生在时刻 $t=0$ 的狄拉克 δ 函数的陡峭脉冲, 即 $s_i(t) = \delta(t)$, 则滤波器的输出是 $s_o(t) = K(\tau)$ 。任一输入信号可以被认为是由公式

$$s_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t') \delta(t-t') dt'$$

所表示的 δ 函数脉冲的线性组合。根据线性滤波器的定义, 输出信号必须是被延迟的冲击脉冲响应 $K(t-t')$ 的同一线性组合

$$s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t') K(t-t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) s_i(t-\tau) d\tau$$

因为滤波器的响应不能超前于它的输入, 那么, $\tau < 0$ 时, $K(\tau) = 0$; 因此, 我们得到式 (2.1)。就含有象电阻器那样消耗能量元件的无源滤波器说, 对于一个脉冲的响应最终总要消失, 即当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $K(\tau) \rightarrow 0$ 。一个典型的滤波器可能具有如图 1—1 所示的冲击脉冲响应。

线性滤波器的作用可以理解为对已过去的输入函数进行加权积分, 对 τ 秒以前的贡献乘以权 $K(\tau)$, 如图 1—2 所示。在该图中在时刻 t 的输出值是对 $s_i(t')$ 和 $K(t-t')$ 相应的纵坐标的乘积积分而形成的, 即

$$s_0(t) = \int_{-\infty}^t K(t-t')s_i(t')dt' \quad (2.2)$$

这个公式等效于式(2.1)。随着时间推移，加权函数 $K(\tau)$ 沿着时间轴向右移动，循序前进地作用于输入信号 $s_i(t)$ 的新的部分。

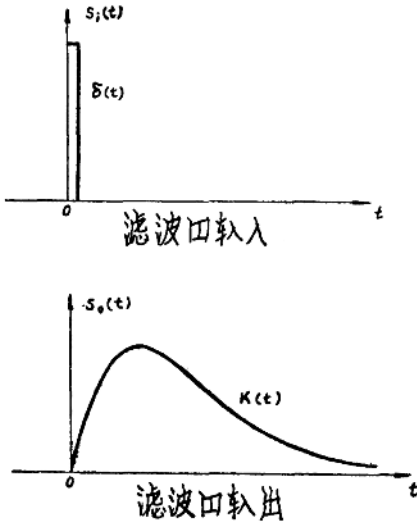


图 1—1 滤波器的冲击脉冲响应

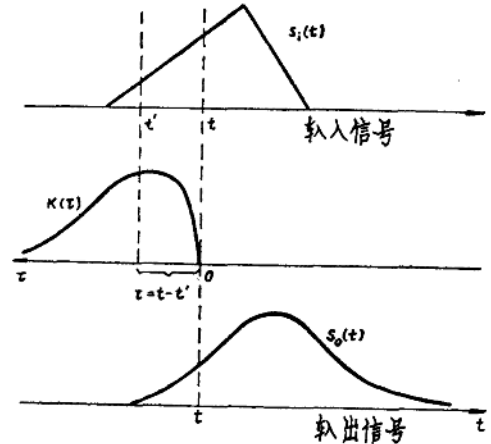


图 1—2 线性滤波器的作用

在本节的以后部分将主要处理线性平稳滤波器。对于这些课题的更完整的论述读者可参考 Gardner 和 Barnes(1942)，Guillemin(1953, 1957, 1963)及 Carlin 和 Giordano 等所著的有关书籍*。

众所周知，冲击脉冲响应的傅里叶变换是滤波器的传递函数，用 $Y(\omega)$ 表示：

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} K(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (2.3)$$

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega/2\pi$$

(对于某些滤波器，为了分析方便，取输入信号为电压，输出信号为电流， $Y(\omega)$ 叫做导纳，若输入信号是电流，而输出信号是电压，它是阻抗。这些差异在目前的讨论中是无关重要的。)如果输入是具有频率为 ω 的时间 t 的复函数 $e^{i\omega t}$ ，滤波器的输出是 $Y(\omega)e^{i\omega t}$ ，将输入信号代入(2.1)，并且应用式(2.3)，可以得到证明。傅里叶积分

$$s_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_i(\omega)e^{i\omega t}d\omega/2\pi$$

* 对文献目录——在每一章的最后部分——中的参考书刊指出了他们的出版时间，并按此时间顺序排列。

将任一输入信号表示为若干个这种复正弦的叠加，他们的振幅由频谱 $S_i(\omega)$ 给定。因此，根据线性滤波器的定义，输出频谱 $S_0(\omega)$ 由下式决定

$$S_0(\omega) = Y(\omega)S_i(\omega) \quad (2.4)$$

利用傅里叶变换的卷积定理（附录 A，公式 (A.8)），从公式 (2.1) 立即可得出这一结果。

因为脉冲响应 $K(\tau)$ 是 τ 的实函数，所以传递函数 $Y(\omega)$ 应符合条件

$$Y(-\omega) = Y^*(\omega)$$

对于 $\tau < 0$ ，求积分

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega / 2\pi$$

可以在 ω 复平面的下半面使积分的围道闭合（参看附录 A）。所以，在 $\tau < 0$ 时冲击脉冲响应 $K(\tau)$ 应为零这一点意味着 $Y(\omega)$ 在 $\text{Im} \omega < 0$ 的区域内不能有奇点。如果滤波器是稳定的， $|Y(\omega)|$ 又同时必须在 ω 的实轴上是有界的，因而 $Y(\omega)$ 的所有奇点必须位于 ω 的实轴以上。

最普通的一类线性滤波器是由电阻器、电感器和电容器，即所谓由集总电路元件组成的网络。在电路理论书籍中证明了这种滤波器的传递函数 $Y(\omega)$ 是 ω 的有理函数，就是说，它是 ω 的两个有限阶多项式的商。由于元件间和布线间不可避免地有寄生电容，一个实际滤波器不可能无衰减地通过甚高的频率，随着频率的增高，衰减增大，当 $\omega \rightarrow \pm\infty$ 时， $|Y(\omega)| \rightarrow 0$ 。在表示这种滤波器的有理传递函数中分母多项式至少比分子多项式高一阶。

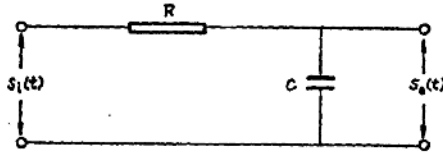


图 1-3 RC 滤波器

图 1-3 是一个简单滤波器的例子。如果输入和输出信号是在所示相应端子上测得的电压，根据初等电路理论，传递函数是

$$Y(\omega) = \frac{-i/\omega C}{R - i/\omega C} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad (2.5)$$

很容易证明，这个滤波器的冲击脉冲响应是一个衰减指数函数

$$K(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}, \quad \mu = 1/RC, \quad \tau > 0 \quad (2.6)$$

其中 $(1/\mu) = RC$ 是“时间常数”。若输入是式 (1.5) 所示的矩形脉冲，那么输出是

$$\begin{aligned} s_0(t) &= A(1 - e^{-\mu t}) & 0 < t < T, \\ s_0(t) &= A(e^{\mu T} - 1)e^{-\mu t} & t > T, \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中 T 是输入脉冲的持续时间。在图 1-4 中例示了输出信号。由式 (1.6)、(2.4) 和 (2.5) 得到的输出频谱是

$$S_0(\omega) = A \cdot \frac{1 - e^{-i\omega T}}{i\omega(1 + i\omega RC)} \quad (2.8)$$

$s_0(t)$ 可由上式的傅里叶逆变换求得，但是将脉冲响应式 (2.6)，代入基本公式 (2.1) 或 (2.2)，就更容易求出。

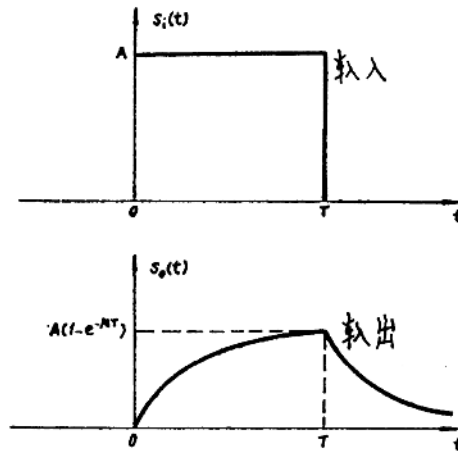


图 1—4 RC 滤波器对矩形脉冲的响应

对于比图 1—3 更复杂的网络，求它的冲击脉冲响应的步骤是相同的。首先用标准技术找传递函数，即在输入端子上加一个交变电压 $e^{i\omega t}$ 时，求解输出端子上相应的电压；这两个电压的比就是 $Y(\omega)$ 。然后，由傅里叶逆变换求得脉冲响应，如式 (2.3) 所示。因为，对集总网络说， $Y(\omega)$ 是 ω 的有理函数，所以先确定 $Y(\omega)$ 的分母的根 ω_j ，然后进行逆变换就容易；这些根叫做滤波器传递函数的极点。若没有重根，就可以用部分分式的方法写出 $Y(\omega)$ 的形式

$$Y(\omega) = \sum_j A_j / (\omega - \omega_j) \quad (2.9)$$

于是，直接可得脉冲响应

$$K(\tau) = i \sum_j A_j e^{i\omega_j \tau} \quad \tau > 0, \quad (2.10)$$

(当有重根时，将得到稍微复杂的形式。) 这种分析有时用拉普拉斯变换进行，这时所用变量是 $p = i\omega$ 。所涉及到的数学是一样的，不同的仅是从另一个方向观察平面 $z = \omega + iy$ 。

非线性滤波器已由 Zadeh (1953) 和其他人给予分类和讨论。在最简单类型的滤波器中输出 $s_o(t)$ 为它的输入的某个单调函数： $s_o(t) = F[s_i(t)]$ ，这里 $y = F(x)$ 是非减或非增函数。非线性滤波器的类别是没有限制的，没有一种单纯的方法可以用来分析所有的非线性滤波器。

3. 窄带信号

在雷达系统和大多数通信系统中接收信号是由幅度和相位被时间函数调制过的高频载波组成的，这些时间函数的变化与载波的周期比较起来要慢得多。例如，一个雷达脉冲通常含有许多个射频载波的周期，大致与图 1—5 中的信号相似，图 1—5 中的 $s(t)$ 可以写成

$$s(t) = \begin{cases} A \cos \Omega t, & 0 < t < T \\ 0, & t < 0, t > T, \Omega T \gg 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

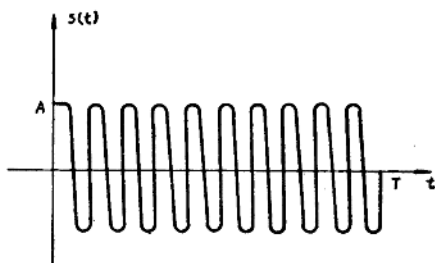


图 1—5 窄带脉冲

一个典型脉冲的载频 Ω 可能是 $2\pi \cdot 10^9$ 弧度/秒，（1000兆赫的载波），而 T 可能是 1 微秒 $= 10^{-6}$ 秒。这一类型的信号是幅度调制的。一些无线电广播发射机的输出也是幅度调制，它可以描述为

$$s(t) = A[1 + m(t)] \cos \Omega t \quad (3.2)$$

这里函数 $m(t)$ 在载波 $\cos \Omega t$ 的一个周期 $2\pi/\Omega$ 内的变化很微小，它代表发射的语言或音乐。如果存心避免因子 $1 + m(t)$ 变负，式(3.2)中信号看起来就象是一个振幅起伏不规则的正弦波。

频率调制的发射机的输出可以表示为

$$s(t) = A \cos \left[\Omega t + \int_0^t \phi(s) ds \right] \quad (3.3)$$

这个信号的瞬时频率是 $\Omega + \phi(t)$ ，而慢变化函数 $\phi(t)$ 携带着被广播的信息。这种波的幅度是恒定的，但它取零值的时刻随着调制前后移动。

具有最一般形式的调制的高频载波可表示为方程

$$s(t) = M(t) \cos [\Omega t + \phi(t)] \quad (3.4)$$

函数 $M(t)$ 称为幅度调制，函数 $\phi(t)$ 称为相位调制；导数 $d\phi/dt$ 是信号的频率调制。如果幅度调制信号 $M(t)$ 是脉冲形状的，信号 $s(t)$ 是过渡的，或(3.2)和(3.3)中的广播信号属于所谓“永久”信号这一类。参考文献目录中包括有调制理论的一些书。

将式(3.4)中余弦函数展开，可得

$$\begin{aligned} s(t) &= M(t) [\cos \phi(t) \cos \Omega t - \sin \phi(t) \sin \Omega t] \\ &= X(t) \cos \Omega t - Y(t) \sin \Omega t \end{aligned} \quad (3.5)$$

式中

$$\begin{aligned} X(t) &= M(t) \cos \phi(t) \\ Y(t) &= M(t) \sin \phi(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

我们称函数 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为信号的两个“正交分量”。在载波 $\cos \Omega t$ 的一个周期内这两个函数的变化也很小。将信号 $s(t)$ 与信号 $\cos \Omega t$ 相乘，然后滤掉产物中以 2Ω 为载频的成分，就能得到函数 $X(t)$ ，

$$s(t) \cos \Omega t = \frac{1}{2} X(t) (1 + \cos 2\Omega t) - \frac{1}{2} Y(t) \sin 2\Omega t \rightarrow \frac{1}{2} X(t)$$

完成上述功能的装置叫做“混频器”，或“零拍检波器”。这可解释为把信号 $s(t)$ 和 $\cos \Omega t$ “混频”或“差拍”了。另一个正交分量 $Y(t)$ 可以将 $s(t)$ 和信号 $\sin \Omega t$ 混频来得到。

将这些正交分量组合成一复数，我们可以得到用“复包络”

$$F(t) = X(t) + iY(t) = M(t)e^{i\phi(t)} \quad (3.7)$$

表示的已调信号的简便表示式，即

$$s(t) = \text{Rl}F(t)e^{i\Omega t} \quad (3.8)$$

这里“Rl”表示跟随在它后面的复数的实部。复函数 $F(t)$ 可以画为在 XY 平面的原点的矢量。矢量的端点在这个平面内来回运动，而平面本身始终以角速度 Ω 在旋转。信号 $s(t)$ 是这个旋转矢量在一个固定直线上的投影。因此，一个已调信号的复包络是交流电压和电流矢量表示法的自然推广。当矢量 $F(t)$ 相对于旋转平面的运动比平面的旋转率慢很多时，信号 $s(t)$ 是准谐波信号。

若信号是过渡的，它的复包络有傅里叶变换

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.9)$$

信号的频谱 $S(\omega)$ 可用上式表示为

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [F(t)e^{i\Omega t} + F^*(t)e^{-i\Omega t}]e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} [f(\omega - \Omega) + f^*(-\omega - \Omega)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

由于 $F(t)$ 的正交分量的变化比载波 $\cos \Omega t$ 慢得多，所以它的傅里叶变换的模 $|f(\omega)|$ 的频带宽度比 Ω 小得多。于是，信号频谱的模 $|S(\omega)|$ 将呈现两个窄峰，一个是在频率 Ω 附近，另一个是在 $-\Omega$ 附近。由于频谱的这种结构，信号 $s(t)$ 被称为“窄带”信号。

若信号 $s(t)$ 限定为真实信号，公式(3.10)中的频谱须满足条件 $S(-\omega) = S^*(\omega)$ 。若 $F(t)$ 为实，信号是纯幅度调制时，复包络的傅里叶变换 $|f(\omega)|$ 满足同样的条件。仅仅在这样的情况下，模 $|f(\omega)|$ 才是一个偶函数，并且 $|S(\omega)|$ 的两峰以载频 Ω 为轴对称。实际上，载频可以是任意的。把它移动一个数量 k ，不过是在复包络中引入一个因子 $e^{-ik t}$ ，

$$F(t)e^{i\Omega t} = [F(t)e^{-ik t}]e^{i(\Omega+k)t},$$

并没有改变信号 $s(t)$ ，有时适当地选择载频 Ω 可以简化计算。

一个过渡信号 $s(t)$ 能够写成 $s_+(t)$ 正频率部分和 $s_-(t)$ 负频率部分的和。这两部分定义为

$$\begin{aligned} s_+(t) &= \int_0^{\infty} S(\omega)e^{i\omega t} d\omega / 2\pi \\ s_-(t) &= s_+^*(t) = \int_{-\infty}^0 S(\omega)e^{i\omega t} d\omega / 2\pi \end{aligned} \quad (3.11)$$

如果，象窄带信号那样，当 ω 为负时，式(3.10)中 $f(\omega - \Omega)$ 函数可以忽略，信号的正频率部分可以由复包络给出

$$s_+(t) = \frac{1}{2} F(t)e^{i\Omega t} \quad (3.12)$$

这个所谓“解析信号” $s_+(t)$ 是由 Gabor (1946) 引出的。它比复包络更通用，因为对具有频谱的任意信号都有定义。用信用 $s(t)$ 本身，这个解析信号可由积分

$$s_+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(z) dz}{t-z} \quad (3.13)$$

给出, 式中 z 有无穷小的负虚部。解析信号的实部和虚部可用希耳伯特变换联系起来, 请读者参阅 McDonald 和 Brachman(1956) 及 Guillemin(1963、第 18 章) 的著作。但是, (3.11) 和(3.13)式的定义的实际价值不大, 解析信号主要适用于准调波信号, 而对后者复包络信号也一样有用。

一个滤波器, 如果它的输出是加于它的输入端的窄带信号的幅度调制函数, 则称它为检波器。它必须是非线性的, 因为一个线性滤波器不能在不破坏包络的情况下去掉载波振荡。一个输出与其输入的幅度调制直接有关的典型检波器是平方律检波器。这种检波器的作用是把输入平方起来, 由式(3.5)得

$$\begin{aligned} [s(t)]^2 = & \frac{1}{2} \{ [X(t)]^2 + [Y(t)]^2 \} \\ & + \frac{1}{2} \{ [X(t)]^2 - [Y(t)]^2 \} \cos 2\Omega t - X(t)Y(t) \sin 2\Omega t \end{aligned} \quad (3.14)$$

然后由一个低通滤波器滤掉频率在 2Ω 邻近的项, 于是最后的输出正比于

$$|F(t)|^2 = [M(t)]^2 = [X(t)]^2 + [Y(t)]^2.$$

除了平方特性的检波器以外, 可以考虑产生绝对值 $|F(t)| = M(t)$ 的其他单调函数的检波器; 于是, 一个线性检波器产生 $M(t)$ 本身。

产生一个正比于其输入的瞬时频偏 $\phi'(t)$ 的输出的装置称为鉴频器, 它的输出可以被认为正比于 $d\text{Im}[\ln F(t)]/dt$, 式中 $F(t)$ 是输入的复包络。当然, 对于任意一个给定的鉴频器或检波器电路, 必须进行分析, 才能确定这里对它的作用的描述近似精确到什么程度。

如果我们在 $-\infty < t < +\infty$ 范围内对式(3.14)积分, 并注意对对准调波信号说, 与 $\cos 2\Omega t$ 及 $\sin 2\Omega t$ 成正比的各项的积分要比其他的项小得多, 就得到

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega / 4\pi \quad (3.15)$$

它可以替代被我们称作信号能量的式(1.1)。

4. 窄带滤波器

滤波器可以设计成只让输入载波频率邻近的成分通过, 而衰减掉其他所有频率, 常常用这种滤波器来变换准谐波信号。用具体例子对这种通带的滤波器进行分析, 就可说明准谐波概念所带来的简化。我们现在就讨论一下线性窄带通滤波器, 这个滤波器对在某一高频 Ω 附近带宽为 W 的频率分量衰减甚微, 而 W 比 Ω 小得很多。这种滤波器的传递函数 $Y(\omega)$ 可以方便地写成下列形式,

$$Y(\omega) = y(\omega - \Omega) + y^*(-\omega - \Omega) \quad (4.1)$$

其中复函数 $y(\omega)$ 只在 $\omega=0$ 附近的一个窄频域内才显著地不同于零。方程(4.1)满足对称条件 $Y(-\omega) = Y^*(\omega)$, 这是使脉冲响应 $K(\tau)$ 有可实现性的结果。如果一个线性窄带通滤波器由集总电路元件所组成, 则它的传递函数 $Y(\omega)$ 的所有极点均位于 $\omega = +\Omega$ 或 $\omega = -\Omega$ 附近。

于是，我们可以用式(2.9)的部分分式展开式去分解式(4.1)，将与在 $\omega = +\Omega$ 附近的诸极点有关各项纳入 $y(\omega - \Omega)$ ，把其余各项留给 $y^*(-\omega - \Omega)$ 。

用公式(2.3)和(4.1)，我们可以写出窄带滤波器的脉冲响应 $K(\tau)$ 为

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} [y(\omega - \Omega) + y^*(-\omega - \Omega)] e^{i\omega\tau} d\omega / 2\pi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\omega) e^{i(\omega + \Omega)\tau} d\omega / 2\pi + \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\omega) e^{-i(\omega + \Omega)\tau} d\omega / 2\pi \\ &= 2\text{RI}k(\tau) e^{i\Omega\tau} \end{aligned} \quad (4.2)$$

这里
$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega / 2\pi \quad (4.3)$$

如果 $y(\omega)$ 的值仅在宽度为 W 的频域内有意义，则函数 $k(\tau)$ 在大约为 $1/W$ 的 τ 的值域内就有显著的变化。与窄带信号的包络概念相类比，我们可以把 $k(\tau)$ 看成是窄带滤波器冲击脉冲响应 $K(\tau)$ 的复包络的一半。当用一个尖锐的脉冲激励这个滤波器时，它就“鸣响”，它的输出以频率 Ω 振荡着；这个输出随着时间而衰减的情况与包络 $2k(\tau)$ 所描绘的相同。

现在我们来证明：包络函数 $k(\tau)$ 如何通过一个类似于式(2.1)的方程对输入信号的复包络进行变换，以产生输出信号的复包络。令窄带滤波器的输入和输出信号分别为

$$\begin{aligned} s_i(t) &= \text{RI}F_i(t) e^{i\Omega t} \\ s_o(t) &= \text{RI}F_o(t) e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (4.4)$$

他们由式(2.1)相联系。将式(4.4)和(4.2)代入，便得到

$$\begin{aligned} s_o(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} K(\tau) F_i(t - \tau) e^{i\Omega(t - \tau)} d\tau + c.c. \\ &= \frac{1}{2} e^{i\Omega t} \int_0^{\infty} k(\tau) F_i(t - \tau) d\tau + c.c. + \frac{1}{2} e^{i\Omega t} \int_0^{\infty} k^*(\tau) F_i(t - \tau) e^{-2i\Omega\tau} d\tau + c.c., \end{aligned}$$

这里“c.c.”表示它前面一项的复共轭。在窄带近似下，可以忽略这些项中的第二对，因为他们的被积函数与第一对中的被积函数比较起来变化得很快，以致他们的值相对地是小的。把余下的各项与式(4.4)比较，就可以写出

$$F_o(t) = \int_0^{\infty} k(\tau) F_i(t - \tau) d\tau \quad (4.5)$$

所以，我们能够用更简单的响应函数 $k(\tau)$ 由输入信号的复包络来表达输出信号的复包络，这个 $k(\tau)$ 不包含冲击脉冲响应 $K(\tau)$ 的振荡。我们称由式(4.2)或(4.3)定义的 $k(\tau)$ 为窄带滤波器的复冲击脉冲响应。

当输入为一个准调波信号时，窄带滤波器的输出表示式还可以用另一种方法来推导。若输入和输出信号的频谱分别为 $S_i(\omega)$ 和 $S_o(\omega)$ ，

$$S_o(\omega) = Y(\omega) S_i(\omega)$$

如果我们将这两个频谱写成式(3.10)的形式，并用式(4.1)的 $Y(\omega)$ ，便得