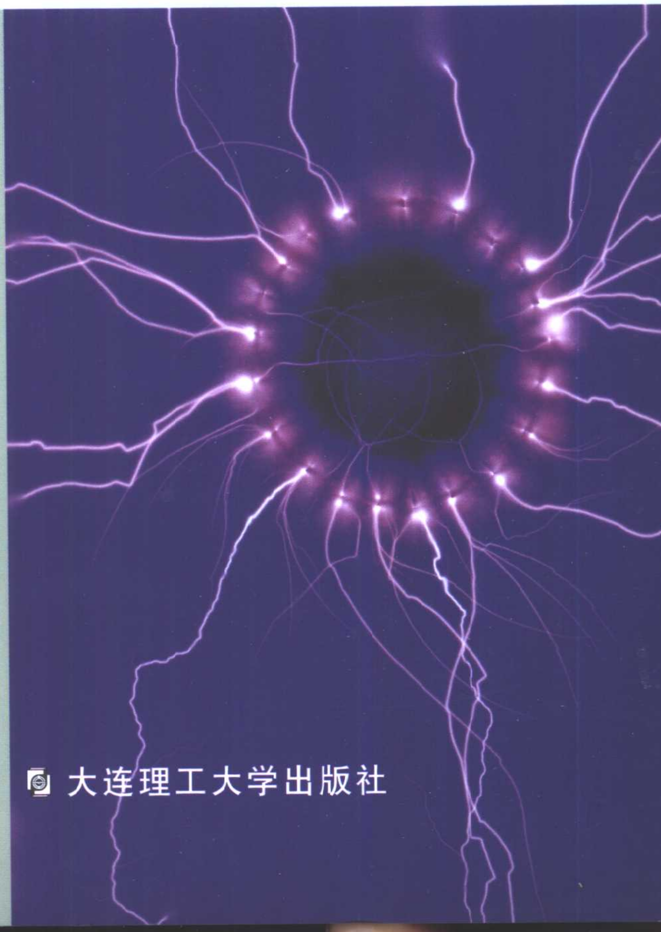
高等数学过关必备

GAODENG SHUXUE GUOGUAN BIBEI

高等数学解题题典

（专科高职类·专升本）

蔡若松 秦禹春/主 编



大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

高等数学解题题典

（专科高职类·专升本）

蔡若松　秦禹春　主编

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题题典:专科高职类·专升本/蔡若松,秦禹春主编.
大连:大连理工大学出版社,2002.8
高等学校数学学习辅导教材
ISBN 7-5611-2096-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①蔡…②秦… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题
Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 041973 号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-4708842　传真:0411-4701466
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn
URL:http://www.dutp.com.cn
大连业发印刷有限公司印刷

开本:850 毫米×1168 毫米　1/32　字数:520 千字　印张:16
印数:1—10000 册
2002 年 8 月第 1 版　　2002 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:刘　杰　　责任校对:杜　娟
封面设计:王福刚

定价:20.00 元

前　言

《高等数学解题题典》是一本为大学专科层次的学生和读者编写的《高等数学》课程学习辅导类工具书，适用于理工科非数学专业学生使用和教师教学参考，是专科高职类学生学习高等数学复习考试，专科升入本科的必备教材。本书选题的指导思想、结构和内容是以教育部制定的考试大纲为依据，内容深度和广度主要参考了专科高职类教材和自考高等数学（工、本）和成教规划教材（本科），遵循掌握概念、强化应用、提高能力的原则，针对专科高职学校的教学目标，精选高等数学核心知识中的典型习题，通过对典型习题进行解析、解答、点拨，方便学生在解题过程中，以此为范本，理解高等数学的知识点，掌握基本的解题方法，提高分析问题、解决问题的能力。

《题典》具有以下特点：

一、与教材知识点同步，紧密结合教学大纲

本书为了便于学生对所学课程的巩固与复习，本书的章节顺序与全国专科类教材的章节基本同步，每章的选题都能覆盖本章的知识点。

二、解析经典，注重传授方法

每个典型题都给出解析，点明解题思路，分析简捷、清晰、突出解题方法。

三、名师倾心力作，点拨权威到位

本书在解题之后，对习题给出总结性提示，传授解题技巧，提醒常见错误；帮助学生归纳总结，以期举一反三，触类旁通。

本书由一线教师精心编写，具有丰富的教学经验，对题的把握

准确，点拨权威到位。

四、充分体现专科高职类教学特点

为体现专科、高职类教材的特点，每章都配有结合实践的习题并结合知识点配备综合性题，以帮助学生掌握教材内容。在题型选择上，注重应用性、新颖性和创造性，以开拓学生的视野，为学生高层次发展奠定基础。

五、题目难度适中，信息量大，且具有一定的梯度

本书在编写中既注重基础训练，又注重与专升本考试的要求相衔接，每章都配有一定数量的专升本考题，全书典型题中，30%以上为全国历年专升本考题，具有较高的复习备考参考价值。

附录选编了 2002 年全国高等教育自学考试高等数学（工本）和成人高等学校专升本全国统一考试高等数学（一）试卷及其答案，为读者客观公正地研究考试提供必要的参考学习资料，同时也为读者创造了如亲临考场的某种氛围。读者通过自己亲自动手，多做几份试卷，既可提高应试能力，又能从中了解到数学试题的命题思路和命题新动向，消除对命题的神秘感，缓解在考试中的焦虑心理，有利于临场考试水平的正常发挥，做到考前胸有成竹；还可以对照参考解答测试自己对于各章知识内容的掌握程度，了解自己的不足，有针对性地进行复习。

本书由蔡若松、秦禹春主编，丹东职业技术学院姚玉忠副教授编写了第一、二章；浙江万里学院郭秋丽副教授编写了第十一章。在本书的编写过程中得到了大连理工大学曹铁川教授，大连大学王丽燕副教授的大力支持和帮助，编者在此一并表示诚挚的谢意。

限于编者的水平，书中一定存在缺点和不足之处，敬请读者提出宝贵意见并批评指正。

编　者

2002.6

目　录

第一章　函数与极限

【题 1】 下列各组函数中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为同一函数？

(1)$f(x)=\ln x, g(x)=\frac{1}{2}\ln x^2$

(2)$f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

(3)$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, g(x)=e^{-\frac{1}{2}\ln x}$

解析 (1) 不相同。因为 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域不同。

(2) 不相同。因为 $x=-1$ 时，$f(-1)=-1, g(-1)=1, f(-1)\neq g(-1)$，它们的对应法则不同。

(3) 相同。因为定义域都是 $(0,+\infty)$，并且对于任意的 $x\in(0,+\infty)$，$g(x)=e^{-\frac{1}{2}\ln x}=e^{\ln x^{-\frac{1}{2}}}=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$。

点拨 判断两个函数是否相同的依据是看它们的定义域及对应法则这两个要素是否相同，即使自变量或因变量的符号不同，也不妨碍函数的等同性。

【题 2】 求函数 $y=\frac{\sqrt{3x-x^2}}{|x-1|-1}$ 的定义域。

解析 要使函数式有意义，必须使分母不为零且被开方式大于等于零。即该函数的定义域应满足不等式组 $\begin{cases}3x-x^2\geqslant 0\\|x-1|-1\neq 0\end{cases}$，解此不等式组，得其定义域为 $(0,2)\cup(2,3)$。

点拨 若函数是用一个式子表示的初等函数时，其定义域是每个部分定义域的交集。

若函数是分段函数时，其定义域是每个部分定义域的并集。

若函数是实际问题中对应的函数，则定义域应是使实际问题有意义的自

变量取值范围。

【题 3】 已知函数 $y=f(2^x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，求 $y=f(\log_2 x)$ 的定义域。

解析 由 $y=f(2^x)$ 的定义域知 $-1\leqslant x\leqslant 1$，因为 $\frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 2$，所以 $y=f(x)$ 的定义域是 $\left[\frac{1}{2},2\right]$

由 $\frac{1}{2}\leqslant \log_2 x\leqslant 2$ 解得 $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4$

所以 $y=f(\log_2 x)$ 的定义域是 $[\sqrt{2},4]$

点拨 由 $f(g(x))$ 的定义域 D_1 求 $f(h(x))$ 的定义域 D_2 时，可先求出 $g(x)$ 的值域即得到 $f(x)$ 的定义域 D，再把 D 作为 $h(x)$ 的值域，去解定义域 D_2。

【题 4】 根据条件，分别求出函数 $f(x)$ 的表达式：

(1)$f(3x+1)=4x+3$

(2)$f(\cos x-1)=\cos^2 x$

(3)$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$

(4)$f(x)$ 是一次函数且 $f(1)=1$ $f[f(2)]=2f^{-1}(4)$

解析 (1) **解法一** 令 $3x+1=t$，则 $x=\frac{1}{3}(t-1)$，

$$f(t)=4\times\frac{1}{3}(t-1)+3=\frac{4}{3}t+\frac{5}{3}$$

所以
$$f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$$

解法二 令 $\begin{cases}x=3t+1\\ y=4t+3\end{cases}$，$\therefore t=\frac{x-1}{3}$

所以 $y=4\times\frac{x-1}{3}+3$，$y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$

点拨 解法一称“换元法”，是较常见的一种解法，解法二称“参数法”，一般地，若 $f(h(x))=g(x)$，可令 $\begin{cases}x=h(t)\\ y=g(t)\end{cases}$，消去参数 t，可得 y 与 x 之间的关系式。

(2) 令 $t=\cos x-1(-2\leqslant t\leqslant 0)$，则 $\cos x=t+1$ $\therefore f(t)=(t+1)^2$

$\therefore f(x)=(x+1)^2(-2\leqslant x\leqslant 0)$

点拨 “换元法”要注意变元代换过程中，变元取值范围的变化。

(3) $\because f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$\therefore f(x)=x^2-2\ (|x|\geqslant 2)$

点拨 此法又称“凑成法”，相当于作了一个变元代换 $t=x+\frac{1}{x}(|t|\geqslant 2)$

(4) 设 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$

由题设 $f(1)=1$，$\therefore a+b=1$ ①

又因为 $f[f(x)]=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\text{ 及 }f[f(2)]=2f^{-1}(4)$$

所以 $$2a^2+ab+b=2\left(\frac{4}{a}-\frac{b}{a}\right) \quad ②$$

由 ①② 解得 $a=2,b=-1$

所以 $f(x)=2x-1$

点拨 此题解法为“待定系数法”，在已知函数解析式类型时常用此法。

【题 5】 求满足下列函数方程的函数 $f(x)$：

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=e^x\quad(|a|\neq|b|)$$

解析 由原方程及把原方程中的 x 换为 $\frac{1}{x}$，得

$$\begin{cases}af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=e^x\\ af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=e^{\frac{1}{x}}\end{cases}$$

将 $f(x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$ 看做未知数，解此线性方程组得 $f(x)=\frac{ae^x-be^{\frac{1}{x}}}{a^2-b^2}$ 即为所求：

点拨 此类题目中一般含有 $f(x)$，$f[\varphi(x)]$ 等，求 $f(x)$，其中，$\varphi(x)$ 是迭代循环函数，即满足 $\varphi(\varphi(x))=x$ 或 $\varphi(\varphi(\varphi(x)))=x$ 等，求解时只要将方程中的 x 换为 $\varphi(x)\varphi(\varphi(x))$ 等即可解出 $f(x)$。

【题 6】 判断下列函数的奇偶性

(1)$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

(2)$f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$

(3)$f(x)=\sin x+\sqrt[4]{x^2}$

(4)$f(x)=(x-1)^0x^2$

解析 只须根据奇偶函数定义判断即可:

(1)$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$ 故为奇函数。

(2)$f(-x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=f(x)$,故为偶函数。

(3)$f(-x)=\sin(-x)+\sqrt[4]{(-x)^2}=-\sin x+\sqrt[4]{x^2}\neq f(x)$ 且 $f(-x)=-f(x)$,故为非奇非偶函数。

(4) 因为 $f(x)$ 的定义域是 $x\neq 1$,即 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,定义域不关于原点对称,故为非奇非偶函数。

点拨 要注意的是:判断函数的奇偶性必须抓住两点:一是看 $f(-x)$ 是否等于 $-f(x)$ 或 $f(x)$,二是看定义域是否关于原点对称,这一点往往被忽视。

【题 7】 证明任意一个定义在关于原点对称的集合上的函数可以惟一地表示为一个奇函数与一个偶函数之和。

证 设 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,其中 $f_1(x)$ 是奇函数,$f_2(x)$ 是偶函数。于是

$$f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=-f_1(x)+f_2(x)$$

将 $f_1(x),f_2(x)$ 看做未知数,$f(x),f(-x)$ 看做已知数,解方程组 $\begin{cases}f_1(x)+f_2(x)=f(x)\\-f_1(x)+f_2(x)=f(-x)\end{cases}$,得

$$f_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],f_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

易验证 $f_1(x)$ 是奇函数,$f_2(x)$ 是偶函数。

$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,且由上述推理可知满足题设条件的 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 是惟一的,证毕。

点拨 在数学中,存在性的证明是一个难点,一种较为常用的证明方法是:首先假设要找的东西已经存在,然后根据题设看要找的东西需要满足什么条件,最后根据条件做出要找的东西,并且验证它满足要求。

【题 8】 判断下列函数是否为周期函数?

(1)$y=\sin\left(x-\dfrac{x}{3}\right)$ (2)$y=\cos 2x$

(3)$y=\cos^2 x$ (4)$y=x\sin x$

解析 根据周期函数的定义或基本三角函数的周期进行判断。

(1) 因为 $\sin x$ 是周期函数,周期是 2π,而 $y=\sin\left(x-\dfrac{x}{3}\right)$ 看做是由 $y=\sin x$ 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位得到的,所以仍为周期函数,周期仍为 2π。

(2) 因为 $\cos(2x+2\pi)=\cos 2(x+\pi)=\cos 2x$,所以 $y=\cos 2x$ 是周期函数,周期是 π。

(3)$y=\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$,由(2)知,它是周期函数,周期是 π。

(4) 不是周期函数,因若是周期函数,设周期为 $T\neq 0$,于是有 $(x+T)\sin(x+T)=x\sin x$ 对于任意的 x 都成立,取 $x=0$ 得 $T\sin T=0$,则必有 $\sin T=0, T=k\pi$,($k\neq 0$,k 是整数),于是 $(x+k\pi)\sin(x+k\pi)=x\sin x$。再取 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,得

$$\text{左边}=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\text{右边}=\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

左边 $\neq$ 右边,此与周期性矛盾,因此,$y=x\sin x$ 不是周期函数。

点拨 正弦型函数 $A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 和余弦型函数 $A\cos(\omega x+\varphi)+B$ 的周期都是 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$,正切型函数 $A\tan(\omega x+\varphi)+B$ 和余切型函数 $A\cot(\omega x+\varphi)+B$ 的周期都是 $\dfrac{\pi}{|\omega|}$,与常数 A、φ、B 无关,求这一类函数的周期就可直接应用这一结果。

判断一个函数不是周期函数,一般用反证法。

【题 9】 研究函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界性。

解析　函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界性定义为：

若存在一个常数 $M>0$，使得任意的 $x\in I$，满足 $|f(x)|\leqslant M$，或存在两个常数 $M_1,M_2(M_1<M_2)$，使得任意的 $x\in I$ 满足 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称无界。

解法一　因为 $x^2\pm 2x+1=(x\pm 1)^2\geqslant 0$，所以 $x^2+1\geqslant\pm 2x$

由 $x^2+1\geqslant 2x$ 得 $\dfrac{x}{x^2+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$

由 $x^2+1\geqslant -2x$ 得 $\dfrac{x}{x^2+1}\geqslant -\dfrac{1}{2}$

所以 $-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$ 或 $\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$

此即表明函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的。

解法二　先求出 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 的最小值与最大值

由 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 得 $yx^2-x+y=0$

当 $y=0$ 时，$x=0$

当 $y\neq 0$ 时，这是一个关于 x 的一元二次方程，由于 x 是实数，所以其判别式

$\triangle=(-1)^2-4y^2\geqslant 0$，由此得到 $-\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}$

当 $y=-\dfrac{1}{2}$ 时，$x=-1$；当 $y=\dfrac{1}{2}$ 时，$x=1$

由此得函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 的最小值是 $-\dfrac{1}{2}$，最大值是 $\dfrac{1}{2}$，所以

$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{x^2+1}\leqslant\frac{1}{2}$$

表明函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界。

解法三　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$，所以存在 $N>0$，使当 $|x|>N$ 时，$\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|<1$

又因为在闭区间 $[-N,N]$ 上，函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 连续，故有界，于是存在 $M>0$，使 $|x|\leqslant N$ 时，$\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\leqslant M$。

综上所述，对于定义在$(-\infty,+\infty)$上的任意x，均有$\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\leqslant M+1$成立，这表明函数在$(-\infty,+\infty)$上有界。

点拨　证明函数的有界性设法求出函数的最小值与最大值(如果存在的话)或利用已知的不等式，或利用函数的单调性都是较常用的基本的方法。

【题 10】　求下列函数的反函数。

(1)$y=e^x-e^{-x}$

(2)$y=\begin{cases}4-x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ \dfrac{1}{2}x+8, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$

解析　(1) 由$y=e^x-e^{-x}$得，$e^x=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}$，因为$e^x>0$，所以$e^x=\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$，则$x=\ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right)$，所以反函数为

$y=\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$

(2)$\because$ $0\leqslant x\leqslant 2$时，$y=4-x^2$单调减

$\therefore$ $x=\sqrt{4-y}$ ($\because$ $x\geqslant 0$时，$x=-\sqrt{4-y}$舍去)

且y在$y(0)=4$与$y(2)=0$之间

同理当$2<x\leqslant 4$时，$y=\dfrac{x}{2}+8$单调增

$\therefore$ $x=2(y-8)$，且y在$y(2)=9$(不等号)与$y(4)=10$(含等号)之间。

$\therefore$ $x=\begin{cases}\sqrt{4-y}, & 0\leqslant y\leqslant 4\\ 2(y-8), & 9<y\leqslant 10\end{cases}$

故反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt{4-x}, & 0\leqslant x\leqslant 4\\ 2(x-8), & 9<x\leqslant 10\end{cases}$$

点拨　求$y=f(x)$的反函数$y=f^{-1}(x)$的一般过程为：先将$y=f(x)$看做y已知x未知的方程，解出x(注意x属于定义域)，得$x=f^{-1}(y)$(当反函数存在时，解是惟一的)，最后将x,y互换即为所求。

【题11】 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

解析　这两个极限都是"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型不定式，通常采用分子分母同除以最大的无穷大(变量的最高次幂)的方法。

(1) 分子、分母同除以 n^2，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)^2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}=\frac{(1+1)^2}{1}=4$$

(2) 分子、分母同除以 $\sqrt{x}$，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1$$

点拨　这类型的极限问题不能利用极限的运算法则，因为当变量趋于无穷大时，分子、分母的极限都不存在。

【题12】 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解析　(1) 由于各项分母相同，所以先求和，再求极限，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

(2) 这里各项分母不同，不能求和，应适当将各项放大、缩小，从而利用

两边夹法则。

$$\because \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

$$\therefore \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

而
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$

点拨　这两个题都是求一些项和的极限，应注意的是：虽然每一项的极限均为 0，但和的极限并不等于 0，这是因为只有有限项时才有和的极限等于极限的和，而无限项（当 $n\to\infty$ 时，项数变得无限多）时和的极限可能不等于极限的和。

【题 13】　求极限。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3} - \dfrac{1}{1-x} \right)$

解析　这两个极限都是“$\infty - \infty$”形式，通常采用有理化或通分合并的方法。

(1) 由于含根式，所以对分子进行有理化，同乘以 $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}$，得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) &= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{n^2+1-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \\
&= 2 \times \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

(2) 通分合并，得

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2+x}{1+x+x^2}$$

$$= \frac{2+1}{1+1+1} = 1$$

点拨　这类极容易出现 $\infty - \infty = 0$ 的错误，关于无穷大与无穷小的四则运算有以下一些结论：

(1) $\frac{1}{\infty} = 0\left(\frac{1}{\pm\infty} = 0^{\pm}\right)$，$\frac{1}{0} = \infty\left(\frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty\right)$

(2) $\infty \overset{\times}{\div} a(a \neq 0) = \infty$（$a > 0$ 时 $(\pm\infty) \overset{\times}{\div} a = \pm\infty$；$a < 0$ 时，$(\pm\infty) \overset{\times}{\div} a = \mp\infty$）；

(3) $\infty \times \infty = \infty$，$(\pm\infty) \times (\pm\infty) = +\infty$，$(\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty$；

(4) $\infty + a = \infty((\pm\infty) + a = \pm\infty)$；

(5) $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$，$(\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty$。

这里的每一个符号都代表以该符号为极限的函数。

【题 14】　求下列函数的极限：

(1)(1999.6)* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2}$

(2)(2000.6) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{\sqrt{1-x}-3}{x^2+x-2}$

(1999.6) 为 1999 年全国成人高考专升本考试题，分值 6 分。

解析　这两个极限都是“$\frac{0}{0}$”型不定式，不能直接利用极限运算法则，要先进行变形。

(1) 对分子进行有理化，得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{x^2(\sqrt{1+3x^2}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{\sqrt{1+3x^2}+1}$$

$$= \frac{3}{2}$$

(2) 分子有理化、分母因式分解，得

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{3}}{x^2+x-2} = \lim_{x \to -2} \frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{3})(\sqrt{1-x}+\sqrt{3})}{(x+2)(x-1)(\sqrt{1-x}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{-(x+2)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{1-x}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{-1}{(x-1)(\sqrt{1-x}+\sqrt{3})} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

点拨 对于含根号式、多项式的“$\frac{0}{0}$”型不定式，通常的方法是将其有理化或因式分解，然后约去零因子(公因式)。

【题 15】 求下列函数极限：

(1)(1998.6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

(2)(1997.5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1-3x)}{\sin 2x}$

(3)(2000.4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+5x-6}$

解析 这几个极限问题都是含正弦函数的“$\frac{0}{0}$”型不定式，先将它们化简变形，再利用重要极限或利用等价无穷小代替。

(1) 先分母有理化，再利用重要极限。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x^2}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\sin 4x^2}{4x^2} \cdot \lim_{x \to 0}(\sqrt{x^2+1}+1)$$

$$= 4 \times 1 \times (1+1) = 8$$

(2) 当 $x \to 0$ 时 $\sin 2x \sim 2x, \ln(1-3x) \sim -3x$

所以 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1-3x)}{\sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-3x}{2x} = -\frac{3}{2}$

(3) 当 $x \to 1$ 时 $\sin(x-1) \sim (x-1)$

所以 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+5x-6} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+6)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x+6} = \frac{1}{7}$

点拨 对含三角函数或对数函数或指数函数等“$\frac{0}{0}$型不定式常采用重要极限或用等价无穷小代替的方法。

几种常用的等价无穷小有：当 $\square \to 0$ 时，

$\sin\square \sim \square, \tan\square \sim \square, \arcsin\square \sim \square, \arctan\square \sim \square, \ln(1+\square) \sim \square,$

$e^{\square} - 1 \sim \square, a^{\square} - 1 = e^{\square \ln a} - 1 \sim \square \ln a 1 - \cos\square \sim \frac{1}{2}\square^2, (1+\square)^2 -$