多元样条理论及应用

〔美〕崔锦泰 著
程正兴 译

西安交通大学出版社

多元样条理论及应用

（美）崔锦泰 著

程正兴 译

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书是近年来迅速发展的多元样条方面的唯一专著，总结了多元样条研究中的理论，有效算法以及应用，并且反映了作者在该领域中杰出的研究成果。内容包括： 箱样条与多元截幂；三方向和四方向网上的二元样条函数；二元样条空间；Bézier 表示和光滑技巧；顶点样条、广义顶点样条及应用；箱样条计算的有效算法；多元拟插值与插值；保形逼近、保形插值；对CAGD、梯度场的再构造、信号过程的应用。

本书内容丰富，取材精炼，重点突出。可供数学、计算数学、应用数学以及工科有关专业的高年级大学生、研究生参考或作为教材，也可供从事数值计算的科技工作者参考。

(陕)新登字007号

多元样条理论及应用

(美)崔锦泰 著

程正兴 译

责任编辑 刘 彤

西安交通大学出版社出版

(邮政编码：710049)

西安交通大学轻版印刷厂印装

陕西省新华书店经售

开本850×1168 1/32 印张 7 字数：173千字

1991年11月第1版 1991年11月第1次印刷

印数1—1 000

ISBN7-5605-0456-6/O·78 定价：5.80元

中文版序

1987 年 8 月笔者应邀就多元样条在华盛顿 D.C.作了十次 CBMS-NSF 讲座．程正兴教授获悉 CBMS 讲座将作为 SIAM 专著发表后，表示欲将该书译成中文出版．程教授原按 1988 年 SIAM 专著出版前笔者寄给他的手稿翻译．为使译作更接近于英文原版，译者又对译稿作了修改．笔者对程教授的出色翻译表示极大的赞赏，同时也借此机会再次对 1987 年初夏笔者在西安交通大学作多元样条讲座期间所受到的热情接待表示感谢．

崔锦泰

Charles K. Chui

College Station

Texas, U.S.A.

前 言

这本专著的内容是作者在华盛顿D.C.Howard大学所作“多元样条理论及应用”讲座材料的汇集。

虽然一元样条函数在科学与工程的许多领域中有重要应用，但它还是不能胜任近来技术发展所提出的要求。例如，提供若干参数描述的数学模型以及表现较高维的数据，就经常需要二元和多元函数。在此，通常称为多元样条的多于一个变量的分片多项式函数簇，是在许多应用中最常用的工具。出人意外，直到70年代后期和80年代初期，大家才知道多元样条函数理论及计算方法的很少一点信息。从此以后，多元样条的议题变成了在数学研究中急速扩展的领域。在这个领域中， 不到10年已经写出了数百篇论文，这是出乎常规的。这本专著的目标是对一大批科学与工程界读者介绍这个迷人的主题，它在应用方面有很大的潜力。基于这一想法，本书的方法是遵循平行一元样条分析的理论与发展这一基本观点。为了补偿略去的证明和细节，专著中列出了不同方面、较为丰富的文献目录。

非常感谢自然科学基金自始至终对CBMS的支持。感谢Daniel Williams 教授极好地组织了会议并积极参加了所有的讲座和讨论。特别地，非常感谢与I.Borosh，H.G.Burchard，H. Diamond，E.T.Y.Lee，W.R.Madych，R.Mohapatra，C. Prather，L.Raphael，T.C.Sun，J.D.Ward有启发的讨论。还想感谢美国研究局和自然科学基金对我在该领域研究的支持。

在准备手稿时，我受益于与Rick Beatson及Harvey Diamond的讨论，并且还得到来自Carl de Boor，Martin Buhmann，Wolfgang Dahmen，Eugene Lee，Tom Lyche，Charles Micchelli，Amos Ron与Larry Schumaker评论的帮助。对于他们，我是非常感谢的。另外，我还要感谢Harvey Diamond为这本专著提供的附录。他的贡献帮助提高了方格数据插值的数值有效性。手稿最后的修改是我访问新西兰基督堂市Canterbury大学，Erskine Fellow准备的，我非常感谢该校数学系成员的好客。

最后，我非常感激Adrienne Morgan为我的大部分手稿打字；Rick Beatson，陈关荣与来明俊在用TEX辅助方面花了许多时间；Margaret Chui与何天晓进行了校对；以及Laura Helfrich在SIAM编辑中做了杰出的工作。

崔锦泰

Charles K. Chui

College Station

目　　录

第一章　一元样条函数

很好地理解一元(多项式)样条函数理论并通晓一些有效技巧，对于学习这个迅速发展的多元(多项式)样条函数来说是极为重要的．本章打算概括一些一元样条函数经典理论中的基本内容，这些内容可以平行地延拓到多元的情形．由于我们只把目标局限于基本的论题，有关的材料将在后九章中讨论，因此，一元样条函数的一些美妙的结果和许多重要的应用都没有能够涉及．特别要指出，考虑作为某些极值问题解的样条函数的途径将不在这儿讨论，因为多元类似情形导致另外的研究领域，称为“薄片样条”(参看第九章导引与 Duchon[101])。为了进一步研究一元多项式样条函数的经典理论和方法，我们介绍读者去看 de Boor[20], Schoenberg[180], Schumaker[186]的书。

1.1　等距分划下的 B 样条与截幂　像通常一样，命 χ_A 表示给定集合 A 的特征函数．之后，等距分划下的 n 阶 B 样条 $B_n(x)$递推定义如下：

$$B_1(x)=\frac{1}{2}\left(\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(x)+\chi_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)\right)$$

并且对于 $n=2,3,\cdots$

$$B_n(x)=B_{n-1}*B_1(x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}B_{n-1}(x-t)dt$$

$B_n(x)$的下述性质能使用数学归纳法容易证得．我们通篇用 $\pi_{n-1}=\pi_{n-1}^1$ 表示所有一元 n 阶(或最高 $n-1$ 次)多项式组成的空间。

定理 1.1

(i)　　$B_n\in C^{n-2}(\mathrm{R})$

(ii) 对偶数n, $B_n|_{[j,j+1]}\in\pi_{n-1}$, $j\in\mathbf{Z}$

对奇数n, $B_n|_{[j-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}]}\in\pi_{n-1}$, $j\in\mathbf{Z}$

(iii) $\operatorname{supp}B_n=\left[-\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right]$

(iv) $B_n(x)>0$ 对 $-\frac{n}{2}<x<\frac{n}{2}$ 成立

(v) $\sum_j B_n(x-j)=1$ 对所有x成立

(vi) $\int_{-\infty}^{\infty}B_n(x)dx=1$

(vii) $\int_{-\infty}^{\infty}B_n(x)f(x)dx=\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}f(t_1+\cdots+t_n)dt_1\cdots dt_n$

对于所有属于C(R)的$f(x)$成立

(viii) $B'_n(x)=B_{n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)-B_{n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

在(vii)中，置$f(x)=e^{-ixy}$，有下述推论.

推论 1.1 $B_n(x)$的 Fourier 变换是

$$\hat{B}_n(y)=\left(\frac{\sin(y/2)}{y/2}\right)^n \tag{1.1}$$

下面，使用记号

$$\Delta f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

并且，对于$n=1,2,\cdots$

$$\Delta^n f(x)=\Delta^{n-1}(\Delta f(x))$$

因之，定理 1.1 中(ii)的另一个平凡的结论是下述公式.

定理 1.2

$$(1.2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} B_n(x) g^{(n)}(x)dx = \Delta^n g(0)$$

现在，回忆截幂函数

$$x_+ = \max(x,0)$$

并且

$$x_+^n = (x_+)^n, \qquad n = 2,3,\cdots$$

使用有积分余项的 Taylor 公式以及恒等式

$$(x-t)^{n-1} = (x-t)_+^{n-1} - (-1)^n (t-x)_+^{n-1}$$

有公式

$$(1.3)\qquad \Delta^n g(0) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{\infty} g^{(n)}(x)\Delta^n x_+^{n-1}dx$$

因之，结合(1.2)与(1.3)，有以截幂表示 B 样条 $B_n(x)$的公式，即：

$$(1.4)\qquad B_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\Delta^n x_+^{n-1}$$

1.2 一元样条函数空间 命 $a=t_0<\cdots<t_{m+1}=b$，并且考虑空间

$$S_{t,n} = \{f\in C^{n-2}[a,b]: f|_{[t_i,t_{i+1}]}\in\pi_{n-1}, i=0,\cdots,m\}$$

这个空间称为节点序列为 $\mathbf{t}=\{t_i\}$，$i=1,\cdots,m$ 的 n 阶样条函数空间．为研究这个空间，命 $f\in S_{t,n}$ 并且

$$f|_{[t_i,t_{i+1}]} = p_{i+1}\in\pi_{n-1}$$

那么，由于

$$(p_{i+1}-p_i)^{(k)}(t_i) = 0$$

对 $k=0,\cdots,n-2$ 成立，有

$$(1.5)\qquad p_{i+1}(x) = p_i(x) + c_i(x-t_i)^{n-1}$$

其中 c_i 是一常数．即，如果 $x\in[t_j,t_{j+1}]$，那么

$$(1.6)\qquad f(x) = p_1(x) + \sum_{i=1}^{j} c_i(x-t_i)^{n-1}$$

$$= p_1(x) + \sum_{i=1}^{m} c_i(x - t_i)_+^{n-1}$$

其中 $f(x)$的第二种表示式与 x 的位置无关, 换句话说, $S_{t,n}$ 是线性张成子空间

$$< 1,\cdots,x^{n-1},(x - t_1)_+^{n-1},\cdots,(x - t_m)_+^{n-1} >$$

但显然函数集合

$$B = \{1,\cdots,x^{n-1},(x - t_1)_+^{n-1},\cdots,(x - t_m)_+^{n-1}\}$$

属于 $S_{t,n}$ 并且这个函数集合在$[a,b]$上是线性无关的. 因之, B 是 $S_{t,n}$ 的一组基底. 为了给出只考虑截幂的另外的基底, 让我们向左扩充节点序列 **t**, 扩展后的节点序列为简单起见仍表示为 **t**:

$$\mathbf{t}:\ t_{-n+1} < \cdots < t_{-1} < a = t_0 < \cdots < t_{m+1} = b$$

那么显然, 集合

$$B_t = \{(x - t_{-n+1})_+^{n-1},\cdots,(x - t_m)_+^{n-1}\}$$

也是 $S_{t,n}$ 的一组基底. 为导出由最小支撑元素组成的另外的基底, 我们进一步向右扩充节点序列, 并且扩展后的节点序列再一次表示为

$$\mathbf{t}:\ t_{-n+1} < \cdots < t_{m+1} = b < t_{m+2} < \cdots < t_{m+n}$$

现在, 需要 n 阶差商记号

$$[t_i,\cdots,t_{i+n}]f$$

以定义规范 B 样条

(1.7) $$N_{t,n,i}(x) = (t_{i+n} - t_i)[t_i,\cdots,t_{i+n}]_t(t - x)_+^{n-1}$$

这儿, 差商是按变量 t 作的. 由于 $N_{t,n,i}(x)$ 是函数

$$(t_i - x)_+^{n-1},\cdots,(t_{i+n} - x)_+^{n-1}$$

的线性组合, 因此它显然属于 $S_{t,n}$ 函数集合

$$B_b = \{N_{t,n,-n+1}(x),\cdots,N_{t,n,m}(x)\}$$

在$[a,b]$上的线性无关性是容易验正的, 并由此推得 B_b 也是 $S_{t,n}$ 的一组基底. 换句话说, 任何样条函数都是 B 样条的线性组合. 因此, 有时为了更方便, 考虑双无限节点序列

(1.8) $$\mathbf{t}:\ \cdots < t_{-k} < \cdots < t_k < \cdots$$

其中当 $k\to\infty$时, $t_k\to\infty$而 $t_{-k}\to-\infty$. 考虑被称为的 B 样条级数

$$(1.9)\qquad \sum_i c_i N_{t,n,i}(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i N_{t,n,i}(x)$$

这里, 对于每个 x, 无限级数只是最多 n 项的有限和.

1.3 B 样条的一些基本性质 在 $t_i = i \in \mathbf{Z}$ 的特殊情形, 得出

$$(1.10)\qquad N_{t,n,i}(x) = B_n\left(x - \frac{n}{2} - i\right)$$

其中 $B_n(x)$是 § 1.1 中讨论的 B 样条. 在下述定理中, 我们开列出 $N_{t,n,i}(x)$的一些最重要的性质.

定理 1.4

(i) $\operatorname{supp} N_{t,n,i} = [t_i, t_{i+n}]$

(ii) $N_{t,n,i}(x) > 0$ 对$t_i < x < t_{i+n}$ 成立

(iii) $\sum_i N_{t,n,i}(x) = 1$ 对所有x成立

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} N_{t,n,i}(x)dx = (i_{i+n} - t_i)/n$

(v) $$\left[\frac{1}{i_{i+n} - t_i} N_{t,n,i}(x)\right] = \frac{x - t_i}{t_{i+n} - t_i}\left[\frac{1}{t_{i+n-1} - t_i} N_{t,n-1,i}(x)\right] + \frac{t_{i+n} - x}{t_{i+n} - t_i}\left[\frac{1}{t_{i+n} - t_{i+1}} N_{t,n-1,i+1}(x)\right],$$

对所有x成立

(vi) $N_{t,n,i}(x)$具有最小支撑.

注意, (v)的意思是, 一个 n 阶 B 样条能够表示为具有同样节点序列的两个 $n-1$ 阶 B 样条的线性组合, 并且(v)描述的是一个凸

组合. 因此, 它不仅给出了 B 样条的递推计算公式, 而且还指出一个有趣的几何性质. 然而, 注意到这个计算方案是对于每个固定的 x 进行的. 在 § 1.5 中, 我们将导出一种方法, 使对于 $N_{t,n,i}(x)$的每段多项式给出一种显式公式.

$N_{t,n,i}(x)$的支撑是最小的意思是, 如果 $s\in S_{t,n}$ 的支撑在 $\operatorname{supp}N_{t,n,i}=[t_i,t_{i+n}]$的一个真子区间上, 那么 s 一定等于零. 另一方面, 很明显在支撑等于 $\operatorname{supp}N_{t,n,i}$ 的所有 $s\in S_{t,n}$ 之中, $N_{t,n,i}(x)$是唯一的, 至多差一常数倍.

1.4 B 样条级数 B 样条级数(1.9)是很重要的, 因为它给出了空间 $S_{t,n}$ 中任何样条函数的一种局部表示. 当然, 如果所有系数 c_i 选择为 1, 那么像在定理 1.4(iii)叙述的那样, 级数和处处为 1. 这个"单位分布"性质在样条函数逼近研究中是一个很有用的组成部分, 它可以被考虑作为局部生成常数的一个公式. 为局部生成 π_{n-1} 中其它的多项式, 我们有下述属于 Marsden[153]的恒等式.

定理 1.5 *命 $p\leqslant q$, 那么对于 $t_p\leqslant x\leqslant t_{q+1}$*

$$(1.11)\qquad (y-x)^{n-1}=\sum_{i=p-n+1}^{q}\left[\prod_{l=1}^{n-1}(y-t_{i+l})\right]N_{t,n,i}(x)$$

因而, 对于 $j=1,\cdots,n$

$$(1.12)\qquad x^{j+1}=$$

$$\sum_{i=p-n+1}^{q}(-1)^{j-1}\frac{(j-1)!}{(n-1)!}\left\{D^{n-j}\left[\prod_{l=1}^{n-1}(y-t_{i+l})\right]\Bigg|_{y=0}\right\}N_{t,n,i}(x)$$

由 π_{n-1} 能够局部生成这一事实, 可以期望由样条空间 $S_{t,n}$ 逼近充分光滑函数的逼近阶是 $O(h^n)$, 其中

$$h=\max(t_{i+1}-t_i)$$

事实上, 不仅上述论断是真的, 而且给出 f 的这个最优逼近阶的

样条逼近的明晰公式还能写为形式

$$(1.13) \qquad \sum_i \lambda_i(f) N_{t,n,i}(x)$$

其中每个 λ_i 是具有小的局部支撑的一个线性泛函. 这样的公式称为拟插值公式, 它首先是 de Boor[18]使用点计值线性泛函研究的, 之后 de Boor 与 Fix[27] 进行了研究, 在那里线性泛函 λ_i 包含了函数值以及导数值. 在 Luche 与 Schumaker[151]的研究中, 用差分代替了导数.

如果选取

$$(1.14) \qquad \lambda_i(f) = f\left(\frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+n-1}}{n-1}\right)$$

即, $\lambda_i f$ 取 $N_{t,n,i}(x)$ 支撑内部节点平均值的点上 $f(x)$的值, 那么, 公式(1.13)给出了称为 $f(x)$的 Schoenberg"变缩"样条逼近$(Vf)(x)$. 虽然这个简单逼近只产生 $O(h^2)$的逼近价, 但它保持函数 $f(x)$的一些几何形状特征. 这个结果还能用样条函数的其它重要性质验证, 即 Vf 的变号数不超过 f 的变号数(参看[20,186]). 的确, 由公式 1.12 得到

$$(Vg)(x) := \sum_i g\left(\frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+n-1}}{n-1}\right) N_{t,n,i}(x) = g(x)$$

对所有 $g \in \pi_1$ 成立, 我们能够推出, 对于所有 $g \in \pi_1$, $Vf - g = V(f - g)$的变号数不超过 $f - g$ 的变号数, 选取 $g = 0$, 有

$$f \geqslant 0 \Rightarrow Vf \geqslant 0$$

选取 g 为任何常数, 有

$$f\uparrow \Rightarrow Vf\uparrow$$

而选取 g 为任何直线, 有

$$f\text{凸} \Rightarrow Vf\text{凸}$$

在由 $S_{t,n}$ 得到的插值问题中, (1.9)的样条级数也是重要的. 当然, 一个重要的问题是决定样点集 $\{x_i\}$ 的容许位置

$$\cdots < x_1 < x_2 < \cdots$$

下述属于 Schoenberg 与 Whiney[182]的结果完全解决了这个问题．命 $a \leqslant x_1 < \cdots < x_{m+n} \leqslant b$，并且节点序列 t 如§1.2 中那样定义之后，我们有下述定理．

定理 1.6　矩阵

$$[N_{t,n,i}(x_j)], \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m+n$$

非奇如且仅如 $t_i < x_i < t_{n+i}$ 对于所有 $i=-n+1, \cdots, m$ 成立．换句话说，对每个 i，样点 x_i 必须位于 $N_{t,n,i}$ 支撑的内部，以便保证插值问题是可解的．

1.5　B 样条计算　计算 $N_{t,n,i}(x)$有许多算法可用，我们可以分它们为三种类型．第一种类型是使用者对每个固定的 x 值用定理 1.4(v)的递推关系计算 $N_{t,n,i}(x)$．当然，如果我们希望对于不同于 x 的 y 决定 $N_{t,n,i}(y)$，就要进行一次同样的过程．第二种类型是基于一些不同的递推关系给出一个有效的逼近方案．这类算法对于很有效地表现曲线是实用的，并且算法通常是由"细分"发展的．若干这样的算法在参考文献中是可以得到的．下面，我们讨论被称为线平均的算法(参看 Cohen, Lyche 与 Riesenfeld[79]，以及 Dahmen 与 Micchelli[94,96])，当然，它只对均匀分划是有效的．

置

$$N_n(x) = B_n\left(x - \frac{n}{2}\right)$$

它具有支撑[0, n]并且节点在整数 Z 上．考虑 $N_n(x)$作为一个 n 阶样条并且节点在$\frac{1}{p}$Z 上，其中 p 为任何正整数，能表示 $N_n(x)$为 B 样条 $N_n(px-j)$的线性组合

$$(1.15) \qquad N_n(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_p^n\left(\frac{j}{p}\right) N_n(px-j)$$

对于某些常数$a_p^n\left(\frac{j}{p}\right)$成立．取(1.15)两边的 Fourier 变换，有