机械结构分析的有限元法

杨荣柏 主编

华中理工大学出版社

内 容 简 介

本书是有限元法的基础性读物。主要内容包括机械结构的静力学、动力学、传热与热变形三个方面的有限元法。以弹性力学的平面问题为重点，系统阐述有限元法的原理、计算方法与步骤的全过程。在此基础上讨论轴对称问题、空间问题、薄板弯曲问题以及梁杆结构等的有限元法。各章列举了有限元法在机械结构中应用的实例。最后一章还介绍了适用于连续梁和机械传动链作振动计算的传递矩阵法。

在附录中介绍了有限元法中的变分法原理；平面问题和梁弯曲问题的有限元法计算程序。

编写中力求深入浅出、概念清晰、思路简明，便于初学者掌握。

本书可作为高等学校机械类专业有限元法课程的教学用书，也可供机械设计人员自学参考之用。

机械结构分析的有限元法

杨荣柏　主编

责任编辑　李世锐

·

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社汚阳印刷厂印刷

·

开本：787×1092 1/16　印张：14.5　字数：338 000

1989年2月第1版　1989年2月第1次印刷

印数：1-3 000

ISBN 7-5609-0197-2/TH·23

定价：2.95元

前　言

有限元法是现代工程设计计算的一种有效的数值计算方法。对于复杂的机械和机床结构的静态、动态与热态计算分析，采用有限元法借助计算机运算，可获得满意的结果。

现代机械设计人员应具备有限元法方面的知识。本书是为机械工程各专业学生学习有限元法而编写的入门教材，因此，在叙述上尽量做到深入浅出，以适应机械类专业学生具备的基础知识。

本书主要内容包括机械结构的静力学、动力学、热传导与热变形三方面的有限元法。

第一章为有限元法概述，介绍有限元法的概貌。

第二章至第五章为结构静力学有限元法。其中第二章阐述了弹性力学平面问题有限元法的基本原理、计算步骤和方法的全过程，是本书的重点，也是后续各章的基础。这几章中涉及到的弹性力学知识都在各章开头作了扼要介绍。

第六章为结构动力学有限元法。学习本章时可参考机械振动中多自由度振动系统的原理与求解方法的有关资料。

第七章为温度场和热变形的有限元法。本章单元分析的推导过程，用到了变分公式，在附录一中作了详细介绍。

第八章为传递矩阵法。它同前面各章所讲的有限元法相比，在求解的方法上是不相同的。但是，这种计算方法也象有限元那样是建立在离散的计算模型的基础上。

本书第一稿写于1981年，经教学实践后于1984年修改的第二稿印成讲义，在机制专业本科与研究生选修课中使用过几次，教学效果良好。本书由杨荣柏（第一章、第二章、第三章、第六章、附录）、谢月云（第五章、第七章、附录）、钟华珍（第四章、第八章）编写。杨荣柏担任主编。

编　者　1986.12.

目　录

第一章 有限元法概述

§1-1 绪 言

在机械工程设计计算中，对一些复杂的机械零部件，例如机座、机架、工作台和箱体等，过去应用材料力学和弹性力学的方法来计算，需要对原结构及其受力与约束状态作很大的简化，因而使得计算精度差，计算结果往往与实际情况相差很远，甚至失去分析计算的意义。同时，由于采用一般力学公式和简单计算工具，使得计算过程冗繁而且花费很多时间。所以，长期以来不得不采用类比的经验设计方法。在验算机械结构的强度与刚度时，为了可靠起见，常常选择过大的安全系数，造成所设计的机械结构尺寸与重量偏大。另一方面，由于计算分析的粗略性，也可能出现某些薄弱环节或结构局部的强度或刚度不足。

近二十多年发展起来的有限元法是分析计算复杂机械结构和工程结构极为有效的方法，它基本上解决了过去对复杂机械结构作精确计算的困难，对于改变传统的经验设计方法起了重要作用。

有限元法的起源可追溯到40年代。1943年R.Courant从数学角度提出了有限元法的基本观点。50年代中期，由于分析飞机复杂结构的需要，从结构力学中产生了结构分析的矩阵方法。它的基本思想是，把整个结构看作由有限个力学小单元连结而成的集合体来分析，并引入矩阵代数作为分析的工具。1960年R.W.Clough首先在分析弹性力学平面问题中提出了“有限元法”(The Finite Element Method)这一术语，随即获得广泛的承认。60年代以来，随着电子计算机的发展与应用，有限元法得到很大的发展。由弹性力学平面问题扩展到空间问题与板壳问题；由静力平衡问题扩展到稳定性与动力学问题；由弹性问题扩展到弹塑性与粘弹性问题、疲劳与断裂问题等。与此同时，有限元法的数学理论基础得到不断的加强，从而使有限元法的应用领域由固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁力学等方面。现在，有限元法在理论上与实践上已经达到成熟的阶段，并且已研制出一些功能较强的实用计算程序，如著名的SAP (Structural Analysis Program)程序系统，具有静力分析和五种动力分析的功能，并配有使总刚度矩阵带宽优化和几种绘图程序，可将计算结果绘成图形输出。目前，在飞机、汽车、船舶、机床、起重机以及其他复杂的工程结构的设计计算中，采用有限元法进行静力、动力和热力特性的分析计算已很广泛。现在有限元法不仅用作单纯的结构计算，而且进而与结构优化设计和计算机辅助设计结合起来朝着设计自动化方向发展。然而，有限元法作为一种有效的计算方法，随着科学技术的发展，还将在深度与广度上继续发展。例如，近年来在研究新型单元、自动划分网格、扩大应用领域以及大型程序微机化等方面都有许多新的进展。

机械结构一般都是弹性体，本书讨论的机械结构计算的有限元法，实际上是以弹性力学中的有限元法为基础。

§1-2 有限元法的特点

工程和机械结构的力学分析方法可分为解析法和数值法两类。象材料力学与弹性力学这些经典力学的求解方法就属于解析法，它的基本方法是从静力、几何、物理三个方面综合考虑，建立描述结构的平衡、应力、应变、位移之间的关系的微分方程，然后利用边界条件求得微分方程的解析解。这种方法在理论上是严密精确的，但是只限于求解一些简单问题，对于较复杂的结构是无能为力的。

数值法是一种近似计算方法，"有限差分法"与"有限元法"都属于数值法。有限差分法是在解析法的基础上进行近似数值计算，即把连续体力学导出的微分方程离散成近似的差分方程，便于运算而求得数值解。这种方法只是在求解微分方程时作数学上近似处理，因此称为数学近似方法。它的优点是计算程序较简单，收敛性好。但是，对于几何形状不规则的、边界条件复杂的结构，难于建立表征整个结构力学特性的微分方程的情况下，就无法应用有限差分法了。

有限元法是在力学模型上近似的数值方法，它的基本思想可概括为一句话："先分后合"或"化整为零又积零为整"。具体地说，就是将连续体或结构划分为许多单元，通过一些节点把有限个单元连成集合体代替原来的连续体或结构，即把连续体转化为离散模型来进行力学分析。根据分块近似的思想，选择简单的函数近似地表示单元内位移变化规律，利用力学推导建立单元的平衡方程组，再把所有单元的方程组集合成表示整个结构的力学特性的代数方程组，最后引入边界条件求解代数方程组获得数值解。由此可知，有限元法同解析法、有限差分法不同之点在于，它是从力学模型上采用分块近似，避免了求解微分方程这一繁难的环节。有限元法在理论推导中采用了矩阵方法，在实际计算中采用电子计算机，因此，它具有下列一些优点：

（1）物理概念清晰，容易理解和掌握；

（2）适应性强，应用范围广泛，许多复杂的工况和边界条件都可灵活地加以考虑；

（3）由于采用矩阵表达和运算，因而便于编制计算机程序。

§1-3 有限元法分析的过程

有限元法分析的过程可分为三大步骤：结构离散化、单元分析和整体分析。下面扼要介绍这几个步骤，以便了解有限元法分析的全貌。

一、结构离散化

结构离散化是把实际结构划分为若干单元，使力学模型变成离散模型。这是有限元法分析的第一步，是很重要的一步，因为它关系到计算精度和计算效率。

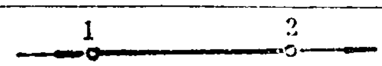
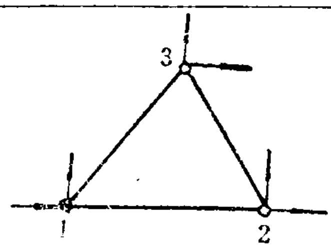
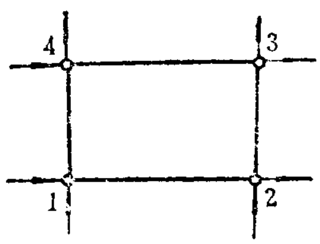
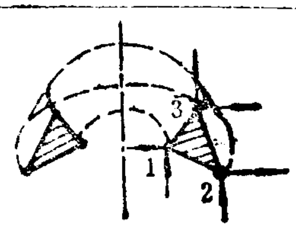
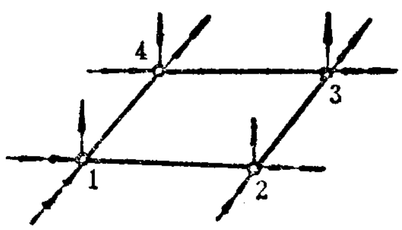
实际结构应该划分成什么样的单元，这要根据结构本身的形状和受力情况而定，表1-1列出了常用的一些典型单元。其中梁杆类单元由于位移、应变和应力只是一个坐标（沿单元轴线的坐标）的函数，因此称为一维问题。这类单元一般只有两个节点，每个节点的自由度数由受力状态及产生的位移分量来确定。例如桁架结构的杆单元只受轴向力，各节点只有沿轴向一个位移，所以，节点的自由度为1。平面刚架结构的梁单元既受轴向力又受弯矩，节点

有三个位移分量（沿轴向、法向线位移和转角位移），故节点的自由度为3 。

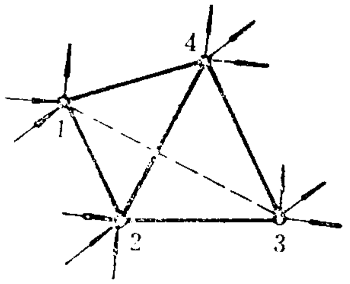
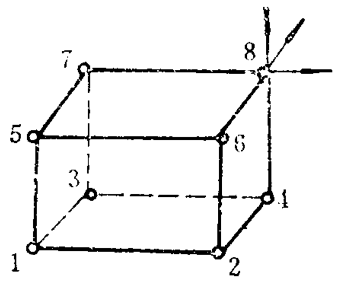
对于连续体分为二维问题和三维问题。二维问题包括平面类与轴对称类单元，它们的位移、应变与应力为两个坐标的函数，常用三角形和四边形单元。三维问题就是空间问题，单元中位移、应变与应力为三个坐标的函数，单元形状有四面体和六面体。这些单元的节点数、节点自由度数及应用示例都列入表1-1中。

表1-1列出的只是常用单元的类型，实际应用中还有在这些单元的基础上发展起来的其他一些单元，例如在三角形各边中点增加一个节点的六节点三角形单元等。另外，对于一个具体结构有时可以包含几种类型的单元，例如机床的立柱可以划分成三角形、四边形和梁等几种单元。

表1-1 典型单元

单元类型				节点数	节点自由度	典型应用
一维单元		杆		2	1	桁架
一维单元		梁		2	3	平面刚架
二维单元	平面问题	三角形		3	2	平面应力
二维单元	平面问题	四边形		4	2	平面应力
二维单元	轴对称问题	三角形		3	2	轴对称物体
二维单元	板弯曲问题	四边形		4	3	薄板弯扭

续 表

三维单元	四面体		4	3	空间问题
	六面体		8	3	空间问题

有限元法既然是近似的数值法，它的计算精度必然取决于所划分单元的形状、大小、多少以及分布情况等。一般说来，划分的单元愈多、愈密集、也就愈能反映实际结构的状况，计算精度就愈高。但是，却会使计算工作量增大，计算时间增长。因此，必须两方面兼顾，在满足计算精度要求下，尽可能使单元数少些。

二、单元分析

结构离散化之后，进行单元的力学分析，以导出“单元刚度矩阵”。有限元法的推导方法有三种：直接法、变分法和加权余数法。直接法的概念浅显，易于理解，适用于较简单的问题。变分法把有限元法归结为求泛函的极值问题（见附录一），例如，固体力学中的最小位能原理与最小余能原理都是变分问题。有限元法采用变分法推导有更深刻的数学概念，因而扩大了有限元法的应用范围。本书第七章有关热传导的有限元法就利用了变分法。加权余数法不需要利用泛函，可直接从微分方程求出近似解，因此，泛函不存在的某些领域也能采用有限元法，进一步扩展了有限元法的应用范围。为了便于初学者理解与掌握，本书采用直接法推导。

单元刚度矩阵推导过程可按下列步骤进行：

1．选择位移模式（位移函数）

描述单元中各点位移变化规律的函数称为位移模式或位移函数。一般弹性体受力变形后内部各点位移变化情况是很复杂的，但是，在小单元的区域内，可以假设位移用坐标的某种简单函数来近似，例如，假定线性函数或一定幂次的多项式作为位移模式。这是根据任何复杂函数可用多项式来逼近，以及多项式便于数学运算的考虑。

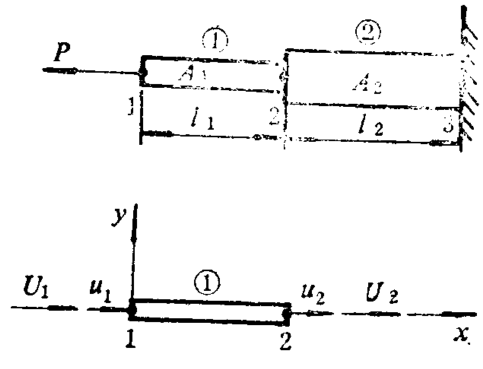


图1-1

现举一个简单例子来说明，如图1-1：变截面直杆受拉力P，分为两个等截面单元①、②。对于这类

单元①可分析如下：

该单元长度为l，截面为A，节点为1，2，单元在节点力U_1、U_2作用下，产生节点位移u_1、u_2。显然，单元内任一点的位移u随该点坐标位置x而不同，也就是u是x的函数。现假定位移u是x的线性函数，即位移模式为

$$u=\alpha_0+\alpha_1 x \tag{a}$$

由此位移模式导出任一点位移与节点位移的关系：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在节点 1 处，} x=0, & u_1=\alpha_0; \\ \text{在节点 2 处，} x=l, & u_2=\alpha_0+\alpha_1 l。\end{array}\right\} \tag{b}$$

由式(b)得到 $\alpha_0=u_1$，$\alpha_1=-\frac{u_1}{l}+\frac{u_2}{l}$，代入式(a)整理后，得

$$u=\left(1-\frac{x}{l}\right)u_1+\frac{x}{l}u_2。 \tag{c}$$

式(c)为用节点位移u_1、u_2表示单元内任一点位移的关系式，实际上就是用节点位移的线性插值来得到任一点位移，所以，称式(c)为位移插值函数，其中$\left(1-\frac{x}{l}\right)$、$\frac{x}{l}$称为插值基函数。

令
$$N_1=1-\frac{x}{l},\quad N_2=\frac{x}{l},$$

则式(c)写成

$$u=N_1u_1+N_2u_2=[N_1\ \ N_2]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix},$$

即
$$u=[N]\{\delta\}^e, \tag{1-1}$$

其中，N_1、N_2称为形函数；$[N]$为形函数矩阵；$\{\delta\}^e$为节点位移向量。

2．由位移插值函数导出用单元节点位移表示的单元应变表达式

取单元中微小段dx来考察，如图1-2所示，设此微小段原来位置为ab，变形后移到$a'b'$。由图可见，应变ε可表示为

$$\varepsilon=\frac{(u+du)-u}{dx}=\frac{du}{dx}。 \tag{d}$$

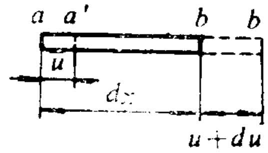


图1-2

上式表示应变等于位移沿x轴的变化率，即位移与应变之间的几何关系，称为一维问题的几何方程。将式(1-1)代入上式，得

$$\varepsilon=\frac{d}{dx}[N]\{\delta\}^e=\frac{d}{dx}\left[1-\frac{x}{l}\ \ \frac{x}{l}\right]\{\delta\}^e$$

$$=\left[-\frac{1}{l}\ \ \frac{1}{l}\right]\{\delta\}^e,$$

可写成
$$\varepsilon=[B]\{\delta\}^e, \tag{1-2}$$

式中，$[B]$称为应变矩阵或几何矩阵。

3．由应变表达式(1-2)导出用单元节点位移表示单元应力的表达式

由材料力学给出的应变与应力的关系式

$$\sigma=E\varepsilon, \tag{e}$$

将式(1-2)代入之，得

$$\sigma = E[B]\{\delta\}^e = [S]\{\delta\}^e, \tag{1-3}$$

式中，$[S]$称为应力矩阵；E为弹性常数。

4．利用虚功方程建立单元节点力与节点位移之间的关系式，即单元刚度方程

$$\{F\}^e = [K]^e\{\delta\}^e \quad , \tag{1-4}$$

式中，$\{F\}^e = [U_1 \quad U_2]^T$为单元节点力向量；$[K]^e$为单元刚度矩阵。在后面的章节中将导出

$$[K]^e = \int_V [B]^T[D][B]dV, \tag{1-5}$$

式中，$[D]$为弹性矩阵，这里的一维单元中的E就相当于此矩阵。

将应变矩阵$[B]$代入式(1-5)，并用E代替$[D]$，即可求得杆单元刚度矩阵如下：

$$[K]^e = \int_0^l \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{l} \\ \dfrac{1}{l} \end{Bmatrix} E\left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right]A\,dx = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}。 \tag{1-6}$$

把上述推导单元刚度矩阵过程归纳成下面简图更为简明：

$$\begin{tikzcd}
\{\delta\}^e \arrow[r] \arrow[r, bend right, dashed, "{[B]}"'] \arrow[rr, bend right=40, dashed, "{[S]=[D][B]}"'] \arrow[rrr, bend right=50, dashed, "{[K]^e=\int_V [B]^T[D][B]dV}"'] & \{\varepsilon\} \arrow[r] & \{\sigma\} \arrow[r] & \{F\}^e
\end{tikzcd}$$

三、整体分析

整体分析是将原结构作为由若干单元组成的离散结构来分析。具体内容包括：

1．由各单元刚度矩阵组集成整个结构的总刚度矩阵$[K]$

如图1-1所示结构有两个单元①、②，它们的单元刚度矩阵由式(1-6)可分别写成

$$[K]^{①} = \frac{EA_1}{l_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ [K]^{②} = \frac{EA_2}{l_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}。$$

因为整个结构有三个节点，而节点2是两单元的连接点。因此要把单元刚度矩阵扩大为3×3阶，矩阵中各元素的位置与节点号相对应，然后相加成总刚度矩阵：

$$[K] = \begin{bmatrix} \dfrac{EA_1}{l_1} & -\dfrac{EA_1}{l_1} & 0 \\ -\dfrac{EA_1}{l_1} & \dfrac{EA_1}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{EA_2}{l_2} & -\dfrac{EA_2}{l_2} \\ 0 & -\dfrac{EA_2}{l_2} & \dfrac{EA_2}{l_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{EA_1}{l_1} & -\dfrac{EA_1}{l_1} & 0 \\ -\dfrac{EA_1}{l_1} & \dfrac{EA_1}{l_1}+\dfrac{EA_2}{l_2} & -\dfrac{EA_2}{l_2} \\ 0 & -\dfrac{EA_2}{l_2} & \dfrac{EA_2}{l_2} \end{bmatrix}。 \tag{1-7}$$

2．把各单元的节点载荷组集成总节点载荷向量$\{\boldsymbol{R}\}$

节点载荷包括直接作用在节点上的外载和不作用于节点的外载经移置到节点上的等效节点载荷。本例只有节点1上有拉力P，故总节点载荷向量为

$$\{\boldsymbol{R}\}=\begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}。$$

而整个结构的节点位移向量为

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

于是可列出整个结构总刚度方程

$$\begin{bmatrix} \dfrac{EA_1}{l_1} & -\dfrac{EA_1}{l_1} & 0 \\ -\dfrac{EA_1}{l_1} & \dfrac{EA_1}{l_1}+\dfrac{EA_2}{l_2} & -\dfrac{EA_2}{l_2} \\ 0 & -\dfrac{EA_2}{l_2} & \dfrac{EA_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

简记为

$$[K]\{\delta\}=\{R\}。\tag{1-8}$$

3．根据边界条件，修改总刚度方程，求解这个线性方程组，得到各节点的位移，进而再求各单元内的应力。

这一步骤将在以后章节中再详述。

第二章　平面问题

平面问题是弹性力学中研究的一个基本问题，平面问题的有限元法也是弹性力学有限元法的基本问题，它不仅本身具有典型性，而且在机械结构中应用很广泛。

机械结构实际上都是三维空间物体，理应作为空间问题来分析。但是，在结构的特定形状与受力状态下，可以近似地简化为平面问题来处理，这样可使计算分析工作大为简化，同时亦能满足工程计算精度的要求。例如，直齿圆柱齿轮可在垂直于孔轴线的截平面内作平面应力分析。又如机床的立柱是由一些板壁组成的，可以把板壁作为平面问题来分析，并利用坐标转换方法，把位于不同坐标方向的平板转换到统一坐标上来计算。象这样类似的机械结构还有机座、床身、横梁等。由此可见，许多机械结构都可以平面问题为基础进行有限元法分析。因此平面问题的有限元法又具有普遍性。本章作为全书的重点，较全面地介绍有限元法的基本概念、原理与分析方法，作为学习以后各章的基础。

用有限元法分析平面问题，需要用到弹性力学的一些基本方程，在讲平面问题有限元法之前，先介绍弹性力学的有关基本知识。

§2-1　外力、应力、应变和位移

关于外力、应力、应变和位移的概念在材料力学中都已论述过，这里对这些概念和它们的通用符号再集中地加以说明。

1. 外力　通常，作用于物体的外力可以分为体积力（简称体力）和表面力（简称面力）。体力是分布在物体体积内的力，例如重力、惯性力和磁性力等。单位体积的体力在坐标轴x、y、z上的投影X、Y、Z称为体力分量，沿坐标轴正向的为正，沿坐标轴负向的为负。

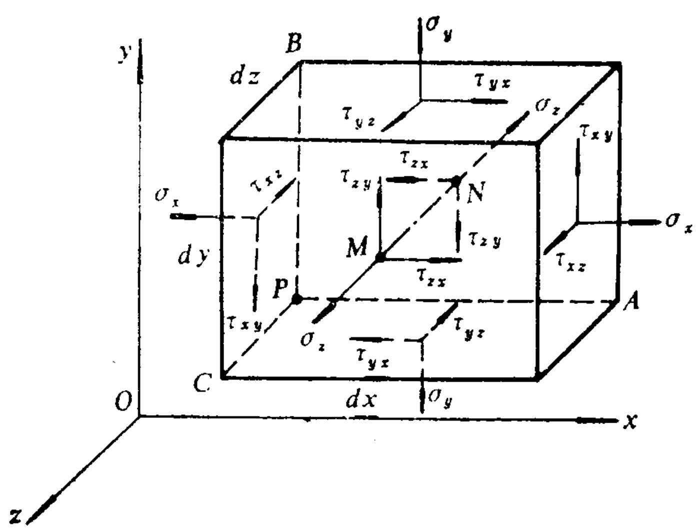


图2-1

面力是作用在物体表面上的力，可以是集中力，也可以是分布力，例如流体压力和物体之间的接触压力等。单位面积的面力在坐标轴x、y、z上的投影$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$称为面力分量，沿坐标轴正向的为正，沿坐标轴负向的为负。

2. 应力　弹性体受外力后，其内部将产生应力。为了分析弹性体内某一点的应力状态，可以从弹性体内截取以某点P为顶点的微小平行六面体PABC来考察。为简便起见，令其棱边平行于各坐标轴，边长分别为极小量dx、dy、dz，如图2-1。

微小六面体（简称微元体）的每一个

面上的应力可以分解为三个应力分量：一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标轴平行。各应力分量表示的符号规定为：在垂直于x轴的面上，正应力沿x轴方向作用用σ_x表示，两个剪应力用τ_{xy}和τ_{xz}表示，其中第一个脚标x表示该剪应力作用的面垂直于x轴，第二个脚标y和z表示剪应力作用的方向分别沿着y轴和z轴。同样，垂直于y轴的面上的三个应力分量表示为σ_y，τ_{yx}，τ_{yz}；垂直于z轴的面上的三个应力分量表示为σ_z，τ_{zx}，τ_{zy}。

应力分量的正负是这样规定的：外法线沿坐标轴正方向的平面称为正面，如图2-1中的右、上、前三个面，正面上的应力分量沿坐标轴正方向的为正，沿坐标轴负方向的为负，所以图2-1中所示的三个正面上的应力分量都是正的。相反，外法线沿坐标轴负方向的平面称为负面，如图2-1中的左、下、后三个面，负面上的应力分量是沿坐标轴负方向的为正，沿坐标轴正方向的为负，所以图中所示三个负面上的应力分量也是正的。

由上可知，微元体上包含有三个正应力分量和六个剪应力分量。但是，剪应力之间有互等关系，根据材料力学已得出的结论：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的，力的大小相等，正负号也相同。从图中可以看出，

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}。$$

因此，微元体所代表的P点应力状态可以用六个应力分量σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}来描述，用向量表示为

$$\{\sigma\}=[\sigma_x\ \ \sigma_y\ \ \sigma_z\ \ \tau_{xy}\ \ \tau_{yz}\ \ \tau_{zx}]^T。\tag{2-1}$$

3. 位移 在外力作用下，弹性体内各点将产生位置的移动。任一点的位移可以用它在坐标轴x、y、z上的投影u、v、w来表示，如图2-2，某点P位移至P′，向量PP′在坐标轴上的投影u，v，w称为该点的位移分量。位移分量沿坐标轴正方向的为正，反之为负。位移向量PP′表示为

$$\{\delta\}=[u\ \ v\ \ w]^T。\tag{2-2}$$

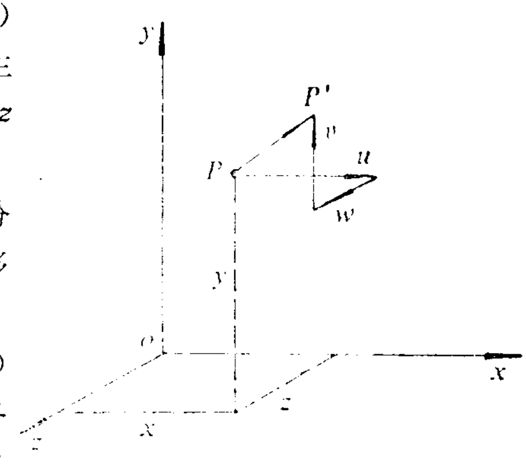


图2-2

4. 应变 如上所述，在外力作用下，弹性体内各点会产生位移，而各点的位移一般是不相同的，各点之间的距离也就有了改变，从而物体将发生形状的改变，即所谓的形变。由于物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示，因此，物体的形变也可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了描述物体内部某点P的形变，从这点截取微元体，考察其三个棱边PA、PB、PC，如图2-1所示。物体产生形变后，这三个棱边的长度以及它们之间的直角都有所改变。各棱边（微小线段）每单位长度的伸、缩量称为正应变（亦称线应变），通常用ε表示。平行于坐标轴x、y、z的线段PA、PB、PC的应变分别表示为ε_x、ε_y、ε_z。正应变以伸长为正，缩短为负。各棱边之间直角的改变称为剪应变，通常用γ表示。γ_{xy}表示沿坐标轴x和y两方向的线段（即PA与PB）之间直角的改变，显然，$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$。余可类推。剪应变以直角变小为正，直角变大为负。由此可见，物体内任一点的形变可用六个应变分量ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}来描述，它们与六个应力分量相对应。六个应变分量可表示为向量形式

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x\ \ \varepsilon_y\ \ \varepsilon_z\ \ \gamma_{xy}\ \ \gamma_{yz}\ \ \gamma_{zx}]^T\tag{2-3}$$

须要着重说明，一般情况下，物体内任一点的体力分量、面力分量、应力分量、应变分量和位移分量都随点的位置不同而不同，因而它们都是点的坐标的连续函数。

求解弹性力学问题时，通常总是已知物体的几何形状与尺寸、物体的弹性常数、物体所受的体力与面力，以及物体的受约束情况，需要确定的未知量是应力分量、应变分量和位移分量。

§2-2 两种平面问题

任何一个弹性体都占有三度空间，是空间物体，作用在其上的外力，一般都是空间力系。因此，任何一个实际工程问题都是空间问题，都必须同时考虑沿x、y、z三个坐标轴所有的应力分量、应变分量和位移分量，而且它们都是坐标x、y、z的函数。这样的问题称为弹性力学空间问题。

但是，如果所考察的弹性体具有某种特殊的形状，例如物体的空间三个尺寸中的一个尺寸远小于或远大于其他两个尺寸，并且承受的是某些特殊的外力，就可以把空间问题简化为近似的平面问题。这样处理，分析和计算工作量将大为减少，而得到的结果一般仍然可以满足工程上对精度的要求。这种情况只须考虑沿x、y两个坐标轴的应力分量、应变分量和位移分量，它们也仅是坐标x、y的函数。这就是所谓的弹性力学平面问题。

弹性力学平面问题分平面应力问题和平面应变问题两种，分别介绍于下：

一、平面应力问题

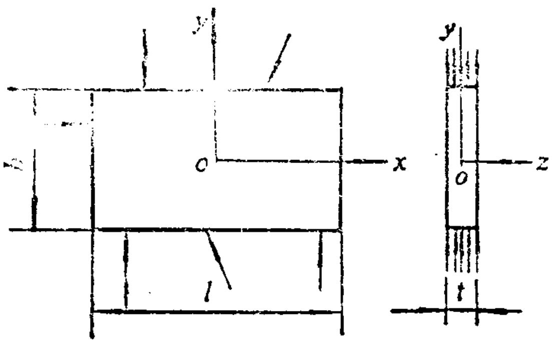


图2-3

如图2-3所示的厚度小的等厚平板，它沿z轴的厚度尺寸远小于沿x、y轴两方向的尺寸。在平板边界上受有平行于板面并沿厚度方向均匀分布(或对称分布)的面力，同时，体力也平行于板面并且沿厚度方向均匀分布。由于板的前后表面上没有外力作用，显然在该两表面上的各点不会产生任何应力，即当 $z=\pm\frac{t}{2}$时，

$$\sigma_z=0,\quad \tau_{zx}=0,\quad \tau_{zy}=0。$$

至于在板的内部，因为板很薄，外力又沿厚度均匀分布，应力沿着板的厚度又是连续分布的，所以，可以认为在整个平板的所有各点沿z轴的正应力分量以及垂直于z轴的面上的剪应力分量均为零，即$\sigma_z=0, \tau_{zx}=\tau_{zy}=0$。又由于剪应力的互等性，有$\tau_{xz}=0$，$\tau_{yz}=0$。于是上节作为空间问题需用六个应力分量来描述某点的应力状态，而在这里只需用平行于xoy面的三个应力分量σ_x, σ_y，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$来描述平板中任一点的应力状态。这种问题就称为平面应力问题，其应力向量可表示为

$$\{\sigma\}=[\sigma_x\ \ \sigma_y\ \ \tau_{xy}]^T。\tag{2-4}$$

在平面应力问题中，因为板很薄，应力分量、应变分量和位移分量，都认为不沿厚度变化。也就是它们只是坐标x和y的函数，不随坐标z而变化。

许多机械零、部件可近似的作为平面应力问题来分析，如齿轮、盘形凸轮、发动机的连杆等；又如机器或机床的床身、立柱、横梁等结构、可以看成由若干平板组成，也可用平面应力问题来分析。

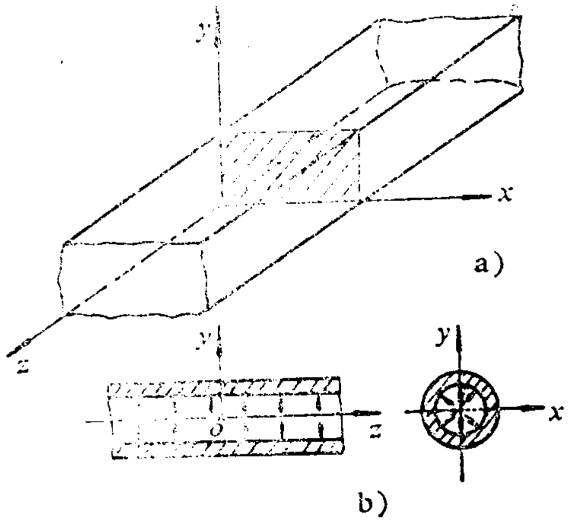


图2-4

二、平面应变问题

与薄板的外形相反，设物体是很长很长的柱形体，其横截面沿长度方向不变，如图2-4 a)所示，物体沿z轴方向的尺寸远大于沿x、y轴两个方向的尺寸。物体柱面上承受平行于横截面且沿长度均匀分布的面力，同时，体力也平行于横截面且沿长度均匀分布。假想该柱形体为无限长，则远离两端的部位可以认为不会有沿z轴方向的位移，即位移分量$w=0$，而只有沿x轴和y轴两个方向的位移。因而，沿z轴方向的正应变也等于零，即$\varepsilon_z=0$。这样，对整个物体的研究，只需从物体中截取平行于xoy面的任一单位厚度的薄片进行分析。显然，薄片上任一点的位移都平行于xoy面，所以，这种问题称为平面位移问题，习惯上则称为平面应变问题。

因为沿z轴方向的位移分量为零，意味着沿z轴方向的伸缩受阻止，所以，任一横截面上的正应力分量σ_z一般并不等于零，这一点与平面应力问题是不相同的。

由于假想这种柱形体为无限长，可以用单位厚度薄片的分析代替整个物体的研究，因而任一横截面都可看作是对称面。所以，横截面上的剪应力分量等于零，即$\tau_{zx}=0$，$\tau_{zy}=0$，又按剪应力互等定律，有$\tau_{xz}=0$，$\tau_{yz}=0$。

属于这类问题的机械结构有轧钢机的轧辊、花键轴、滚子轴承的滚子、高压管道（图2-4b)）以及机床上的导轨等。

§2-3 平衡微分方程

求解弹性力学问题要从静力学、几何学和物理学三个方面综合考虑，导出这三个方面的基本方程，然后才能用数学方法来求解。从本节起介绍弹性力学的三个基本方程，本节先讨论静力学的平衡微分方程。所谓平衡微分方程就是根据静力平衡条件推导出来的应力分量与体力分量之间的关系方程式。

在平面问题中，可以从平板（图2-3）或长柱体（图2-4)中截取出微元体进行力的平衡分析，如图2-5所示。在x、y方向的尺寸分别取极小量dx、dy，而z方向的厚度取1单位。

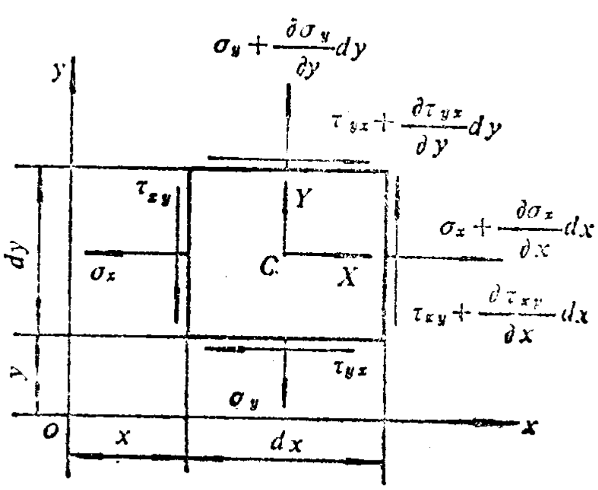


图2-5

一般说来，物体内各点的应力分量是不相同的，它们是坐标x、y的函数，因为是平面问题，所以与坐标z无关。虽然考察的是微元体，但是左右两个侧面和上下两个侧面的位置

坐标都有微小的差量，分别为dx和dy。因此作用在这两对侧面上的应力分量也应该有一个微小的差量。

设作用在左侧面上的正应力为σ_x，那么，作用在右侧面上的正应力，由于位置坐标有一增量dx，必然使正应力也有一个增量$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx$。其中偏导数$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$是正应力$\sigma_x$沿$x$轴方向的变化率，它乘上$dx$就是在$dx$长度上的总变化量，亦即应力增量。因此，作用在右侧面上的正应力为 $\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx$。其余可类推如下：

左侧面的剪应力为τ_{xy}，则右侧面的剪应力为$\tau_{xy}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx$。下侧面的正应力和剪应力分别为$\sigma_y$和$\tau_{yx}$，则上侧面的正应力和剪应力分别为$\sigma_y+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}dy$和$\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy$。从理论上讲，在同一侧面上的应力也应该各点不同，但是，由于所考察的微元体是很微小的，可以认为同一侧面上的应力是均匀分布的，其合力作用在侧面的中心。

微元体所受的体力也认为是均匀分布的，作用在它的体积中心C。设单位体积的体力沿x轴和y轴的分量为X和Y，由平衡条件$\Sigma F_x=0$，可列出平衡微分方程

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)dy\times 1-\sigma_x dy\times 1+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx\times 1$$

$$-\tau_{yx}dx\times 1+Xdxdy\times 1=0\ ,$$

化简后得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+X=0。$$

同样，由平衡条件$\Sigma F_y=0$，可列出相似的平衡微分方程。于是平面问题中应力分量与体力分量之间的关系式，即平面问题的平衡微分方程就是

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+X=0,\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+Y=0。\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}5)$$

在这两个方程中包含了三个未知量σ_x、σ_y、$\tau_{xy}(\tau_{yx})$，求解此微分方程显然是超静定的，因此，还必须考虑几何学方面和物理学方面的条件，才能使问题得到解决。

另外，由第三个平衡条件$\Sigma M_C=0$，列出平衡微分方程

$$\left(\tau_{xy}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right)dy\times 1\times\frac{dx}{2}+\tau_{xy}dy\times 1\times\frac{dx}{2}$$

$$-\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)dx\times 1\times\frac{dy}{2}-\tau_{yx}dx\times 1\times\frac{dy}{2}=0,$$

化简后得

$$\tau_{xy}+\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx=\tau_{yx}+\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy,$$

略去微量项，即dx和dy是极小量，故等号左右两端的第二项可略去，得

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}。$$