

JINGJI SHUXUE JICHU

经济数学基础

郭立焕 王晋卿 编 著
方信潮 张林阁



中国展望出版社

经济数学基础

郭立焕 王晋卿 编著
方信潮 张林阁
何 继 文 审稿

*

中国美术学院出版社出版
(北京市西城区太平桥大街4号)
安徽省六安市新华印刷厂印刷
北京市新华书店发行

开本 787×1092 1/32 12.5 印张

274 千字 1986年6月北京第1版
1986年第1次印刷 印数 1—20,200册

统一书号: 4271·248 定价: 2.60元

目 录

第一章 集合与函数	1 ~ 23
§1 集合	1
§2 函数	7
习题一	21
第二章 极限与连续	24 ~ 62
§1 数列的极限	24
§2 函数的极限	28
§3 无穷大量与无穷小量	35
§4 极限的运算法则	39
§5 极限存在的准则 · 两个重要的极限	44
§6 无穷小量的比较	48
§7 函数的连续性	50
习题二	59
第三章 导数与微分	63 ~ 137
§1 导数的概念	63
§2 导数的基本公式与运算法则	72
§3 反函数与复合函数的导数	78
§4 高阶导数	81
§5 隐函数的导数及对数求导法	83
§6 微分学的基本定理	87
§7 罗必塔法则	93
§8 函数的弹性	100
§9 函数单调性的判定	102

§10 函数的极值·····	104
§11 最大值、最小值及其应用·····	111
§12 曲线的凹向与拐点·····	114
§13 函数作图的一般程序·····	117
§14 微分及其应用·····	123
习题三·····	131
第四章 不定积分 ·····	138~150
§1 原函数与不定积分·····	138
§2 不定积分的性质及基本公式·····	139
§3 分部积分法与换元积分法·····	141
习题四·····	149
第五章 定积分及其应用 ·····	151~181
§1 定积分的概念·····	151
§2 定积分的性质·中值定理·····	157
§3 定积分与原函数的关系·····	158
§4 定积分的分部积分法与换元积分法·····	160
§5 定积分的应用·····	165
§6 广义积分·····	171
习题五·····	177
第六章 多元函数微分法简介 ·····	182~191
§1 多元函数的概念·····	182
§2 偏导数·····	183
§3 二元函数的极值·····	187
习题六·····	190
第七章 行列式 ·····	192~215
§1 二、三阶行列式·····	192
§2 n 阶行列式·····	195

§3 行列式的性质·····	200
§4 行列式按一行(列)展开·····	205
§5 克莱姆法则·····	210
习题七·····	213
第八章 向量与矩阵·····	216~263
§1 用消元法解线性方程组·····	216
§2 向量及其线性相关性·····	225
§3 矩阵及其运算·····	235
习题八·····	259
第九章 投入产出分析·····	264~277
§1 投入产出表·····	264
§2 平衡关系·····	266
§3 直接消耗系数·····	268
§4 完全消耗系数·····	272
§5 几个方面的应用·····	275
习题九·····	277
第十章 随机事件及其概率·····	278~298
§1 随机事件·····	278
§2 随机事件的概率·····	281
§3 加法公式·····	285
§4 乘法公式·····	288
§5 全概公式与逆概公式·····	293
习题十·····	296
第十一章 随机变量及其概率分布·····	299~331
§1 随机变量及其概率分布·····	299
§2 离散型随机变量的概率分布·····	302
§3 连续型随机变量的概率分布·····	311

§4 随机变量函数的概率分布·····	324
习题十一·····	328
第十二章 随机变量的数字特征·····	332~356
§1 随机变量的均值(期望)·····	332
§2 随机变量的方差·····	344
习题十二·····	354
第十三章 回归分析简介·····	357~370
§1 经验公式与最小二乘法·····	358
§2 相关性检验·····	364
§3 应用经验公式进行预测·····	366
习题十三·····	368
附表 1 泊松分布数值表·····	371
附表 2 标准正态分布函数值表·····	373
附表 3 相关系数临界值表·····	374
习题答案·····	375~394

第一章 集合与函数

§1 集合

集合论研究集合的一般性质。自从十九世纪末数学家将有限集合推广到无限集合以来，集合本身已成为数学的一个分支。由于构成集合的对象具有任意性以及集合所讨论的问题具有普遍性，这就使它成为现代数学许多分支的共同基础，对现代数学产生了巨大的影响。

一、集合的概念

一组对象（或事物）的全体就构成一个集合。构成集合的每个对象或事物称为集合的元素。

例 1 一九八五年在北京市出生的人组成一个集合。

例 2 方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的根组成一个集合。

例 3 全体有理数组成一个集合。

例 4 直线 $y = x$ 上所有的点组成一个集合。

集合一般用大写字母 A 、 B 、 C 、 $\dots$ 表示，它的元素用小写字母 a 、 b 、 c 、 $\dots$ 表示。若 a 是集合 A 中的元素，则记作 $a \in A$ （读作 a 属于 A ）；若 a 不是集合 A 中的元素，记作 $a \notin A$ 或 $a \bar{\in} A$ （读作 a 不属于 A ）。

集合所含元素的个数有限时，称为**有限集**，如例 1 和例 2；集合所含元素的个数无限时，称为**无限集**，如例 3 和例 4。

集合的表示方法有两种：

1. **列举法**：把有限集合中所有的元素按任意顺序列在花括号内，每个元素之间用逗号隔开。

例 5 “小于 6 的正整数”集合 A 可表示为：

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

也可表示为：

$$A = \{ 5, 4, 3, 2, 1 \} \text{ 或 } A = \{ 2, 1, 4, 3, 5 \}$$

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏和重复，但与元素列举的先后次序无关。

2. **描述法**：把描述集合中元素的公共属性写在花括号内；或者在花括号内左边写出元素的一般符号，右边写出元素满足公共属性，中间用一直道隔开。如例 5 可表示为：

$$A = \{ \text{小于 6 的正整数} \}$$

例 6 设 A 为方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的根的集合，那么 A 可表示为：

$$A = \{ x \mid x^2 - 3x + 2 = 0 \}$$

例 7 区间 $(3, +\infty)$ 的全体实数所组成的数集 A 可表示为：

$$A = \{ x \mid 3 \leq x < +\infty \}$$

不包含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\emptyset$ 。应当注意的是，集合 $\{ 0 \}$ 不是空集，因为它含有一个元素 0，是一个单元素集。

在某一前提下，由研究的所有对象（或事物）构成的集合称为**全集**，记为 U 。全集是相对的，一个集合在某一前提下是全集，而在另一前提下可能不是全集。例如，讨论的问题仅限于有理数，则全体有理数集合为全集，如讨论的问题限于实数范围内，则全体有理数集合就不是全集。

二、集合之间的关系

定义 1 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即 $a \in A$ ，且 $a \in B$ ，则称 A 为 B 的**子集**，记作

$$A \subseteq B \quad \text{或} \quad B \supseteq A$$

其中 $\subseteq$ 读作“包含于”， $\supseteq$ 读作“包含”。

如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，但 B 中至少有一个元素不属于 A ，则称 A 为 B 的**真子集**，记作

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A$$

定义 2 设有集合 A 和 B ，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称 A 与 B 相等，记作

$$A = B$$

根据定义可知：

- (1) 空集 $\emptyset$ 是任何集合 A 的子集；
- (2) 任何一个集合 A 都是其本身的子集，即 $A \subseteq A$ ，但不是真子集；
- (3) 如果 $A \subseteq B$ ， $B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$ 。

三、集合的运算

集合之间的关系可以用图形表示，称为**文氏图**。文氏图是用平面上的一个简单区域代表一个集合，如图 1—1。集合内的元素以区域内的点表示。



图 1—1

(一) 集合的交

定义 3 由集合 A 和 B 的所有公共元素组成的集合，称为集合 A 和 B 的**交集**，记作 $A \cap B$ ，如图 1—2 的阴影部分。即

$$A \cap B = \{ x | x \in A, \text{ 且 } x \in B \}$$

集合的交集具有下列性质：

1° $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B;$

2° 对任何集合 A ，有

$$A \cap U = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap A = A$$

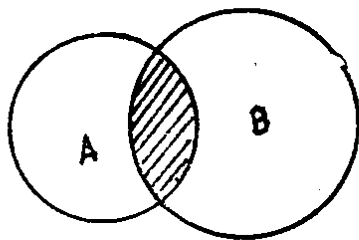
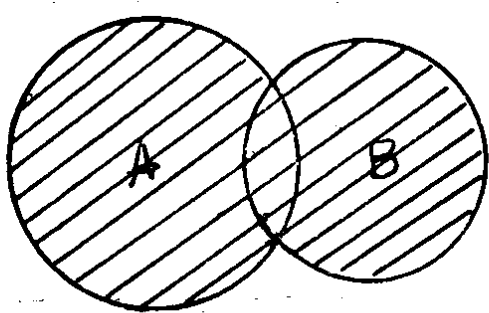


图 1—2

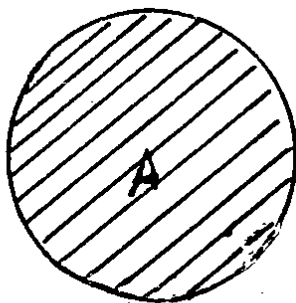
(二) 集合的并

定义 4 集合 A 和 B 的所有元素组成的集合（相同的元素只取一次），称为 A 和 B 的**并集**，记作 $A \cup B$ ，如图 1—3 的阴影部分，即

$$A \cup B = \{ x | x \in A \text{ 或 } x \in B \}$$



(甲)



(乙)

图 1—3

集合的并集具有下列性质：

1° $A \cup B \supseteq A, A \cup B \supseteq B;$

2° 对任何集合 A ，有

$$A \cup U = U, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cup A = A.$$

(三) 集合的差

定义 5 设两个集合 A 与 B ，由属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$ ，如图 1—4 阴影部分。即 $A-B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}$

由定义可知：差集 $A-B$ 与 $B-A$ 是不相同的。

例 8 设 $A = \{1, 2, 3\}$,

$B = \{3, 4, 5\}$

$C = \{5, 6, 7\}$ ，则

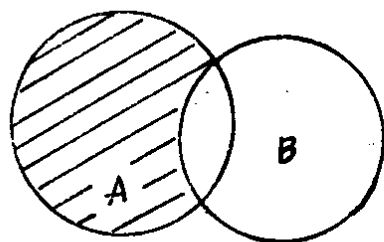


图 1—4

(1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(2) $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

(3) $B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

(4) $A \cap B = \{3\}$, (5) $A \cap C = \emptyset$

(6) $B \cap C = \{5\}$, (7) $A-B = \{1, 2\}$

(8) $B-A = \{4, 5\}$, (9) $A-C = \{1, 2, 3\}$

(10) $C-A = \{5, 6, 7\}$, (11) $B-C = \{3, 4\}$

(12) $C-B = \{6, 7\}$

(四) 集合的补

定义 6 设 A 为全集 U 的一个子集，由属于 U 而不属于 A 的所有元素组成的集合，称为 A 的补集（或余集），记作 A' ，如图 1—5 阴影部分。即

$$A' = \{x | x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$$

对于任何集合 A ，有

$$A \cup A' = U, A \cap A' = \emptyset,$$

$$(A')' = A$$

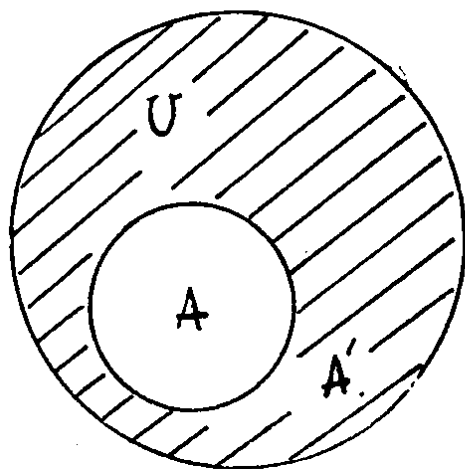


图 1—5

例 9 某地区有 100 个较大的商店，以集合 U 表示这些商店，其

中90个商店完成了销售指标，以集合 A 表示，75个商店完成了利润指标，以集合 B 表示；在属于 B 的商店中有70个商店两项指标均完成。试用集合关系表示各类商店，并指出其数目。

解 两项指标均完成的商店为 $A \cap B$ ，其数目是70(个)，只完成利润指标的商店为 $B - A$ ，其数目为： $75 - 70 = 5$ (个)

只完成销售指标的商店为 $A - B$ ，其数目为：

$$90 - 70 = 20(\text{个})$$

至少完成一项指标的商店为 $A \cup B$ ，其数目为：

$$20 + 70 + 5 = 95(\text{个})$$

一项指标也没有完成的商店为 $(A \cup B)'$ ，其数目为：

$$100 - 95 = 5(\text{个})$$

(五)集合运算律

求几个集合的交集、并集、差集和补集是集合的四种运算，这些运算满足下列规律：

1°交换律： $A \cap B = B \cap A$ ， $A \cup B = B \cup A$

2°结合律： $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3°分配律： $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

4°吸收律： $(A \cap B) \cup A = A$

$$(A \cup B) \cap A = A$$

5°摩根律： $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

下面证明摩根律 $(A \cup B)' = A' \cap B'$ 作为示范，其它几条规律可类似地证明。

证 若 $x \in (A \cup B)'$ ，则 $x \notin A \cup B$ ，从而得知

	$x \notin A$ 且 $x \notin B$
但	$x \in A'$ 且 $x \in B'$
所以	$x \in A' \cap B'$
故	$(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$
反之, 若对于任一元素 $x \in A' \cap B'$	
则	$x \in A'$ 且 $x \in B'$, 从而得知
	$x \notin A$ 且 $x \notin B$
于是	$x \in (A \cup B)'$
故	$A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$
得	$(A \cup B)' = A' \cap B'$

§2 函数

运动或变化是自然现象中普遍的特征。高等数学的主要任务就是研究各种量在运动过程中的依从关系。初等数学虽研究过函数, 但没有将函数作为主要研究对象。我们将在本课程内以极限方法作为主要工具对变量在某一变化过程中的依从关系(即函数关系), 加以分析研究。

一、函数的概念

不同的量可以有不同的状态。有的量, 在研究问题的过程中不起变化, 即保持一定的数值, 这种量称为**常量**; 有的量, 在研究问题的过程中起变化, 即取各种不同的数值, 这种量称为**变量**。

常量与变量的划分不是绝对的, 而是对一定的条件而言的。同一个量, 在某种条件下是常量, 而在另一种条件下, 可能是变量。如在同一地方称物体的重量时, 重力加速度是

常量，但在不同的地方称物体时，重力加速度就成为变量了。

在某一变化过程中，可能有几个量同时遵循一定的规律变化着。如圆的面积 S 与半径 r 间的相依关系为：

$$S = \pi r^2$$

当 r 变化时， S 遵循 πr^2 的规律而变化。即每当 r 在集合 $\{x | 0 \leq x < +\infty\}$ 内取定一数值时， S 按照 πr^2 规律在集合 $\{x | 0 \leq x < +\infty\}$ 内总有一个确定的数值与之对应。

又如商品销售量 m 、商品的单价 c （设为常量）与销售金额 M 间的相依关系为：

$$M = c \cdot m$$

当 m 变化时， M 遵循 $c \cdot m$ 的规律而变化。其集合之间的对应关系读者不难说出。

抛开上述例子所包含的具体意义，便引出了函数的概念。

定义1 设 X 和 Y 是两个数集，如果存在一个对应规则 f ，使得每一个 $x \in X$ ，总有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应，则称对应规则 f 为 X 到 Y 的函数，记作

$$f: X \rightarrow Y, \text{ 或 } y = f(x)$$

集合 X 为该函数关系的**定义域**，记为 $D(f)$ ，即 $D(f) = X$ ；集合 Y 中所有与集合 X 有函数关系 f 的元素所构成的子集为该函数关系的**值域**，记作 $Z(f)$ ，显然 $Z(f) \subseteq Y$ 。

例1 求函数 $y = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$ 的定义域。

解 要使函数有意义，则分母 $(x+1)(x-2) \neq 0$ 即 $x \neq -1$ ， $x \neq 2$ 。故函数定义域为：

$$D(f) = \{x | x \in R, \text{ 但 } x \neq -1 \text{ 且 } x \neq 2\}$$

例2 求函数 $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ 的定义域。

解 开平方根要求 $\frac{x-2}{x+1} \geq 0$, 即

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x-2 \leq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > -1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ x < -1 \end{cases}$$

$x \geq 2$ 与 $x > -1$ 同时成立, 则必须 $x \geq 2$; $x \leq 2$ 与 $x < -1$ 同时成立, 则必须 $x < -1$, 这样便得知

$$D(f) = \{x \mid -\infty < x < -1 \text{ 或 } 2 \leq x < +\infty\}$$

例3 某工厂生产某种车床, 年产量为 a 台, 分若干批进行生产, 每批生产准备费为 b 元, 设产品均匀投入市场, 即平均库存量为批量的一半。若每年每台库存费为 c 元, 显然, 生产批量大, 则库存费高, 生产批量少, 则批数增多, 因而生产准备费高。为了选择最优批量, 试求出一年中库存费与生产准备费的和与批量的函数关系。

解 设批量为 x , 库存费与生产准备费的和为 $Q(x)$ 。

因年产量为 a , 故每年生产的批数为 $\frac{a}{x}$ (假设为整数), 则生

产准备费为 $b \cdot \frac{a}{x}$, 因库存量为 $\frac{x}{2}$, 故库存费为 $c \cdot \frac{x}{2}$, 因而可得

$$Q(x) = \frac{ab}{x} + \frac{c}{2}x$$

函数的定义域应为 $(0, a]$, 因 x 表示批量, 故只应取 $(0, a]$ 中的 a 的正整数因子。

二、函数关系表示法

定义域、值域及对应规则是函数概念的三要素, 其中最

主要的是对应规则。所谓函数关系就是指对应规则，通常有三种表示法。

(一) 解析法：用解析表达式表示函数的一种方法。例如， $y = x^2 - 6x + 8$ ， $y = \ln(x^2 - 1)$ ，……。

有一些函数，对于自变量 x 在定义域内取不同的值时，表示函数关系的解析式也不同。例如函数

$$y = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x - 1 & x > 0, \end{cases} \quad \text{如图1—6所示。}$$

这类函数称为**分段函数**。应当说明的是：分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数，在实际应用中常常用到这种表示形式。

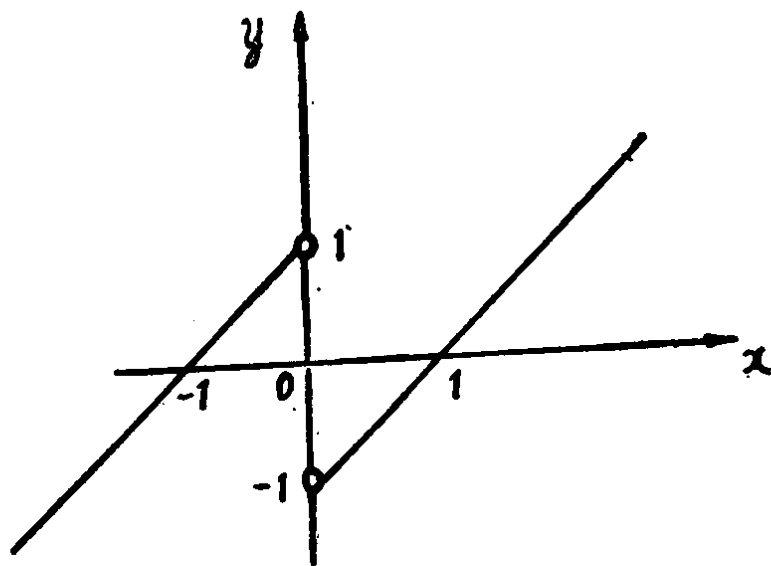


图 1—6

例 4 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 k 元，超过 a 公里，每增一公里为 $\frac{4}{5}k$ 元。把运价 m 和里程 s 之间的函数关系用解析式表示出来。

解 根据题意可知，当 $0 < s \leq a$ 时， $m = ks$ ；当 $a < s$ 时，

$$m = ka + \frac{4}{5}k(s-a)$$

故

$$m = \begin{cases} ks & 0 < s \leq a \\ ka + \frac{4}{5}k(s-a) & a < s \end{cases}$$

这里运价 m 和里程 s 的函数关系是用分段函数表示的,定义域为 $(0, +\infty)$ 。

用解析法表示函数,便于对函数进行理论研究、定量分析和运算。

(二) 图象法: 是利用直角坐标系中的几何图形表示函数关系的一种方法。对于函数 $y=f(x)$, 若以 x 的某个值为横坐标, 该 x 值所对应的函数值 $y=f(x)$ 为纵坐标, 就确定了坐标平面上的一个点 (x, y) 。当 x 变化时, y 随之变化, 点 (x, y) 在平面上相应地也变动, 动点 (x, y) 的轨迹一般是一条曲线, 该曲线称为函数 $y=f(x)$ 的图形。反之, 在平面坐标系中的某一曲线上任取一点 $P(x, y)$, 点 P 的纵坐标 y 恰好等于该点的横坐标 x 所对应的函数值, 即 $y=f(x)$, 故坐标平面上的任何一条曲线都表示一个函数(这个函数能否用解析式表示, 那是另一回事)。用图象法表示函数, 优点在于明显直观, 便于对函数作定性分析。

(三) 表格法: 是用表格形式表示函数对应规则的一种方法。如我们常用的对数表、三角函数表、平方根表等, 都是用表格法表示的函数。

三、函数的简单特性

(一) 奇偶性

定义二 如果函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 取任意一个实