经济数学基础

郭立焕　王晋卿
方信潮　张林阁　编著

中国展望出版社

经 济 数 学 基 础

郭立焕 王晋卿
方信潮 张林阁 编著

何 继 文 审稿

*

中国展望出版社出版
（北京市西城区太平桥大街4号）
安徽省六安市新华印刷厂印刷
北 京 市 新 华 书 店 发 行

开本 787×1092 1/32 12.5 印张
274 千字 1986年6月北京第1版
1986年第1次印刷 印数 1—20,200册

统一书号：4271·248 定价：2.60元

目　录

第一章 集合与函数

§1 集合

集合论研究集合的一般性质。自从十九世纪末数学家将有限集合推广到无限集合以来，集合本身已成为数学的一个分支。由于构成集合的对象具有任意性以及集合所讨论的问题具有普遍性，这就使它成为现代数学许多分支的共同基础’对现代数学产生了巨大的影响。

一、集合的概念

一组对象（或事物）的全体就构成一个**集合**。构成集合的每个对象或事物称为集合的**元素**。

例 1 一九八五年在北京市出生的人组成一个集合。

例 2 方程$x^2-6x+8=0$的根组成一个集合。

例 3 全体有理数组成一个集合。

例 4 直线$y=x$上所有的点组成一个集合。

集合一般用大写字母A、B、C、…表示，它的元素用小写字母a、b、c、…表示。若a是集合A中的元素，则记作$a\in A$（读a属于A）；若a不是集合A中的元素，记作$a\overline{\in} A$或$a\notin A$（读作a不属于A）。

集合所含元素的个数有限时，称为**有限集**，如例 1 和例 2；集合所含元素的个数无限时，称为**无限集**，如例 3 和例 4。

集合的表示方法有两种：

1. **列举法**：把有限集合中所有的元素按任意顺序列在花括号内，每个元素之间用逗号隔开。

例 5 "小于 6 的正整数"集合A可表示为：

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

也可表示为：

$A=\{5, 4, 3, 2, 1\}$或$A=\{2, 1, 4, 3, 5\}$

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏和重复，但与元素列举的先后次序无关。

2. **描述法**：把描述集合中元素的公共属性写在花括号内；或者在花括号内左边写出元素的一般符号，右边写出元素满足公共属性，中间用一直道隔开。如例 5 可表示为：

$$A=\{\text{小于 6 的正整数}\}$$

例 6 设A为方程$x^2-3x+2=0$的根的集合，那么A可表示为：

$$A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$$

例 7 区间$[3, +\infty)$的全体实数所组成的数集A可表示为：

$$A=\{x \mid 3\leqslant x<+\infty\}$$

不包含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$。应当注意的是，集合$\{0\}$不是空集，因为它含有一个元素 0，是一个单元素集。

在某一前提下，由研究的所有对象（或事物）构成的集合称为**全集**，记为U。全集是相对的，一个集合在某一前提下是全集，而在另一前提下可能不是全集。例如，讨论的问题仅限于有理数，则全体有理数集合为全集，如讨论的问题限于实数范围内，则全体有理数集合就不是全集。

二、集合之间的关系

定义 1 如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，即$a\in A$，且$a\in B$，则称A为B的**子集**，记作

$$A\subseteq B \quad 或 \quad B\supseteq A$$

其中$\subseteq$读作"包含于"，$\supseteq$读作"包含"。

如果A的每一个元素都是B的元素，但B中至少有一个元素不属于A，则称A为B的**真子集**，记作

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A$$

定义 2 设有集合A和B，如果$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则称A与B**相等**，记作

$$A=B$$

根据定义可知：

（1）空集$\varnothing$是任何集合A的子集；

（2）任何一个集合A都是其本身的子集，即$A\subseteq A$，但不是真子集；

（3）如果$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$ 。

三、集合的运算

集合之间的关系可以用图形表示，称为**文氏图**。文氏图是用平面上的一个简单区域代表一个集合，如图1—1。集合内的元素以区域内的点表示。

图1—1

（一） 集合的交

定义 3 由集合A和B的所有公共元素组成的集合，称为集合A和B的**交集**，记作$A\cap B$，如图 1—2 的阴影部分。即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\ 且x\in B\}$$

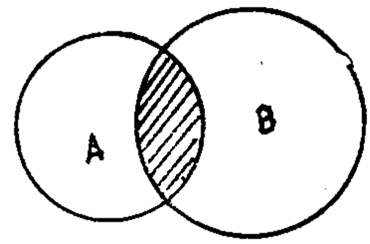


图 1—2

集合的交集具有下列性质：

1° $A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$；

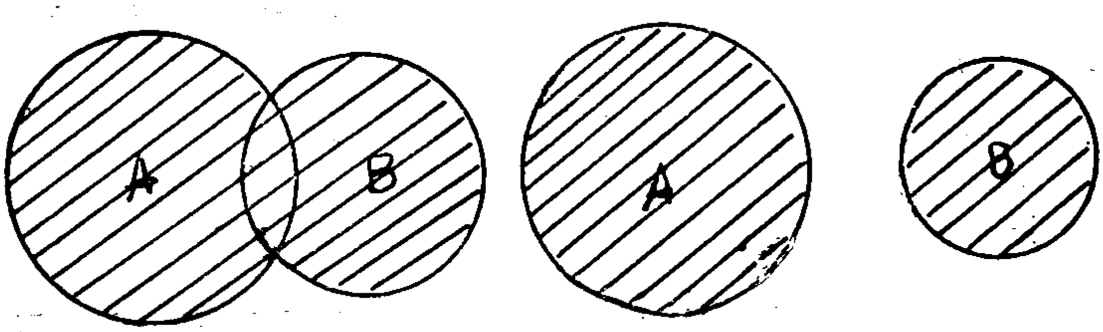
2° 对任何集合A，有

$A\cap U=A$，　$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap A=A$

（二） 集合的并

定义 4 集合A和B的所有元素组成的集合（相同的元素只取一次），称为A和B的**并集**，记作$A\cup B$，如图 1—3 的阴影部分，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$$



（甲）　　（乙）

图 1—3

集合的并集具有下列性质：

1° $A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$；

2° 对任何集合A，有

$A\cup U=U$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup A=A$。

（三） 集合的差

定义 5 设两个集合A与B，由属于A而不属于B的所有元素组成的集合，称为A与B的**差集**，记作$A-B$，如图 1—4阴影部分。即 $A-B=\{x \mid x\in A，且x \overline{\in} B\}$

由定义可知：差集$A-B$与$B-A$是不相同的。

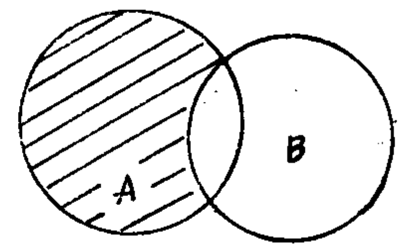


图 1—4

例 8 设$A=\{1，2，3\}$，

$B=\{3，4，5\}$

$C=\{5，6，7\}$，则

(1) $A\cup B=\{1，2，3，4，5\}$

(2) $A\cup C=\{1，2，3，5，6，7\}$

(3) $B\cup C=\{3，4，5，6，7\}$

(4) $A\cap B=\{3\}$， (5) $A\cap C=\varnothing$

(6) $B\cap C=\{5\}$， (7) $A-B=\{1，2\}$

(8) $B-A=\{4，5\}$，(9) $A-C=\{1，2，3\}$

(10) $C-A=\{5，6，7\}$，(11) $B-C=\{3，4\}$

(12) $C-B=\{6，7\}$

（四） 集合的补

定义 6 设A为全集U的一个子集，由属于U而不属于A的所有元素组成的集合，称为A的**补集**（或**余集**），记作A'，如图 1—5阴影部分。即

$A'=\{x \mid x\in U，且x\overline{\in} A\}$

对于任何集合A，有

$A\cup A'=U$，$A\cap A'=\varnothing$，

$(A')'=A$

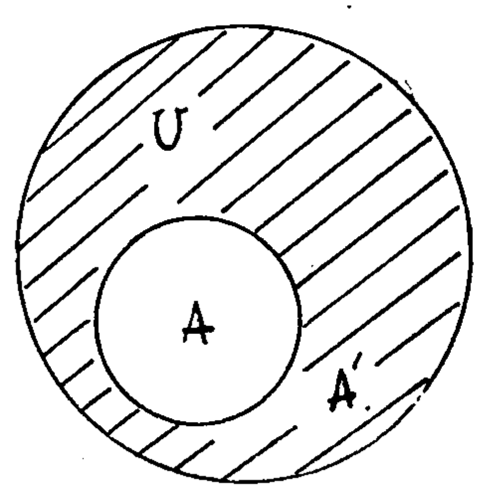


图 1—5

例 9 某地区有100个较大的商店，以集合U表示这些商店，其

中90个商店完成了销售指标，以集合A表示；75个商店完成了利润指标，以集合B表示；在属于B的商店中有70个商店两项指标均完成。试用集合关系表示各类商店，并指出其数目。

解 两项指标均完成的商店为$A\cap B$，其数目是70(个)，只完成利润指标的商店为$B-A$，其数目为：$75-70=5$(个)

只完成销售指标的商店为$A-B$，其数目为：

$90-70=20$(个)

至少完成一项指标的商店为$A\cup B$，其数目为：

$20+70+5=95$(个)

一项指标也没有完成的商店为$(A\cup B)'$，其数目为：

$100-95=5$(个)

(五)集合运算律

求几个集合的交集、并集、差集和补集是集合的四种运算，这些运算满足下列规律：

1°交换律：$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$

2°结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

3°分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

4°吸收律：$(A\cap B)\cup A=A$

$(A\cup B)\cap A=A$

5°摩根律：$(A\cup B)'=A'\cap B'$

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

下面证明摩根律$(A\cup B)'=A'\cap B'$作为示范，其它几条规律可类似地证明。

证 若$x\in(A\cup B)'$，则$x\overline{\in}A\cup B$，从而得知

$$x \overline{\in} A \text{且} x \overline{\in} B$$

但 $\quad x \in A'$ 且 $x \in B'$

所以 $\quad x \in A' \cap B'$

故 $\quad (A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$

反之，若对于任一元素 $x \in A' \cap B'$

则 $\quad x \in A'$ 且 $x \in B'$，从而得知

$$x \overline{\in} A \quad \text{且} \quad x \overline{\in} B$$

于是 $\quad x \in (A \cup B)'$

故 $\quad A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

得 $\quad (A \cup B)' = A' \cap B'$

§2 函数

运动或变化是自然现象中普遍的特征。高等数学的主要任务就是研究各种量在运动过程中的依从关系。初等数学虽研究过函数，但没有将函数作为主要研究对象。我们将在本课程内以极限方法作为主要工具对变量在某一变化过程中的依从关系（即函数关系），加以分析研究。

一、 函数的概念

不同的量可以有不同的状态。有的量，在研究问题的过程中不起变化，即保持一定的数值，这种量称为**常量**；有的量，在研究问题的过程中起变化，即取各种不同的数值，这种量称为**变量**。

常量与变量的划分不是绝对的，而是对一定的条件而言的。同一个量，在某种条件下是常量，而在另一种条件下，可能是变量。如在同一地方称物体的重量时，重力加速度是

常量，但在不同的地方称物体时，重力加速度就成为变量了。

在某一变化过程中，可能有几个量同时遵循一定的规律变化着。如圆的面积S与半径r间的相依关系为：

$$S=\pi r^2$$

当r变化时，S遵循πr^2的规律而变化。即每当r在集合$\{x|0\leqslant x<+\infty\}$内取定一数值时，$S$按照$\pi r^2$规律在集合$\{x|0\leqslant x<+\infty\}$内总有一个确定的数值与之对应。

又如商品销售量m、商品的单价c（设为常量）与销售金额M间的相依关系为：

$$M=c\cdot m$$

当m变化时，M遵循$c\cdot m$的规律而变化。其集合之间的对应关系读者不难说出。

抛开上述例子所包含的具体意义，便引出了函数的概念。

定义1 设X和Y是两个数集，如果存在一个对应规则f，使得每一个$x\in X$，总有唯一确定的$y\in Y$与之对应，则称对应规则f为X到Y的函数，记作

$$f:X\to Y，或y=f(x)$$

集合X为该函数关系的**定义域**，记为$D(f)$，即$D(f)=X$；集合Y中所有与集合X有函数关系f的元素所构成的子集为该函数关系的**值域**，记作$Z(f)$，显然 $Z(f)\subseteq Y$。

例 1 求函数$y=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$的定义域。

解 要使函数有意义，则分母$(x+1)(x-2)\neq 0$即$x\neq -1$，$x\neq 2$。故函数定义域为：

$$D(f)=\{x|x\in R，但x\neq 1且x\neq 2\}$$

例 2 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$ 的定义域。

解 开平方根要求 $\dfrac{x-2}{x+1}\geqslant 0$，即

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ x+1>0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x-2\leqslant 0 \\ x+1<0 \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x\geqslant 2 \\ x>-1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x\leqslant 2 \\ x<-1 \end{cases}$$

$x\geqslant 2$ 与 $x>-1$ 同时成立，则必须 $x\geqslant 2$； $x\leqslant 2$ 与 $x<-1$ 同时成立，则必须 $x<-1$，这样便得知

$$D(f)=\{x\mid -\infty<x<-1 \text{或} 2\leqslant x<+\infty\}$$

例3 某工厂生产某种车床，年产量为a台，分若干批进行生产，每批生产准备费为b元，设产品均匀投入市场，即平均库存量为批量的一半。若每年每台库存费为c元，显然，生产批量大，则库存费高，生产批量少，则批数增多，因而生产准备费高。为了选择最优批量，试求出一年中库存费与生产准备费的和与批量的函数关系。

解 设批量为x，库存费与生产准备费的和为$Q(x)$。因年产量为a，故每年生产的批数为$\dfrac{a}{x}$(假设为整数)，则生产准备费为$b\cdot\dfrac{a}{x}$，因库存量为$\dfrac{x}{2}$，故库存费为$c\cdot\dfrac{x}{2}$，因而可得

$$Q(x)=\frac{ab}{x}+\frac{c}{2}x$$

函数的定义域应为$(0,a]$，因x表示批量，故只应取$(0,a]$中的a的正整数因子。

二、 函数关系表示法

定义域、值域及对应规则是函数概念的三要素，其中最

主要的是对应规则。所谓函数关系就是指对应规则，通常有三种表示法。

（一）解析法：用解析表达式表示函数的一种方法。例如，$y=x^2-6x+8$，$y=ln(x^2-1)$，……。

有一些函数，对于自变量 x 在定义域内取不同的值时，表示函数关系的解析式也不同。例如函数

$$y=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x<0, \end{cases}$$ 如图1—6所示．

这类函数称为**分段函数**。应当说明的是：分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数，在实际应用中常常用到这种表示形式．

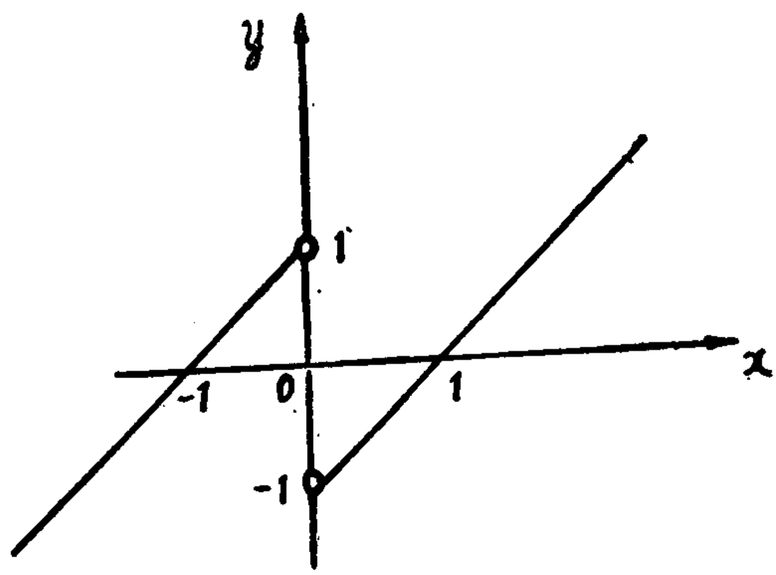


图 1—6

例 4 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在a公里以内，每公里k元，超过a公里，每增一公里为$\frac{4}{5}k$元。把运价m和里程s之间的函数关系用解析式表示出来。

解 根据题意可知，当$0<s\leqslant a$时，$m=ks$；当$a<s$时，

$m = ka + \frac{4}{5}k(s-a)$

故

$$m=\begin{cases} ks & 0<s\leqslant a \\ ka+\frac{4}{5}k(s-a) & a<s \end{cases}$$

这里运价m和里程s的函数关系是用分段函数表示的，定义域为（0，+∞）。

用解析法表示函数，便于对函数进行理论研究、定量分析和运算．

（二）图象法：是利用直角坐标系中的几何图形表示函数关系的一种方法。对于函数$y=f(x)$，若以x的某个值为横坐标，该x值所对应的函数值$y=f(x)$为纵坐标，就确定了坐标平面上的一个点(x, y)。当x变化时，y随之变化，点(x, y)在平面上相应地也变动，动点(x, y)的轨迹一般是一条曲线，该曲线称为函数$y=f(x)$的图形。反之，在平面坐标系中的某一曲线上任取一点$P(x, y)$，点P的纵坐标y恰好等于该点的横坐标x所对应的函数值，即$y=f(x)$，故坐标平面上的任何一条曲线都表示一个函数（这个函数能否用解析式表示，那是另一回事）。用图象法表示函数，优点在于明显直观，便于对函数作定性分析．

（三）　表格法：是用表格形式表示函数对应规则的一种方法。如我们常用的对数表、三角函数表、平方根表等，都是用表格法表示的函数．

三、　函数的简单特性

（一）　奇偶性

定义二　如果函数$y=f(x)$的自变量x取任意一个实