初二年级 数学

通用各科
奥林匹克教材

数学奥林匹克工作室 编

首都师范大学出版社

tongyong geke
aolinpike
jiaocai

奥林匹克

OLYMPIC

通用各科
奥林匹克教材

数学奥林匹克工作室 编

初二年级数学

奥林匹克

首都师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

通用各科奥林匹克教材：初二数学/吴建平主编. —北京：首都师范大学出版社，2000.1

ISBN 7-81064-092-5

Ⅰ.通… Ⅱ.吴… Ⅲ.数学课-初中-教材 Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第65126号

TONGYONG SHUXUE AOLINPIKE JIAOCAI
· CHUER SHUXUE

通用各科奥林匹克教材

初二年级数学

首都师范大学出版社

（北京西三环北路105号 邮政编码100037）

北京昌平兴华印刷厂印刷 全国新华书店经销

2000年1月第1版 2000年3月第2次印刷

开本850×1168 1/32 印张8.125

字数205千 印数15,001～36,000册

定价 9.20元

编　委　会

主编： 吴建平　李念伟

编委： 方运加　李念伟　吴建平
郜舒竹　董凤举

编者： 王　忠　无　边　尹克新
刘汉昭　刘向军　李念伟
关　闳　陈　娴　吴　易
张　丽　张燕勤　欧　丽
赵维民　夏国生

目　录

第一学期

一、因式分解(一)

多项式的因式分解方法多种多样，本讲介绍换元法、配方法和待定系数法.

1. 换元法

对于一个较复杂的式子，把其中的某些部分看成一个整体，并用一个新的字母代替(有时设不设新的字母均可)，这种方法称为换元法.

例1 分解因式：

(1) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)-6$

(2) $(x^2-15x+54)(x^2+11x+28)+350$

分析与解 (1)式若展开成多项式再分解因式将是很繁琐的，可考虑将$(6x+7)^2$与$(3x+4)(x+1)$分别展开，也就是将原式做如下变形：

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(36x^2+84x+49)(3x^2+7x+4)-6\\
&=[12(3x^2+7x+4)+1](3x^2+7x+4)-6
\end{aligned}
$$

这时可把式中的“$3x^2+7x+4$”看成一个整体，并用一个新的字母代替，则原式形式上将变得简单，易于分解.

设 $3x^2+7x+4=A$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=A(12A+1)-6\\
&=12A^2+A-6\\
&=(3A-2)(4A+3)\\
&=(9x^2+21x+10)(12x^2+28x+19)
\end{aligned}
$$

$$=(3x+5)(3x+2)(12x^2+28x+19)$$

(2)式若展开或直接换元再分解因式都是不容易的，由于两个括号里的多项式都可分解因式，所以可以分解后再重新组合、换元.

$$(x^2-15x+54)(x^2+11x+28)+350$$
$$=(x-6)(x-9)(x+4)(x+7)+350$$
$$=[(x-6)(x+4)][(x-9)(x+7)]+350$$
$$=[x^2-2x-24][x^2-2x-63]+350$$
$$=[x^2-2x-24][(x^2-2x-24)-39]+350$$

设 $x^2-2x-24=A$，则

原式$=A(A-39)+350$

$$=A^2-39A+350$$
$$=(A-25)(A-14)$$
$$=(x^2-2x-49)(x^2-2x-38)$$

例 2 分解因式：

(1) $(x^2+x+3)(x^2+x-1)-5$

(2) $(x^2+4x+6)(x^2+6x+6)-3x^2$

(3) $(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$

分析与解 (1)式的两个括号里的多项式只有常数项不同，但这两个数的奇偶性相同，所以可设这两个多项式的平均值为新的字母来换元，这种设两个多项式的平均值为新的字母的换元方法称为“均值换元法”. 详解过程如下：

$\because$ $\frac{1}{2}[(x^2+x+3)+(x^2+x-1)]=x^2+x+1$

$\therefore$ 设 $x^2+x+1=A$，则

$$(x^2+x+3)(x^2+x-1)-5$$
$$=(A+2)(A-2)-5$$
$$=A^2-9$$
$$=(A+3)(A-3)$$

$=(x^2+x+4)(x^2+x-2)$

$=(x^2+x+4)(x+2)(x-1)$

均值换元法的好处是可使相乘的两式呈现“平方差”的形式，从而使积式只有两项.

(2)式相乘的两个括号里的多项式只有一次项系数不同，但这两个系数的奇偶性相同，所以仍可用均值换元法分解因式.

$\because\ \frac{1}{2}[(x^2+4x+6)+(x^2+6x+6)]=x^2+5x+6$

$\therefore$ 设 $x^2+5x+6=A$，则

$(x^2+4x+6)(x^2+6x+6)-3x^2$

$=(A-x)(A+x)-3x^2$

$=A^2-4x^2$

$=(A+2x)(A-2x)$

$=(x^2+7x+6)(x^2+3x+6)$

$=(x+1)(x+6)(x^2+3x+6)$

(3)式仍可采用均值换元法分解因式，分解过程如下：

$\because\ \frac{1}{2}[(a+b-2ab)+(a+b-2)]=a+b-ab-1$

$\therefore$ 设 $a+b-ab-1=A$，则

$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$

$=(A-ab+1)(A+ab-1)+(1-ab)^2$

$=A^2-(ab-1)^2+(1-ab)^2$

$=A^2$

$=(a+b-ab-1)^2$

$=(ab-a-b+1)^2$

$=[a(b-1)-(b-1)]^2$

$=[(a-1)(b-1)]^2$

$=(a-1)^2(b-1)^2$

此题也可设 $a+b=A$，$ab=B$，则

原式 $=(A-2B)(A-2)+(1-B)^2$

$$=A^2-2A-2AB+4B+1-2B+B^2$$
$$=A^2+B^2+1-2AB-2A+2B$$
$$=(A-B-1)^2$$
$$=(a+b-ab-1)^2$$
$$=(a-1)^2(b-1)^2$$

这种换元的方法叫“双换元法”.

2. 配方法

对一些特殊的多项式的因式分解，有时也用到搭配完全平方式的方法，这种方法叫配方法. 广义地说，把一个多项式配成正整数次幂的形式，这种方法叫配方法. 下面举例说明.

例 3 分解因式：

(1)$m^4+m^2-2mn-n^2+1$

(2)$p^4-4p^3+8p^2-8p+4$

分析与解 (1)式中含有“$-2mn-n^2$”，于是可把“m^2”拆成“$2m^2-m^2$”，经过配方，化为平方差形式，再分解因式. 过程如下：

$$m^4+m^2-2mn-n^2+1$$
$$=m^4+2m^2-m^2-2mn-n^2+1$$
$$=(m^4+2m^2+1)-(m^2+2mn+n^2)$$
$$=(m^2+1)^2-(m+n)^2$$
$$=[(m^2+1)+(m+n)][(m^2+1)-(m+n)]$$
$$=(m^2+m+n+1)(m^2-m-n+1)$$

(2)式可通过拆项的方法直接配成完全平方式.

$$p^4-4p^3+8p^2-8p+4$$
$$=(p^4-4p^3+4p^2)+(4p^2-8p)+4$$
$$=p^2(p-2)^2+4p(p-2)+4$$
$$=[p(p-2)+2]^2$$
$$=[p^2-2p+2]^2$$

例 4 把多项式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 分解因式.

分析与解 此题可以考虑用配完全立方的办法分解因式. 因

为 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+3xy(x+y)+y^3$，所以 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$. 因此，

$$
\begin{aligned}
& x^3+y^3+z^3-3xyz \\
=& (x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz \\
=& [(x+y)^3+z^3]-3xy(x+y+z) \\
=& [(x+y)+z][(x+y)^2-(x+y)z+z^2]-3xy(x+y+z) \\
=& (x+y+z)[(x+y)^2-(x+y)z+z^2-3xy] \\
=& (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)
\end{aligned}
$$

3. 待定系数法

把多项式分解因式时，有时可从原式判断出分解后因式的基本形式，只是系数尚未确定. 要想确定系数，必须根据多项式恒等的定理. 这个定理的内容是：两个多项式恒等的充分必要条件是它们对应同类项的系数相等. 这里“充分必要”是指两个多项式恒等，则它们对应的同类项系数相等；反之亦然. 根据这个定理可确定未知系数的值. 这种分解因式的方法叫待定系数法. 下面举例说明.

例 5 a 为何值时，多项式 $(x-4)(x-a)-1$ 能够变为乘积 $(x+m)(x+n)$ （m、n 均为整数）？

分析与解 根据题意可知

$(x-4)(x-a)-1=(x+m)(x+n)$

分别展开等号两边的式子，可得

$x^2-(4+a)x+4a-1=x^2+(m+n)x+mn$

比较系数得方程组

$$\begin{cases} m+n=-4-a \\ mn=4a-1 \end{cases}$$

消去 a，得 $mn+4m+4n+16=-1$.

$\therefore$ $(m+4)(n+4)=-1$. 又 m、n 是整数，

$\therefore$ $\begin{cases} m+4=1 \\ n+4=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m+4=-1 \\ n+4=1 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m=-3 \\ n=-5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=-5 \\ n=-3 \end{cases}$

$\therefore \quad m+n=-8$，故 $a=4$.

例 6 m 为何值时，多项式 $x^2+7xy+my^2-5x+43y-24$ 可以分解因式？

分析与解 原式是关于 x、y 的二次多项式，若能分解因式，必分为两个关于 x、y 的一次多项式相乘的形式. 所以可设

$$x^2+7xy+my^2-5x+43y-24=(x+ay+A)(x+by+B)$$

将等号右边的式子展开合并同类项，得

$$x^2+(a+b)xy+aby^2+(A+B)x+(Ab+Ba)y+AB$$

对比等号两边同类项的系数，可得方程组

$$\begin{cases} A+B=-5 & ① \\ AB=-24 & ② \\ Ab+Ba=43 & ③ \\ a+b=7 & ④ \\ m=ab & ⑤ \end{cases}$$

由①、②得 $\begin{cases} A=3 \\ B=-8 \end{cases}$

把 $A=3$，$B=-8$ 代入③，得

$$3b-8a=43 \qquad ⑥$$

由④与⑥得方程组

$$\begin{cases} a+b=7 & ④ \\ 3b-8a=43 & ⑥ \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=-2 \\ b=9 \end{cases}$

$\therefore \quad m=ab=-18$

即当 $m=-18$ 时，原式可分解因式.

练 习 一

将下列多项式分解因式（1 题～4 题）：

1. $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$

2. $(x^2-x)^2+(x^2+3x+2)^2-4(x^2+x+1)^2$

3. a^2-6a-b^2+2b+8

4. $a^4+b^4+(a+b)^4$

5. 若整系数多项式 $x^4-x^3+kx^2-2kx-2$ 能分解为两个整系数二次多项式的乘积,求 k 的值.

二、因式分解(二)

本讲利用参数法进行因式分解，它是在初中课本因式分解的基础上，对数学竞赛中结构复杂的代数式作因式分解常采用的方法. 即将含有多个字母的多项式按某个字母(这个字母即参数)降幂排列，参数的最高次数最好低于二次，然后再采用常规方法去分解.

例 1 将下列各式分解因式：

(1)$x^2+3xy+2y^2+5x+7y+6$

(2)$x^4+2x^2y+y^2+4y+4$

(3)$x^3-(3-a)x-a+2$

(4)$x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$

(5)$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

分析与解 以上五道因式分解题，(1)～(4)就属于题目结构复杂、代数式中含有多个字母的问题，分解起来比较麻烦. 用课本中介绍的方法行不通，下面我们设参数来解题. 而(5)尽管结构简单，但由于是两个没有关系的代数式的和，故应先拆开，转化成(4)的形式再利用参数法.

x 是参数

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2y+3 \\ & \times & \\ 1 & & y+2 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{(2y+3)+(y+2)} \\ \multicolumn{3}{c}{=3y+5} \end{array}$$

(1)原式 $=x^2+(3y+5)x+(2y^2+7y+6)$

$=x^2+(3y+5)x+(2y+3)(y+2)$

$=(x+2y+3)(x+y+2)$

$$\begin{array}{ccc} 2 & & x+3 \\ & \times & \\ 1 & & x+2 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{x+3+2x+4} \\ \multicolumn{3}{c}{=3x+7} \end{array}$$

或原式 $=2y^2+(3x+7)y+x^2+5x+6$

$=2y^2+(3x+7)y+(x+2)(x+3)$

$=(2y+x+3)(y+x+2)$

$=(x+2y+3)(x+y+2)$

(2)原式$=y^2+2(x^2+2)y+x^4+4$

$=y^2+2(x^2+2)y+x^4+4x^2+4-4x^2$

$=y^2+2(x^2+2)y+(x^2+2)^2-4x^2$

$=y^2+2(x^2+2)y+(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

$=(y+x^2-2x+2)(y+x^2+2x+2)$

(3)原式$=x^3-3x+ax-a+2$

$=(x-1)a+x^3-3x+2$

$=(x-1)a+x^3-x-2x+2$

$=(x-1)a+x(x-1)(x+1)-2(x-1)$

$=(x-1)a+(x-1)(x^2+x-2)$

$=(x-1)(a+x^2+x-2)$

(4)原式$=(y-z)x^2+(y^2-2yz+z^2)x-yz(y-z)$

$=(y-z)x^2+(y-z)^2x-yz(y-z)$

$=(y-z)[x^2+(y-z)x-yz]$

$=(y-z)(x+y)(x-z)$

(5)原式$=c^2a+ca^2+b^2c+bc^2+a^2b+b^2a+3abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=[(b+c)a+bc][a+(b+c)]$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$……①的代数式，叫做一元 n 次多项式，这里 n 是非负整数，$a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 叫多项式的系数，且 $a_n\neq 0$，常用 $f(x)$ 来抽象地表示多项式①，用 $f(a)$ 表示当 $x=a$ 时多项式的值. 特别地，当 $f(a)=0$ 时，a 叫 $f(x)$ 的根. 例如，$f(x)=x^3-3x+2$，则 $f(2)=2^3-3\times2+2=4$，$f(1)=1^3-3\times1+2=0$(因而 $x=1$ 是方程 $x^3-3x+2=0$ 的根).

因式定理 若 a 是多项式 $f(x)$ 的根，即 $f(a)=0$，则 $f(x)$ 有因式 $x-a$.

证明 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$\because$ $f(a)=0$，$\therefore$ $a_n\cdot a^n+a_{n-1}\cdot a^{n-1}+\cdots+a_1\cdot a+a_0=0$

$\therefore \quad f(x)=f(x)-f(a)$

$$=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)-(a_n\cdot a^n+a_{n-1}\cdot a^{n-1}+\cdots+a_1\cdot a+a_0)$$

$$=a_n(x^n-a^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-a^{n-1})+\cdots+a_1(x-a) \quad ②$$

$\because$ 当 k 为自然数时，有

$$x^k-a^k=(x-a)(x^{k-1}+ax^{k-2}+\cdots+a^{k-2}\cdot x+a^{k-1})$$

$\therefore$ ②式右端的每一项都含有因式 $x-a$，从而 $f(x)$ 含有因式 $x-a$.

有了因式定理，我们发现，只要一个含 x 的多项式 $f(x)$，当已知 $x=a$ 时，$f(a)=0$，就能确定它的一个因式，再利用竖式除法，得到它的另一个因式 $g(x)$，且 $g(x)$ 应比 $f(x)$ 次数低一次. 若还能确定 b 使 $g(b)=0$ 且由此类推，我们就能够得出 $f(x)$ 的所有因式，且能对 $f(x)$ 因式分解. 问题是怎样得出 $f(x)$ 的根 a 及怎样得到 $g(x)$.

定理 1 如果整系数多项式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 有因式 $x-q$（q 为整数），那么 q 为常数项 a_0 的约数.

定理 2 如果整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 有因式 $x-\frac{q}{p}$（p、q 为整数，且 p、q 互质），那么 $p|a_n$，$q|a_0$.

以上两个定理介绍了怎样得到 $f(x)$ 的根 a，由于 $a_n=1$ 时定理 2 即定理 1. 所以定理 2 其实是定理 1 的特殊情况. 这两个定理的道理很简单，就不再证明了. 下面，我们将介绍怎样用竖式法得到分离系数法，使 $f(x)$ 分解成 $(x-a)\cdot g(x)$，达到因式分解和降次的目的.

例 2 已知 $x+1$ 是 $f(x)=x^3-4x^2+x+6$ 的因式，对 $f(x)$ 分解因式.

解 用竖式除法：

$$
\begin{array}{r}
x^2-5x+6\\
x+1\;\overline{)\,x^3-4x^2+\;\;x+6}\\
\underline{x^3+\;\;x^2\qquad\qquad}\\
-5x^2+\;\;x\qquad\\
\underline{-5x^2-5x\qquad}\\
6x+6\\
\underline{6x+6}\\
0
\end{array}
$$

$\therefore\quad f(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$

从以上除法中，我们发现，它的过程与 x 无关，所以，可以简写成：

$$
\begin{array}{r}
1-5+6\\
1+1\;\overline{)\,1-4+1+6}\\
\underline{1+1\qquad\quad}\\
-5+1\qquad\\
\underline{-5-5\qquad}\\
6+6\\
\underline{6+6}\\
0
\end{array}
$$

又由于高次总是被减掉，可以把上面的除法改写成下式

$$
\begin{array}{r|l}
1-4+1+6 & 1\\
1-5+6 & \\
\hline
1-5+6 & \multicolumn{1}{|l}{0}
\end{array}
$$

但每一步用减法容易出错，我们再把 1 改成 -1，这样，每一步都用加法，这就是分离系数法，用于高次多项式除以一次多项式.

$$
\begin{array}{r|l}
1-4+1+6 & -1\\
-1+5-6 & \\
\hline
1-5+6 & \multicolumn{1}{|l}{0}
\end{array}
$$

即 $x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x^2-5x+6)$