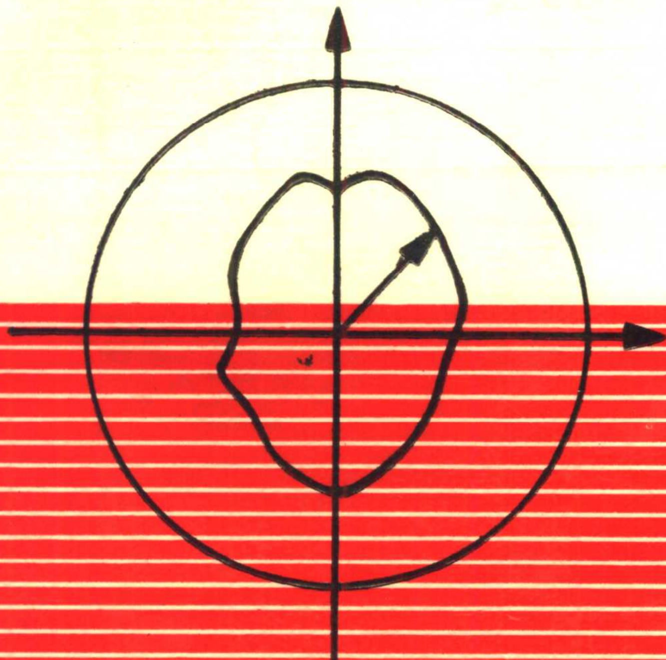
数学物理方程

王一平 周邦寅 李 立 编



電子工業出版社

数学物理方程

王一平　周邦寅　李　立　编

电子工业出版社

(京)新登字 055 号

内 容 提 要

本书主要内容有常微分方程的级数解、特殊函数、正交多项式、数学物理方程的建立及各种解法：分离变量法、积分变换法、行波法、格林函数法、保角变换法等.

本书可作为大学物理专业、技术物理专业、应用物理专业、无线电物理专业以及有关工科专业的教材.

数学物理方程

王一平 周邦寅 李 立 编

电子工业出版社出版(北京市万寿路)
责任编辑 陈晓莉
电子工业出版社发行 各地新华书店经售
西北工业大学印刷厂印刷
开本：787×1092 毫米 1/16 印张：20.625 字数：490 千字
1993 年 7 月第 1 版 1993 年 7 月第 1 次印刷
印数：1 000 册 定价：6.50 元
ISBN 7-5053-2152-8/G·173

前　言

数学物理方程是一门同实际联系较密切、综合性较强的学科。它以解决实际问题为唯一目标，广泛运用力学、物理学和数学等各个领域的知识。

1980年，当我们在给物理专业的学生按理科要求讲述"数学物理方法"的第二部分"数学物理方程"时，就感到原来该课程的体系对训练学生在开拓思路、学会使用这些方法来处理物理问题方面受到约束。主要的原因是在讲授次序中把特殊函数放到了数学物理偏微分方程的后面，以致在讲述偏微分方程时，算例面太窄。待讲过特殊函数后，又没有时间再返回来对各类典型问题的偏微分方程解法进行训练。为此，我们在不改变教材的基本内容的情形下做了一些变动。以后，又经过在我校技术物理系的79、80、81三个年级中继续试验。在此基础上写成了《数学物理方程》一书初稿。这本初稿又在我校物理系、电磁场工程系、技术物理系等多届学生中试用。实践证明，我们的设想和作法受到了学生的欢迎，在教学上取得了良好的效果。因而，可作为物理和应用物理等专业的教材而定稿。

本书主要分为两大部分共十一章，系统地讲解了特殊函数、数学物理方程的建立以及数理方程的各种解法。在内容安排上较合理，思路清楚，系统性较强，它比国内一般物理专业选用的这类教材有较明显的创新，这种体系使学生在学完高等数学之后，进一步过渡到偏微分方程的学习时比较自然，易于掌握，不致引起概念上的突变。同时，在进一步的学习过程中在方法的训练和计算实例的示范中有较大的回旋余地。因而，在训练学生解决实际问题的能力和把物理问题变为数学问题方面，可以做比较深入的引导。这是与同类工程数学教材相比而明显显示的又一特色。正是由于在体系上做了改动，故能够比较自然地引出厄密多项式、拉盖尔多项式和契比雪夫多项式等而又不增加很多教学时数。使用这一教材所需的教学时数约为60～72学时。

由于水平所限，书中难免有错误和不妥之处，敬请读者批评指正，谢谢。

编　者

目　　录

附录

第一篇　二阶线性常微分方程的级数解及正交多项式

当我们用分离变量法求解数学物理方程时，常常导出二阶线性常微分方程的求解和把一个函数用正交多项式展开的问题。在本篇中，我们将讨论二阶线性常微分方程的级数解、斯特姆——刘维型本征值问题以及正交多项式等问题，为下一篇数理方程的学习打下一个基础。

第一章　二阶线性常微分方程的级数解

在用分离变量法求解数学物理方程时，要根据所给问题的具体边界选择不同的坐标系。当我们采用球坐标系和柱坐标系对拉普拉斯方程、热传导方程和波动方程求解时，常常会导出二阶线性常微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的求解问题。

一般来说，对这类变系数的常微分方程不能用"高等数学"课程中所介绍的方法来求解。如方程

$$y''-xy=0,$$

$$xy''+y'+xy=0,$$

$$y''-2xy'+\lambda y=0\quad(\lambda\text{是常数}),$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0\quad(n\text{为常数})$$

等。为此，在本课程的开始，我们首先简单地介绍一下二阶线性常微分方程的级数解法。为日后数理方程的讨论铺平道路，以便我们今后能把全部的注意力都集中到数学物理偏微分方程的求解上。

所谓方程的级数解法，就是说，把二阶常微分方程的解表示为系数待定的幂级数，再将它代入原方程逐个确定其系数(当然原方程的系数 $p(x)$、$q(x)$也要作相应级数展开)，从而最终得到这个级数形式的解。

这里要注意，既然方程的解表示为级数形式，就有一个级数收敛的问题及级数的收敛范围问题。所以用级数解法，首先要选定以某个点 x_0 作为展开中心，得到的解是以 x_0 为中心的幂级数。其次，我们还必须确定这个幂级数的收敛圆，级数解只在收敛圆内部有意义。

§1.1.1　二阶线性常微分方程的奇点

二阶线性常微分方程的标准形式是：

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0\tag{1-1}$$

其中、$w(z)$是未知函数，系数$p(z)$、$q(z)$都是已知复变函数。

当在一定的条件下，例如，初始条件$w(z_0)=c_0$，$w'(z_0)=c_1$，在一定区域内求方程(1−1)的解$w(z)$时，常微分方程的解析理论*告诉我们，解的性质完全为方程的系数$p(z)$和$q(z)$的解析性所确定。设$p(z)$和$q(z)$在一定区域中，除有限个孤立奇点外，是z的单值解析函数。则区域中的点可分为两类：

如果方程(1−1)的系数$p(z)$和$q(z)$都在某点z_0及其邻域内解析，则z_0称为方程的常点。如果方程(1−1)中的两个系数$p(z)$和$q(z)$之一在某点z_0不是解析的，则z_0就称为方程的奇点。

我们用级数解法来求解在一定区域内在一定条件下方程(1−1)的解$w(z)$时，首先确定在哪个点的邻域上求解方程的解。也就是说，首先选取展开中心z_0，即在z_0点把解展为幂级数；然后再根据选取的展开中心z_0是方程的常点还是奇点分别进行讨论。

§ 1.1.2　方程常点邻域内的解

若z_0是方程(1−1)的一个常点，求在该点邻域内方程(1−1)的解。由微分方程解析理论可知有如下定理。

定理：如果$p(z)$和$q(z)$在圆$|z-z_0|<R$(R是与z_0最近的方程的奇点到z_0点的距离)内是单值解析的，则方程

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0 \tag{1-2}$$

在圆内有唯一的一个解$w(z)$满足初值条件

$$w(z_0)=c_0,\quad w'(z_0)=c_1 \tag{1-3}$$

c_0和c_1是任意常数，并且$w(z)$在这个圆内是单值解析的。

根据这个定理，可把方程(1−2)的解$w(z)$在它的常点z_0的邻域$|z-z_0|<R$中表为泰勒级数形式

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k \tag{1-4}$$

将(1−4)代入方程(1−2)中(当然(1−2)式中的系数$p(z)$和$q(z)$也要在z_0的邻域内作相应的泰勒展开)，可以确定级数(1−4)的系数c_k(用c_1和c_0表示)。这样就得到方程(1−2)的解在它的常点z_0的邻域内的幂级数表达式。下面通过具体例子来说明级数解法的具体步骤。

例1：在$x_0=0$的邻域内求解常微分方程

$$y''+\omega^2y=0\quad(\omega\text{是常数}) \tag{1-5}$$

解：方程的系数$p(x)\equiv0$，$q(x)=\omega^2$、在指定的展开中心$x_0=0$，$p(x_0)=0$和$q(x_0)=\omega^2$是有限的，它们在$x_0=0$是解析的，所以$x_0=0$是方程的常点。

在$x_0=0$的邻域内把方程(1−5)的解表为泰勒级数的形式。

设：
$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \tag{1-6}$$

* 参看尤秉礼编《常微分方程补充教程》，人教出版社(1980)。

其中c_k为待定常数，逐项微分(1—6)得

$$y'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kc_k x^{k-1} \tag{1-7}$$

$$y''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k x^{k-2} \tag{1-8}$$

至于$p(x)=0$和$q(x)=\omega^2$都是只有常数项的泰勒级数，无需再作展开。

把(1－6)、(1－8)代入原方程(1－5)，得

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k x^{K-2}+\omega^2\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k=0$$

因为此式对x是一个恒等式，故x的各次幂的系数均应分别为零。遂得

x^0的系数: $\quad$ x^1的系数:

$2\cdot 1c_2+\omega^2 c_0=0$ $\quad$ $3\cdot 2c_3+\omega^2 c_1=0$

x^2的系数: $\quad$ x^3的系数:

$4\cdot 3c_4+\omega^2 c_2=0$ $\quad$ $5\cdot 4c_5+\omega^2 c_3=0$

— — — — — — — $\quad$ — — — — — — — —

x^k的系数: $(k+2)(k+1)c_{k+2}+\omega^2 c_k=0$

最后这个式子是一般的。由此式可看出从x^k项的系数c_k可以推算出x^{k+2}项的系数c_{k+2}，因此称为系数的递推公式。可写作为

$$c_{k+2}=-\frac{\omega^2}{(k+2)(k+1)}c_k \tag{1-9}$$

由递推公式(1—9)进行具体系数递推:

$$c_2=-\frac{\omega^2}{2!}c_0 \qquad c_3=-\frac{\omega^2}{3!}c_1$$

$$c_4=-\frac{\omega^2}{4\cdot 3}c_2=\frac{\omega^4}{4!}c_0 \qquad c_5=-\frac{\omega^2}{5\cdot 4}c_3=\frac{\omega^4}{5!}c_1$$

— — — — — — — — — $\quad$ — — — — — — — — — —

$$c_{2k}=(-1)^k\frac{\omega^{2k}}{(2k)!}c_0 \qquad c_{2k+1}=(-1)^k\frac{\omega^{2k}}{(2k+1)!}c_1$$

这样，我们得到方程的解:

$$\begin{aligned}y(x)=&\ c_0\left[1-\frac{1}{2!}(\omega x)^2+\frac{1}{4!}(\omega x)^4+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k)!}(\omega x)^{2k}+\cdots\right]\\&+\frac{c_1}{\omega}\left[(\omega x)-\frac{1}{3!}(\omega x)^3+\frac{1}{5!}(\omega x)^5+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}\cdot(\omega x)^{2k+1}+\cdots\right]\\=&\ c_0\cos\omega x+\frac{c_1}{\omega}\sin\omega x\end{aligned} \tag{1-10}$$

最后还需要确定这个级数的收敛半径。上式两个方括号〔〕中的级数是我们所熟悉的，它们的收敛半径为无限大，即只要x有限，这两个级数都收敛。

(1−10)式中的 c_0 和 c_1 是任意常数，当然，c_1/ω 也是任意常数，故我们可以把(1−10)式写成:

$$y(x)=c_0\cos\omega x+c_1\sin\omega x \tag{1−11}$$

注意方程(1−5)本来就是一个常系数的微分方程，它的解是我们所熟悉的，这里用级数解法来解只是为了帮助大家领会用级数解法解题的步骤。

例 2: 求方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \tag{1−12}$$

在 $x_0=0$ 点邻域内的级数，其中 l 是一个参数。

解: 这个方程称为 l 阶勒让德方程。

首先我们把(1−12)化为标准形式如(1−2)

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{l(l+1)}{1-x^2}y=0$$

系数 $p(x)=-\dfrac{2x}{1-x^2}$，$q(x)=\dfrac{l(l+1)}{1-x^2}$ 在指定的展开中心 $x_0=0$ 处，$p(x_0)=0$，$q(x_0)=l(l+1)$ 是有限的，它们必然在 $x_0=0$ 为解析的，因此，$x_0=0$ 是方程的常点。

在 $x_0=0$ 的邻域内，这个方程的解可以表达成下列级数形式:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \tag{1−13}$$

其中 c_k 为待定常数。逐项微分(1−13)，得

$$y'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1} \tag{1−14}$$

$$y''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2} \tag{1−15}$$

方程(1−12)里的系数 $(1-x^2)$ 是只有常数项和二次项的泰勒级数，$-2x$ 是只有一次项的泰勒级数，故无需再作级数展开。

把(1−13)，(1−14)和(1−15)代入原方程(1−12)中，得到

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-2x\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}+l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0$$

此式是对 x 的一个恒等式，故 x 的各次幂之系数均应为零，遂得一系列的系数方程:

x^0 的系数:	x^1 的系数:
$2\cdot 1c_2+l(l+1)c_0=0$	$3\cdot 2c_3+(l^2+l-2)c_1=0$
x^2 的系数:	x^3 的系数:
$4\cdot 3c_4+(l^2+l-6)c_2=0$	$5\cdot 4c_5+(l^2+l-12)c_3=0$
— — — — — — — — — —	— — — — — — — — — —

x^k 的系数: $(k+2)(k+1)c_{k+2}+[l(l+1)-k(k+1)]c_k=0$

一般的系数递推公式是

$$c_{k+2}=-\frac{l(l+1)-k(k+1)}{(k+2)(k+1)}c_k \quad (k=0,1,2\cdots) \tag{1-16}$$

由递推公式(1－16)具体进行系数递推：

$$c_2=\frac{(-l)(l+1)}{2!}c_0 \qquad\qquad c_3=\frac{(1-l)(l+2)}{3!}c_1$$

$$c_4=\frac{(2-l)(l+3)}{4\cdot 3}c_2 \qquad\qquad c_5=\frac{(3-l)(l+4)}{5\cdot 4}c_3$$

$$=\frac{(2-l)(-l)(l+1)(l+3)}{4!}c_0 \qquad\qquad =\frac{(3-l)(1-l)(l+2)(l+4)}{5!}c_1$$

$$\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots$$

根据(1−16)式，我们把所有下标为偶数的系数c_{2k}用c_0表示出来，而把所有下标为奇数的系数c_{2k+1}用c_1表示出来。即得

$$c_{2k}=\frac{(2k-2-l)(2k-4-l)\cdots(2-l)(-l)(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!}c_0$$

$$c_{2k+1}=\frac{(2k-1-l)(2k-3-l)\cdots(1-l)(l+2)(l+4)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}c_1$$

将(1−16)代入(1−13)，则得l阶勒让德方程(1−12)的含有两个任意常数c_0和c_1的通解：

$$y(x)=c_0\left[1-\frac{l(l+1)}{2!}x^2+\frac{(l-2)l(l+1)(l+3)}{4!}x^4-\cdots\cdots\right]$$

$$+c_1\left[x-\frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)}{5!}x^5-\cdots\right]$$

$$\stackrel{\text{记为}}{=\!=}c_0y_1(x)+c_1y_2(x) \tag{1-17}$$

其中$y_1(x)$只含x的偶次幂，$y_2(x)$只含x的奇次幂。

当然，由于方程(1−12)中含有参数l，解式(1−17)中的$y_1(x)$、$y_2(x)$也必依赖于这个参数，由(1−16)式可知这个参数将出现在x的各次幂的系数中。

最后确定(1−17)式中两个方括号〔 〕中的级数的收敛半径。把幂级数收敛半径的公式$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|c_n/c_{n+1}\right|$应用于(1−17)式两个方括号中的级数，则$R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|c_k/c_{k+2}\right|$。

利用递推公式(1−16)式，则得

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+2)(k+1)}{(k-l)(k+l+1)}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\left(1-\frac{l}{k}\right)\left(1+\frac{l+1}{k}\right)}\right|=1$$

这样级数解(1－17)收敛于$|x|<1$，而发散于$|x|>1$。

现在回到普遍的方程(1−2)和它在常点在z_0的级数解(1−4)，用同上面例子同样的步骤来确定系数c_k。因$p(z)$和$q(z)$都在z_0点解析，故有泰勒展开

$$p(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(z-z_0)^m,\quad q(z)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z-z_0)^m \tag{1-18}$$

其中 $$a_m=p^{(m)}(z_0)/m!\,,\quad b_m=q^{(m)}(z_0)/m!$$

均是已知的。

把(1-4)和(1-8)代入方程(1-2)中，得

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k(k-1)k(z-z_0)^{k-2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m(z-z_0)^m \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k k(z-z_0)^{k-1}$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z-z_0)^m \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k = 0$$

这是一个关于$(z-z_0)$的恒等式，故各次幂系数均应为零，由此可得系数 c_k 的递推公式:

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + \sum_{m=0}^{k} a_m(k+1-m)c_{k+1-m} + \sum_{m=0}^{k} b_m c_{k-m} = 0^{*}$$
$$(k=0,1,2\cdots\cdots) \tag{1-19}$$

则解(1-4)满足方程(1-2)。

利用(1-19)式可以从 c_2 开始逐一把所有的系数都用 c_0 和 c_1 表示出来。因此方程(1-2)具有形如$y(x)=c_0y_1(x)+c_1y_2(x)$的通解，但$y_1(x)$，$y_2(x)$一般并不一定分别只含 x 的偶次幂和奇次幂。

§ 1.1.3　方程正则奇点邻域内的正则解

由§ 1.1.2 中的定理可知，方程$w''+p(z)w'+q(x)w=0$ 的常点必是解的解析点。但是，方程的奇点则可能同时也是解的奇点。因此，当 z_0 为方程的奇点时，如果仍然试图得到幂级数形式的解，当然应当考虑罗朗级数。此时由常微分方程的解析理论可得如下定理

定理 1: 如果z_0是方程$w''+p(z)w'+q(z)q=0$ 的奇点，则在 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内(R 足够小，使环状域内无方程的奇点)，方程有两个线性无关的解:

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \tag{1-20}$$

$$w_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k(z-z_0)^k \quad (\rho_1-\rho_2\neq \text{整数}) \tag{1-21}$$

或 $$w_2(z)=aw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k(z-z_0)^k \quad (\rho_1-\rho_2=\text{整数}) \tag{1-22}$$

其中ρ_1、ρ_2、a、c_k、d_k $(k=0、\pm 1、\pm 2\cdots)$是待定系数。

如果我们仍仿照§ 1.1.2 的做法，把解(1-20)，(1-21)或(1-22)分别代入原方程确定常数 ρ_1、ρ_2 和系数 a，c_k，d_k 时，一般的说得到的是无穷个联立方程，每一个方程含有无穷个未知数。因此，在普遍的情况下，用这种方法求解是不方便的。

---

* 这里用了公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (k+l=n,\ n=0,1,2\cdots\cdots)$$

其中 $$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots\cdots + a_nb_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} b_l$$

但在一些特定的条件下，以上诸式[(1−20)，(1−21)或(1−22)]中会出现无穷级数中不含负幂项的情形。这样的解称为方程的正则解。这时，若用上节方法来求系数，将会得到一系列关于系数的递推公式。

定理 2：方程$w''+p(z)w'+q(z)w=0$在它的奇点z_0的邻域$0<|z-z_0|<R$内有两个正则解的充要条件是

$$(z-z_0)p(z)\text{和}(z-z_0)^2q(z)\text{在}|z-z_0|<R\text{中解析} \tag{1−23}$$

也就是说z_0最多是$p(z)$的一阶极点，同时最多是$q(z)$的二阶极点。满足条件(1−23)的奇点称为方程的正则奇点，否则为方程的非正则奇点。

下面我们来说明求正则解的步骤。为了讨论方便，我们设正则奇点为$z_0=0$(对于一般$z_0\neq 0$的奇点，只要把下面各式中的$z\xrightarrow{\text{换成}}z-z_0$即可)。

以z^2乘标准的二阶线性常微分方程

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0 \tag{1−24}$$

得
$$z^2w''+zp_1(z)w'+q_1(z)w=0 \tag{1−25}$$

其中
$$p_1(z)=zp(z),\quad q_1(z)=z^2q(z)$$

按所设，$z_0=0$是正则奇点，故由条件(1−23)可知$p_1(z)$和$q_1(z)$在$z_0=0$点及其邻域内是解析的，可按泰勒级数展开

$$p_1(z)=\sum_{s=0}^{\infty}a_sz^s,\qquad q_1(z)=\sum_{s=0}^{\infty}b_sz^s \tag{1−26}$$

设方程(1−25)的正则解为

$$w(z)=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{\rho+k}\qquad(c_0\neq 0) \tag{1−27}$$

把(1−26)、(1−27)代入(1−25)中，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)(\rho+k-1)z^{\rho+k}+\sum_{s=0}^{\infty}a_sz^s\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)z^{\rho+k}+\sum_{s=0}^{\infty}b_sz^s\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{\rho+k}=0$$

消去因子z^{ρ}，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)(\rho+k-1)z^k+\sum_{s=0}^{\infty}a_sz^s\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)z^k+\sum_{s=0}^{\infty}b_sz^s\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k=0 \tag{1−28}$$

要使该式在$|z|<R$的区域内成立，左方z的各次幂的系数都必须等于零。

由z的最低次幂的系数为零，得

$$c_0(\rho)(\rho-1)+a_0c_0\rho+b_0c_0=0$$

$$c_0[\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0]=0$$

但又因为$c_0\neq 0$，故有
$$\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0 \tag{1−29}$$

这是ρ的二次代数方程——称为指标方程，因为这个方程的两个根ρ_1和ρ_2给出了解式(1−27)的指标。

再由(1−27)中z^n的系数为零，得

$$c_n(\rho+n)(\rho+n-1)+\sum_{s=0}^{n}a_s(\rho+n-s)c_{n-s}+\sum_{s=0}^{\infty}b_s c_{n-s}=0 \qquad (1-30)$$

$$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

利用这个系数递推关系，可以逐一地把(1−27)式中的$c_k(k>0)$用c_0和ρ以及已知的a_s、b_s表示出来。

但因指标方程(1−29)有两个根ρ_1和ρ_2，为讨论方便我们设$\mathrm{Re}(\rho_1)\geq \mathrm{Re}(\rho_2)$，故用递推关系(1−30)一般可以分别得到两组系数c_k和d_k，从而得到方程(1−24)的两个幂级数解。但需要区别两种情况来讨论:

1. $\rho_1-\rho_2\neq$整数(包括零)

分别以$\rho=\rho_1$和$\rho=\rho_2$代入递推公式(1−30)，得到两组系数c_k和d_k，从而得到方程(1−24)[即方程(1−2)]的两个解

$$w_1(z)=z^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \qquad (1-31)$$

$$w_2(z)=z^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k z^k \qquad (1-32)$$

其中，c_0和d_0是两个不为零的任意常数。显然，这两个解是线性无关的，因为当$z\to 0$时，$w_1(z)\sim c_0 z^{\rho_1}$，$w_2(z)\sim d_0 z^{\rho_2}$，故

$$\frac{w_1(z)}{w_2(z)}\sim\frac{c_0 z^{\rho_1}}{d_0 z^{\rho_2}}\xrightarrow{\text{因}\rho_1\neq\rho_2}\neq\text{常数}$$

2. $\rho_1-\rho_2=$整数[零或正整数，因已设$\mathrm{Re}(\rho_1)\geq \mathrm{Re}(\rho_2)$]。

对于ρ_1仍可用(1−30)式，令$\rho=\rho_1$，求得一组系数$c_k(k=1,2,\cdots\cdots)$，从而得到解(1−30)。但若用同样的方法，令(1−30)式中的$\rho=\rho_2$求d_k时，则可能得不到与$w_1(z)$线性无关的另一个合理解$w_2(z)$。故需要用其它的方法来求第二个解$w_2(z)$。

当我们求得第一个解$w_1(z)$之后，可用二阶线性常微分方程理论中熟知的公式

$$w_2(z)=Aw_1(z)\int^z\frac{e^{\int^z-p(\xi)d\xi}}{[w_1(z)]^2}dz \qquad (1-33)$$

求方程(1−23)的第二个解。

但因此式被积函数中含有$[w_1(z)]^{-2}$，而$w_1(z)$又是一个无穷级数，不便于直接计算。但当$\rho_1-\rho_2=m(m=0,1,2\cdots$为整数)时，用待定系数法可以从(1−32)得到

$$w_2(z)=aw_1(z)\ln z+z^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k z^k \quad * \qquad (1-34)$$

在具体问题中，当$\rho_1-\rho_2=m(m=0,1,2\cdots\cdots)$时，常常是把(1−33)直接代入原方程(1−24)中去确定待定常数a和系数d_k。请看下面的具体例子。

例1: 在$x_0=0$的邻域内求解欧拉方程

$$x^2y''+xy'-m^2y=0 \qquad (m^2\text{是常数}) \qquad (1-35)$$

解: 首先把方程化为标准形式，系数$p(x)=1/x$，$q(x)=-m^2/x^2$，展开中心$x_0=0$是$p(x)$的一阶极点又是$q(x)$的二阶极点，因此，$x_0=0$是方程的正则奇点。在$x_0=0$

的邻域内有两个正则解。

令
$$y(x)=x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{\rho+k}\qquad (c_0\neq 0)\tag{1—36}$$

从而
$$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)x^{(\rho+k-1)}\tag{1—37}$$

$$y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)(\rho+k-1)x^{(\rho+k-2)}\tag{1—38}$$

方程(1—35)里的 x^2，x 和$-m^2$ 分别是 x 的二次项，一次项和常数项的泰勒级数，无需再作展开。

把(1—36)、(1—37)、(1—38)代入(1—35)中得

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)(\rho+k-1)x^{\rho+k}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)x^{\rho+k}-m^2\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{\rho+k}=0$$

这是关于 x 的一个恒等式，x 的各次幂的系数均应为零。故可得一系列的系数方程：

x^0 的系数：$\quad[\rho(\rho-1)+\rho-m^2]c_0=0$

x^1 的系数：$\quad[(\rho+1)\rho+(\rho+1)-m^2]c_1=0$

x^2 的系数：$\quad[(\rho+2)(\rho+1)+(\rho+2)-m^2]c_2=0$

…………………………

即
$$[\rho^2-m^2]c_0=0$$
$$[(\rho+1)^2-m^2]c_1=0$$

---

* 参看 B.N 斯米尔诺夫《高等数学教程》的§98.

在上节和本节我们谈到方程的常点 z_0、奇点 z_0 都假定是在有限区域内的．如果所讨论的是无穷远点，则须作变换 $z=1/t$，然后讨论由此导出的方程

$$\frac{d^2w}{dt^2}+\left\{\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}p\left(\frac{1}{t}\right)\right\}\frac{dw}{dt}+\frac{1}{t^4}q\left(\frac{1}{t}\right)w=0$$

在$t=0$处的性质(是常点还是奇点)和解的形式．不难看出：

(1) $t=0(z=\infty)$为常点的条件是

$$p\left(\frac{1}{t}\right)=2t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots\cdots$$

$$q\left(\frac{1}{t}\right)=b_4t^4+b_5t^5+\cdots\cdots$$

即
$$p(z)=\frac{2}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\cdots\cdots$$

$$q(z)=\frac{b_4}{z^4}+\frac{b_5}{z^5}+\cdots\cdots$$

(2) $t=0(z=\infty)$为正则奇点的条件是

$\frac{1}{t}p\left(\frac{1}{t}\right)\quad$ 在$t=0$ [即$zp(z)$在$z=\infty$]解析，

$\frac{1}{t^2}q\left(\frac{1}{t}\right)\quad$ 在$t=0$ [即$z^2q(z)$在$z=\infty$]解析，

$$[(\rho+2)^2-m^2]c_2=0$$

— — — — — — — — — — —

$\because$ $c_0\neq 0$，由第一个方程，得指标方程为

$$\rho^2-m^2=0$$

由此得出
$$\rho_1=+m和\rho_2=-m$$

先取$\rho_1=+m$

第二个方程变为$[(m+1)^2-m^2]c_1=0$，由此得 $c_1=0$，第三个方程$[(m+2)^2-m^2]c_2=0$，由此知 $c_2=0$，……照此类推，后面所有系数均为0，这样，得到微分方程(1–35)的一个特解

$$y_1(x)=x^m \tag{1-39}$$

再取$\rho_2=-m$

第二个方程变为$[(-m+1)^2-m^2]c_1=0$，由此知 $c_1=0$，第三个方程成为$[(-m+2)^2-m^2]c_2=0$，由此知 $c_2=0$，……以此类推，后面所有系数全为0。这样，得到微分方程(1–35)的另一个特解

$$y_2(x)=x^{-m} \tag{1-40}$$

所以微分方程(1–35)的通解是

$$y(x)=cx^m+dx^{-m} \tag{1-41}$$

例2：在$x_0=0$的邻域内求v阶贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0 \tag{1-42}$$

的解。其中v是任意常数。

解：把方程(1–42)化为标准形式(1–24)，系数$p(x)=1/x$，$q(x)=1-v^2/x^2$。指定的展开中心 $x_0=0$ 是$p(x)$ 的一阶极点，又是$q(x)$的二阶极点，因此，$x_0=0$是方程(1–42)的正则奇点。

设
$$y(x)=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{\rho+k}\qquad (c_0\neq 0) \tag{1-43}$$

从而
$$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)x^{(\rho+k-1)} \tag{1-44}$$

$$y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)(\rho+k-1)x^{(\rho+k-2)} \tag{1-45}$$

方程(1–42)中的系数x^2、x和(x^2-v^2)分别是只有一项和两项的泰勒级数，无需再作展开。

把(1–43)、(1–44)和(1–45)代入原方程(1–42)中，并消去因子x^ρ，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)(\rho+k-1)x^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)x^k-v^2\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+2}=0 \tag{1-46}$$

此式是关于x的一个恒等式，故x的各次幂的系数均必须为0。

由x^0(即x最低次幂)的系数为零得指标方程。又由于$c_0\neq0$，故得

$$\rho^2-v^2=0 \tag{1-47}$$