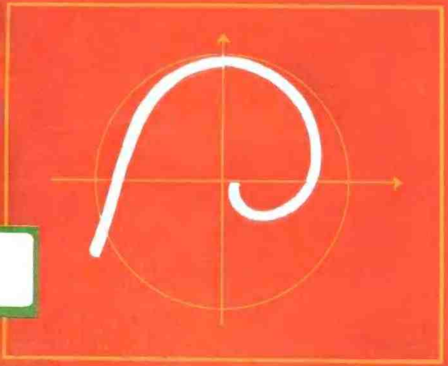
下册

王晋卿 王水汀 白长珍 张洪俊

经济数学讲义

JING JI SHU XUE JIANG YI



经济数学讲义

（下册）

王晋卿　王水汀　白长珍　张洪俊

甘肃人民出版社出版发行
（兰州第一新村81号）
兰州新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1／32　印张12.625 字数260,000
1989年9月第1版　1989年9月第1次印刷
印数：1——8,300

ISBN 7-226-00523-9／G·53　定价：4.35元

目　录

第七章　多元函数微积分

前面几章我们所研究的是只依赖于一个自变量的函数，也就是一元函数，这是两个变量之间的相互关系。但是在经济管理学科及客观世界的各个领域中，我们更多地遇到的是三个或三个以上变量相互联系、相互制约的关系，这就需要研究多元函数及其微积分。多元函数微积分是一元函数微积分的推广和发展，它可以化成一元函数来研究，但一元函数又不能完全代替多元函数。所以学习这一章要与一元函数的相应部分相对照，弄清两者的异同，加深对所学内容的理解。

本章重点介绍二元函数的概念及偏导数，二元函数极值的求法和最小乘法。因为对二元函数的研究方法，原则上也适用于一般多元函数。而从一元函数推广到二元函数将要引出一些新的概念和性质。

§7—1　空间解析几何简介

空间解析几何是用代数方法研究空间几何图形的问题。这里我们仅介绍空间解析几何的一些初步知识。

一、空间直角坐标系

为了确定平面上任意一点的位置，我们建立了平面直角

坐标系。现在，为了确定空间任意一点的位置，我们引进空间直角坐标系。

在空间取定一点O，过点O作三条互相垂直的直线ox、oy、oz，并按右手规则确定它们的正方向，即将右手伸直，姆指朝上为OZ轴的正方向，其余四指的指向为ox轴的正方向，四指弯曲 90° 后的指向为oy轴的正方向。再规定一个长度单位。如图7—1．1所示。

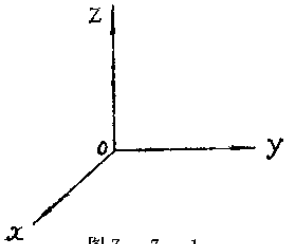


图7—7．1

点O称为坐标原点，三条直线ox、oy、oz分别称为x轴、y轴、z轴（又名：横轴、纵轴、竖轴），统称为坐标轴。

每两条坐标轴所确定的一个平面，称为坐标平面，由x轴和y轴确定的平面称为xoy平面或xy平面，由y轴和z轴确定的平面称为yoz平面或yz平面，由z轴和x轴确定的平面称为zox平面或zx平面。

三个坐标平面将空间分成八个部分，称为八个卦限。由水平位置的xoy平面为界的上面部分按逆时针方向依次为第Ⅰ、第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ卦限，下面部分也按逆时针方向依次为第Ⅴ、第Ⅵ、第Ⅶ、第Ⅷ卦限。

第Ⅰ卦限：$\{(x, y, z) | x>0, y>0, z>0\}$

第Ⅱ卦限：$\{(x, y, z) | x<0, y>0, z>0\}$

第Ⅲ卦限：$\{(x, y, z) | x<0, y<0, z>0\}$

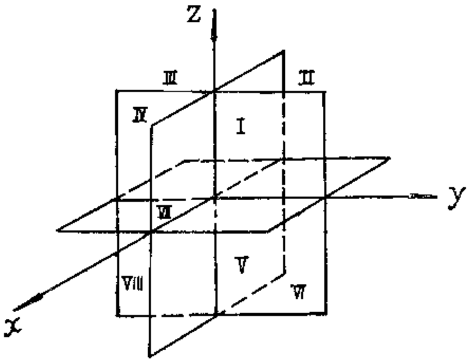
第Ⅳ卦限：$\{(x, y, z) | x>0, y<0, z>0\}$

第Ⅴ卦限：$\{(x, y, z) \mid x>0, y>0, z<0\}$

第Ⅵ卦限：$\{(x, y, z) \mid x<0, y>0, z<0\}$

第Ⅶ卦限：$\{(x, y, z) \mid x<0, y<0, z<0\}$

第Ⅷ卦限：$\{(x, y, z) \mid x>0, y<0, z<0\}$如图7—1.2所示。



煤7—1.2

过点M作三个平面，分别垂直于x轴、y轴、z轴，且与这三个轴分别交于点P、Q、R。设$OP=x$、$OQ=y$、$OR=z$，则点M唯一确定了一个三元有序数组(x, y, z)。反之，对于任意三元有序数组(x, y, z)，在x、y、z轴上分别取点P、Q、R，且使$OP=x$、$OQ=y$、$OR=z$，然后分别过P、Q、R三点作垂直于x、y、z轴的平面，这三个平面相交于一点M，则由一个三元有序数组(x, y, z)唯一确定了空间的一个点M。如图7—1.3所示。

于是，空间任意一点M和一个三元有序数组(x, y, z)之间建立了一一对应关系。我们称这个三元有序数组为点M的坐标，记作$M(x, y, z)$。

显然坐标原点O的坐标为(0，0，0)；

x轴上点的坐标为$(x, 0, 0)$；

y轴上点的坐标为$(0, y, 0)$；

z轴上点的坐标为$(0, 0, z)$。

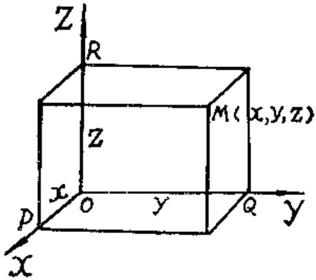


图7—1.3

假如点M的坐标为(a, b, c)时，点M与yoz平面的距离为a，点M与zox平面的距离为b，点M与xoy平面的距离为C。

当点M与x轴正向在yoz平面同侧时，a为正数，在异侧时，a为负数。同样可推得b，c之正负。

二、空间任意两点间的距离

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$是空间任意两点，过M_1，M_2分别作垂直于三个坐标轴的平面。这六个平面围成一个以线段M_1M_2为一条对角线的长方体，如图7—1.4所示。

由图可知：

$|M_1M_2|^2 = |M_2S|^2 + |M_1S|^2$

$=|M_2S|^2+|M_1N|^2+|NS|^2$

过M_1，M_2分别作垂直于ox轴的平面，交ox轴于P_1P_2。则

$$OP_1=x_1,\ OP_2=x_2$$

因此 $|M_1N|$

$$=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$$

同理可得

$$|NS|=|y_2-y_1|$$
$$|M_2S|=|z_2-z_1|$$

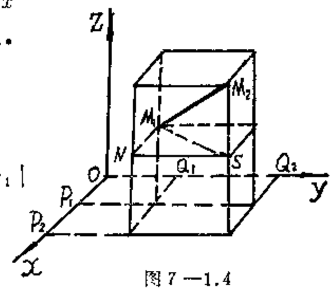


图 7 —1.4

于是，得

$$|M_1M_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2+|z_2-z_1|^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

因此，求得$M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$与$M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$之间的距离公式为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (7—1.1)$$

如果点M_1，M_2均位于xoy平面上，即$z_1=z_2=0$，则得xoy平面上两点$M_1(x_1,\ y_1)$，$M_2(x_2,\ y_2)$之间的距离公式

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

如果点M_2为坐标原点，即$x_2=0$，$y_2=0$，$z_2=0$，则得点$M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$与坐标原点O的距离公式

$$d=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

故空间任意一点$M(x,\ y,\ z)$到坐标原点O的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 7—1.1 求点P_1（2，2，$\sqrt{2}$）和P_2（1，3，0）之间的距离。

解：
$$|P_1P_2|=\sqrt{(1-2)^2+(3-2)^2+(0-\sqrt{2})^2}$$
$$=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}$$
$$=\sqrt{1+1+2}$$
$$=\sqrt{4}=2$$

三、曲面与方程

在平面解析几何中，我们建立了曲线与一元方程之间的对应关系（即曲线的方程，方程的曲线的概念）。在空间解析几何中，我们可以用同样的方法，建立空间曲面与包含三个变量的方程$F(x,y,z)=0$之间的对应关系。

定义 7—1.1 如果曲面S上任意一点的坐标都满足方程$F(x,y,z)=0$，而不在曲面S上的点的坐标都不满足方程$F(x,y,z)=0$，则称方程$F(x,y,z)=0$为曲面S的方程，曲面S为方程的曲面，如图 7—1.5所示。

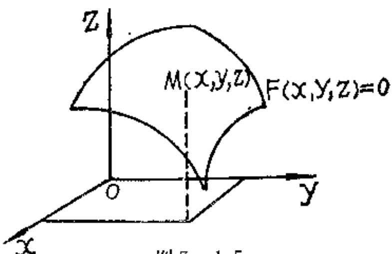


图 7—1.5

如果空间曲面方程$F(x, y, z)=0$，对x、y、z都是一次的，则它所对应的曲面就是一个平面。如果方程是二次的，则它所对应的曲面叫做二次曲面。

一般来说，关于曲面与方程，大致有两类问题：一类是已给某种曲面或给定某种条件限制下的点的轨迹或适合某种几何条件的点的全体，如何去求曲面的方程；另一类是已给某种方程如何作出它的图形。

对于第一类问题，我们可以建立适当的空间直角坐标系，然后记曲面上的动点为$M(x, y, z)$，再将已知条件改写成关于x，y，z的方程，然后进行化简，就可以了。

对于第二类问题，如果所给方程形式比较简单或比较熟悉，则可以直接画出已给方程的图形或用语言来描述所给方程的图形。另外，还常常采用"平行截割法"（又称截痕法）对所给的问题进行分析和推断。所谓平行截割法就是用三个坐标平面及平行于三个坐标平面的平面去截割一个曲面，从所截出的一组曲线的形状来想像这个曲面的大致形状。对于二次曲面用这种方法往往是很有成效的。

如果从曲面方程$F(x, y, z)=0$中解出z来，则可得到形如$z=f(x, y)$的曲面方程。

例 7—1.2　求三个坐标平面的方程。

解：容易看到xoy平面上任意一点的坐标必有$z=0$，反之，满足方程$z=0$的点必然在xoy平面上，因此xoy平面的方程为$z=0$。

同理，yoz平面的方程为$x=0$；zox平面的方程为$y=0$。

由此例可见：若把xoy坐标平面向上平移$a>0$个单位，

得到新平面，如图 7—1.6所示。其方程为$z=a$。这是因为在此平面上每一点的横坐标和纵坐标可以是任意数，而竖坐标等于a之故。

这些平面方程均可看成是三元一次方程$Ax+By+Cz=0$的特殊情况（其中两个变量的系数为零的三元一次方程）。

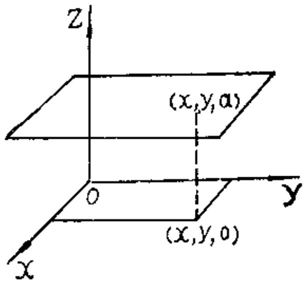


图 7—1.6

例 7-1.3　一个动点与两个定点A（2，-3，2）及B（1，4，-2）的距离相等，求此动点轨迹的方程。

解：设动点为M（x，y，z），依题意，此动点运动时应满足

$$|MA|=|MB|$$

由空间两点距离公式，有

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+(z-2)^2}$$
$$=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2+(z+2)^2}$$

将上式两边平方并化简，得所求方程为

$$x-7y+4z+2=0$$

由立体几何知识可得，此动点运动轨迹应是线段AB的垂直平分面。所以上面得到的方程就是线段AB的垂直平分面的方程。

在上述两例中，所讨论的方程都是一次方程，所表示的图形都是平面。

要特别注意，在平面解析几何中，一次方程表示一条直线；在空间解析几何中，一次方程则表示一个平面，不要将两者混淆。例如：$x+y=1$ 在 xoy 平面上表示一条直线，面在空间则表示一个平面。

例 7—1.4 求过点 $M(a,0,0)$，$N(0,b,0)$，$P(0,0,c)$ 的平面方程（a，b，c 均不为零）。

解：把 M、N、P 的坐标分别代入平面方程的一般式

$$Ax+By+Cz+D=0\text{，得}$$

$$\begin{cases} Aa+D=0 \\ Bb+D=0 \\ Cc+D=0 \end{cases}$$

解之，得

$$A=-\frac{D}{a}$$

$$B=-\frac{D}{b}$$

$$C=-\frac{D}{c}$$

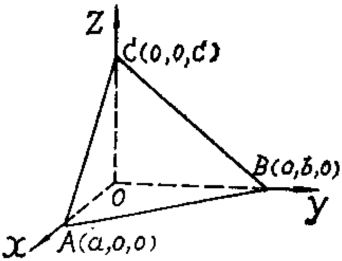


图 7—1.7

把 A、B、C 代入平面方程的一般式，得

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0$$

方程两边均除以 $-D$ 得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

因为 a、b、c 分别是平面截三坐标轴所得的截距，所以

这种形式的平面方程，叫做平面的截距式方程，如图7—1.7所示。

前面已经提到，方程$F(x, y, z)=0$如果是二次方程，它所对应的曲面叫做二次曲面。

以下我们仅就几种常见的简单二次曲面进行讨论。

1、球面方程

例7—1.5 求球心为$M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为R的球面方程。

解：设$M(x, y, z)$为球面上任意一点，如图7—1.8所示。

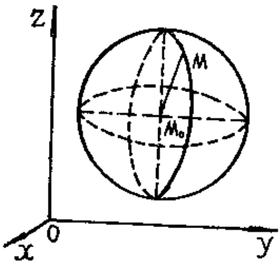


图7—1.8

则有

$$|M_0M|=R$$

由距离公式有

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

化简得球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \qquad (7—1.2)$$

特别地，当球心为原点，即$x_0=y_0=z_0=0$时球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

由上式解出$Z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

其中$Z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$是球面的上半部，如图7—1.9所示。$Z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$是球面的下半部，如图7—1.10

所示。

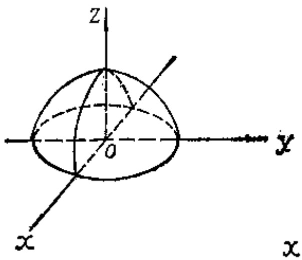


图7—1.9

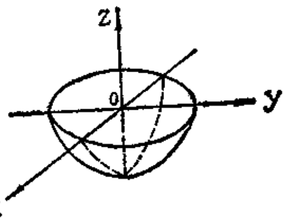


图7—1.10

分析上述球面方程可见，方程是关于x、y、z 的二次方程，其x^2、y^2、z^2三项的系数相同，其余项是x、y、z的一次项或常数项．反之，对任何满足上述条件的二次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+FZ+G=0 \quad (A\neq 0)$$

当两边除以A时，得

$$x^2+y^2+z^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}Z+\frac{G}{A}=0$$

配方，得

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2+\left(Z+\frac{F}{2A}\right)^2$$

$$=\frac{D^2+E^2+F^2-4AG}{4A^2} \qquad (7—1.3)$$

比较（7—1.2）与（7—1.3）两式可见

当$D^2+E^2+F^2-4AG>0$时，（7—1.3）式表示

球心为$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}, -\frac{F}{2A}\right)$、半径为

$\frac{1}{2|A|}\sqrt{D^2+E^2+F^2-4AG}$的球面；

当$D^2+E^2+F^2-4AG=0$时，（7—1.3）式表示

点$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}, -\frac{F}{2A}\right)$；

当$D^2+E^2+F^2-4AG<0$时，（7—1.3）式不能表示任何曲面或点。

例如三元二次方程

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+2=0$$

配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=2^2$

是以（1，－2，－1）为球心、2为半径的球面方程。

2、柱面方程

一条直线l沿着一已知平面曲线c平行移动所形成的曲面，称为柱面。直线l称为柱面的母线，平面曲线c称为柱面的准线。

例7—1.6 作$x^2+y^2=R^2$的图形。

解： 方程$x^2+y^2=R^2$在xoy平面上表示以原点为圆心，半径为R的圆。面在空间解析几何中，由于方程不含z，意味着z可取任意值，只要x和y满足$x^2+y^2=R^2$即可。因此，这个方程所表示的曲面，是由平行于z轴的直线沿xoy平面上的圆$x^2+y^2=R^2$移动面形成的圆柱面。$x^2+y^2=R^2$叫做它的准线，平行于z轴的直线叫做母线，如图7—1.11所示。

例7—1.7 作$y=x^2$的图形。

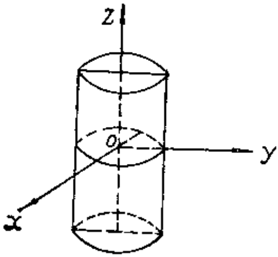


图 7 —1.11

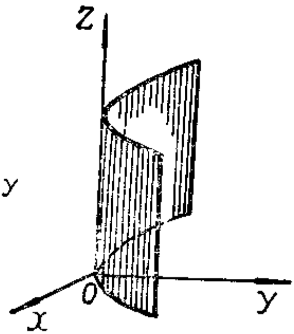


图 7 —1.12

解：在xoy平面内，$y=x^2$表示一条抛物线，而在空间解析几何中，表示以$y=x^2$为准线，平行于z轴的直线为母线的抛物柱面，如图 7 —1.12所示。

例 7 —1.8 下列方程各表示什么曲面？

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$； (2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；

(3) $z=2x$； (4) $z=y^2$。

解：(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于z轴的椭圆柱面。

(2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 表示母线平行于y轴的双曲柱面。

(3) $z=2x$表示母线平行于y轴，准线为xz平面上的直线柱面，即平行于y轴的平面。

(4) $z=y^2$表示母线平行于x轴的抛物柱面。