非线性科学丛书

分形与图象压缩

陈守吉　张立明 编著

上海科技教育出版社

内 容 提 要

本书是非线性科学丛书中的一种，介绍分形在图象压缩编码中的应用．全书计分三章，包括分形几何基础、迭代函数系统、拼贴定理、分形图象压缩的基本原理和实现方法，本书是一本非线性科学应用于图象压缩的科技著作．

本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生阅读，也可供有关研究人员参考．

非线性科学丛书

分形与图象压缩

陈守吉 张立明 编著

上海科技教育出版社出版发行

（上海市冠生园路393号 邮政编码：200233）

各地新华书店经销 上海市印刷十二厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：4.625 字数：112 000

1998年12月第1版 1998年12月第1次印刷

印数：1－3200

ISBN 7－5428－1642－X/O·164 定价：（精装本）11.50元

非线性科学丛书编辑委员会

非线性科学丛书

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法."数、理、化、天、地、生"这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域. 这种发展的一个重要特征，可以概括为"非"字当头，即出现了以"非"字起首而命名的一系列新方向和新领域. 其中，非线性科学占有极其重要的位置. 这决非人们"想入非非"，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升.

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题. 每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧. 诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型. 不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的"手工艺"珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系.

20 世纪 60 年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化. 一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质. 这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓"反散射"方法. 反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质. 到了 80 年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系.

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理．于是，非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来，成为一个广泛的研究领域．虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统，但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的．

另一方面，在"不可积"的极端，对KAM定理条件的"反面文章"，揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性，而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例．这些研究迅速地融成一片，一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识．原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统，其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感，同投掷骰子一样地随机和不可预测．然而，混沌不是无序，它可能包含着丰富的内部结构．

同时，由于计算科学特别是图形技术的长足进步，人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象．从随机与结构共存的湍流图象，到自然界中各种图样花纹的选择与生长，以及生物形态的发生过程，都开始展现出其内在的规律．如果说，混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为，则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程．标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用．

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中，许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散，同时也提出了新的深刻的数学问题．物理学中关于对称和守恒，对称破缺，相变和重正化群的思想，也在日益增多的新领域中找到应用．"非线性"一词曾经是数学中用以区别于"线性"问题的术语，非线性科学正在成为跨学科的研究前沿．各门传统学科中都有自己的非线性篇章，非线性科学却不是这些篇章的总和．非线性科学揭示各种非线性现象的共性，发展处理它们的普适方法．

这样迅猛发展的跨学科领域，很难设想用少数专著加以概括，

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步. 于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人员,以集体力量撰写一套"非线性科学丛书"的想法. 在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现.

这套"非线性科学丛书"不是高级科普,也不是大块专著. 它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人员和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人员更新知识提供自学教材. 非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛. 在写作风格上,作者们将努力深入浅出;图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者. 从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯.

"非线性科学丛书"的成功,取决于读者和作者的支持. 我们衷心欢迎批评和建议.

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前　言

分形是非线性科学中的一个重要领域. 分形图象是一种具有复杂几何形状,不规则的图象,但其内部存在着无穷多个自相似性,因而可以用一组简单的迭代函数方程通过随机迭代而得到. 这个思想在 80 年代末被引入到图象的压缩编码中,从严格具有自相似性的分形图象推广到一般的任意图象,从黑白图象推广到有灰阶甚至于彩色图象上. 如果任意图象都可以近似为分形图象,那么只要找到其图象内部存在的自相似迭代函数的参数,则图象就可用迭代函数的参数来表达,这就大大压缩了图象的信息量,解决图象压缩编码中的问题. 近年来,由于信息科学和工程应用的发展,图象分形编码的研究也发展很快,分形几何在图象压缩编码中的应用成为十分诱人的研究领域.

本书旨至介绍分形几何学在图象编码应用中的基本理论,基本方法和最新进展. 本书不是全面地介绍分形理论,而且针对有关信息压缩编码尤其是数字图象编码的应用展开的. 本书中的不少内容是我们研究小组包括一些年青的研究生几年的研究计算机模拟的结果,我们希望介绍给读者,能使读者了解非线性科学在工程应用方面的进展,以及让从事信息和图象编码的工程技术人员了解非线性的科学方法,并能迅速跨入这个新领域.

本书共分为三章. 第 1 章主要介绍分形几何及分形用于图象压缩编码的数学基础和理论依据. 第 2 章主要介绍分形图象编码的基本方法及最新进展. 第 3 章介绍分形编码和其他方法相结合的进展,如小波变换与分形的结合方法,余弦变换与分形结合的方法等.

本书中不少内容是我们研究小组的顾炜老师、研究生施一蓬、王炜、李莉等研究和模拟的结果.本书还得到复旦大学非线性中心的同仁们的支持,至此一并表示谢意.

由于我们学识肤浅,不妥和错误之处在所难免,望读者批评指正.目前分形图象编码还在研究之中,随着时间发展一定会有更好的理论和方法涌现,希望本书起一个抛砖引玉的作用.

陈守吉、张立明

1998年12月

Abstract

A survey in Image Compression Coding by using Fractal, main area of nonlinear science, is presented in this book, which consists of three chapters (eleven sections).

As nonlinear science book applied in Image compression, this book includes Fractal Geometry, Iterated Function System, Collage theorem, principle and methods of Fractal image compression etc.

Readership includes teachers in college or university, Senior undergraduate students and graduate students. It is also as reference for some researchers and engineers.

目　录

Contents

第1章

分形几何和图象压缩基础

§1 欧几里得几何学与分形几何学

众所周知,欧几里得几何学研究的图形都是规则的形状.例如圆、正方形、球和圆锥体等等.构成这些图形的边缘(线或者面),都是连续而光滑的.根据欧几里得几何学,可以方便地描述砖块、轮子、机器部件以及建筑物等等.但是,大自然中的许多形状都很不规则,甚至是支离破碎的.例如天空中的云彩不是球体,地面上的海岸线不是圆弧,山脉不是锥体,树皮不是光滑的曲面,动物体内血管的分布更是错综复杂.这些不规则的几何形状也经常出现在自然科学的各个领域中.例如流体力学中的湍流,物理学中的布朗(R. Brown)运动,化学中酶的构造,生物学中细胞的生长,非线性动力学中的奇怪吸引子以及工程技术中的信号处理等等.为了研究这些大自然的几何学,就诞生了一门新的分支——分形几何学.

分形几何学是由曼德勃罗特(B. B. Mandelbrot)在20世纪70年代创立的."分形(fractal)"一词,也是由曼德勃罗特提出的.它来源于拉丁语"fractus",含有"不规则"和"破碎"的意义.

描述规则形状的欧几里得几何学提供了构造物理对象的一级近似,是用于传递技术产品构思的语言;而分形几何学则为研究一类非规则几何对象提供了思想、方法和技巧等方面的总框架,它可以构造从植物到星系的物理结构的精确模型.它是一种新的语言.曼德勃罗特曾指出,"分形语言和'老的'欧几里得语言分别为完全不同的目标服务."[1]

分形理论(包括分形几何学、分形物理学等)是非线性科学的

主要分支之一.它在自然科学各个学科中,甚至在经济和社会活动中,都有着广泛的应用.本书所介绍的利用分形理论进行图象压缩,就有着重要的实用意义.

大自然中的所有形状和人们考虑的一切图形(可统称为几何体),可以分为两大类.一类是具有特征尺度的,例如人的身高,球的半径,建筑物的长、宽、高,等等.具有特征尺度的几何体有一个重要性质,即构成几何体的线或面都是光滑的.另一类是没有特征尺度的,即必须同时考虑从小到大的许许多多尺度,例如夏季天空中翻滚的积雨云,北方冬季玻璃窗上的冰霜,以及极为普遍的湍流现象(小至静室中缭绕的青烟,大到木星大气中的涡流).这些所谓"无标度"的几何体,其实就是分形.它们也有一个共同的特征,即自相似性.

曼德勃罗特曾经指出[2],[3],分形具有三个要素:形状(form),机遇(chance)和维数(dimension).首先,前已指出,分形的形状是支离破碎、参差不齐和凹凸不平的不规则形状;其次,我们发现大自然中的海岸线与用以描述它的科克分形曲线(见本书第7页例2)之间仍有很大不同,而这种差异是由于海岸线受到自然界随机因素的作用而产生的,同时,巴恩斯利(M. F. Barnsley)发现,可以对一组给定的规则通过随机迭代而得到分形(见§2),而对象本身并不依赖于随机性,我们总是以百分之百的概率得到同一个分形,因此随机性或者机遇仅仅是工具,而结果却是确定性的;第三,分形的维数可以是分数.这是一种新的维数,称为分维.维数是几何对象的一个重要特征量.通常的"维数"概念,指的是为了确定几何对象中一个点的位置所需要的独立坐标的数目.在这种意义下,它是一个整数.所以点是0维的,线是1维的,面是2维的,而立方体是3维的,等等.由于这种定义具有对几何对象在同胚变换下的不变性,因此称为"拓扑维",记作 D_T.维数研究的突破点,是曼德勃罗特探索了把一类集合(其维数可以是分数)应用到大自然科学现象(从分子到星系)的模型中去[2],[3],[6].

定义 1[4] 所有离散集合的**拓扑维** D_T 都为 0. 如果一个集合 F 中的每一点的任意小邻域的边界都具有拓扑维 $D_T = n - 1$，这里 n 是整数，那么这个集合 F 的**拓扑维** D_T 是 n.

拓扑维的特点是直观性强，与人们的经验相符合，但对有些几何对象(例如分形)会产生矛盾. 早在 1919 年，豪斯多夫(F. Hausdorff)提出了维数不必限于整数，而可以是个实数，称为**豪斯多夫维**(又称为**豪斯多夫-伯西柯维奇**(A. S. Besicovitch)**维**)，记作 D. 为此，先介绍集合的"覆盖"和"豪斯多夫测度"的概念.

设 U 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的非空子集. 我们把 U 内任何两点间距离的最大值，定义为 U 的**直径**，记作 $|U|$. 即

$$|U| = \sup\{|x - y|:\ x, y \in U\}.$$

对于集 $F \subset \mathbb{R}^n$，如果 F 可以被可列个(或有限个)直径不超过 δ 的集类 $\{U_i\}$ 所覆盖，即

$$F \subset \bigcup_i U_i, \quad 且 \quad 0 < |U_i| < \delta, \qquad \forall i$$

则称 $\{U_i\}$ 是 F 的一个 δ-覆盖.

设 $F \subset \mathbb{R}^n$，s 是一非负实数. 对任何 $\varepsilon > 0$，定义

$$H_\varepsilon^s(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s:\ \{U_i\} 为 F 的 \delta\text{-覆盖}\right\}, \quad (1.1)$$

其中要取遍所有直径不超过 ε 的 F 的覆盖而得下确界，且 H_ε^s 当 ε 减小时增加. 关于 ε 取极限，称

$$H^s(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon^s(F) \quad (1.2)$$

为 F 的 s 维**豪斯多夫测度**. 对任何 s，上述极限都是存在的. 但通常是 0 或 ∞.

豪斯多夫测度推广了长度、面积和体积等概念. 可以证明[5]，$\mathbb{R}^n$ 中任何子集的 n 维豪斯多夫测度与通常的 n 维体积，只相差一个常数倍(当 n 是整数时).

定义 2[5] 集 F 的**豪斯多夫维**为

$$D = \inf\{s:\ H^s(F) = 0\} = \sup\{s:\ H^s(F) = \infty\}. \quad (1.3)$$

所以，

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{当 } s < D \text{ 时；} \\ 0, & \text{当 } s > D \text{ 时；} \\ [0,\infty) \text{ 或 } \infty, & \text{当 } s = D \text{ 时.} \end{cases} \tag{1.4}$$

如把 F 的豪斯多夫测度 $H^s(F)$ 作为 s 的函数，作出其图象(图 1-1)，可以看出，F 的豪斯多夫维数 D 是使得 H^s(F)从∞跳跃到 0 的一个临界点. 显然，D 是非负实数，它不一定是整数，所以是一种分维.

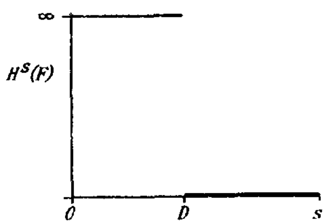

图 1-1

豪斯多夫维具有对任何集 F 都有定义的优点，而缺点主要是难以计算或估计它的值. 但是，它可能是多种多样的分维定义中最重要的一种，也是分维定义中最常用的一种. 本书中，如不特别说明，分维即指豪斯多夫维.

对于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 F 集，两种维数 D_T 和 D 的相同处是其值都是至少为 0 而至多为 n；但维数 D_T 总是一个整数，而 D 却不必是整数. 两种维数也无需相等，只要满足苏比尔拉(E. Szpilrajn)不等式[6]

$$D \geqslant D_T. \tag{1.5}$$

即任一集合(几何体)的豪斯多夫维总不小于拓扑维.

下面再介绍两种维数：盒维和相似维.

定义 3[5] 设集 $F \subset \mathbb{R}^n$. 记 $N_\varepsilon(F)$是可以覆盖 F 的、边长为 ε 的 n 维立方体(记作 ε^n-立方体)的最少个数，则 F 的**盒维** D_B 定义为(当极限存在时)：

$$D_B = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_\varepsilon(F)}{-\log \varepsilon}. \tag{1.6}$$

所以，盒维与豪斯多夫维一样，也是考虑 F 的覆盖，只是可采用同样大小的 ε^n-立方体. 所以，总成立[5]

$$D_B \geqslant D. \tag{1.7}$$

对于许多"相当规则"的集，有 $D_B = D$；但也有大量使(1.7)中不