高等学校试用教材

常微分方程补充教程

尤秉礼 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

常微分方程补充教程

尤秉礼 编

人民教育出版社

出版前言

本书作为常微分方程课程的续论，内容为一般理论、实域上的线性方程(组)、复域上的线性方程(组)、边值问题与特征值问题、定性理论基础(介绍一般定性理论和稳定性理论基础)等五章．书末还有附录，它扼要地介绍了有关泛函分析方面的一些基本知识和代数学上的两个重要定理的证明，以备读者阅读本教程时查考．

本书说理清楚、选材合适、布局也较合理，一些章节的讲述方法有独到之处，可作为综合大学数学系高年级常微分方程续论选修课的教材，也可作为理科研究生、教师及有关科研人员的参考书。

高等学校试用教材

常微分方程补充教程

尤秉礼 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.125 字数 287,000

1981 年 12 月第 1 版 1982 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001－14,500

书号 13012·0675 定价 1.15 元

序

本书是在1977年高等学校理科教材会议上委托作者执笔编写的. 其目的是作为综合大学数学系高年级常微分方程续论选修课的教材，也可作为理科研究生、教师以及有关科研人员的参考书.

全书内容共有三个部分，分五章讲授，每章均附有适量的习题. 第一部分是一般理论(在第一章讲授)，其中包括解的局部和非局部存在性、延展性，比较定理与微分不等式，解的唯一性以及解对初值与参数的相依性等基本理论. 第二部分是有关线性系统的若干问题和方法(在第二、三、四章讲授)，其中包括实域和复域上的线性系统的一般理论和解析理论初步，线性系统的边值问题和特征值问题. 第三部分是定性理论基础(在第五章讲授)，其中包括二维系统的Poincar'e-Bendixson理论和A. M. Ляпунов第二方法基本理论. 希望通过学习本书，能为进一步学习定性理论、稳定性理论以及控制理论，开展专题研究打下基础.

学习本书要求读者具有数学分析、线性代数、常微分方程、直至泛函分析的基础. 但为了便于学习，在书末附录中介绍了有关泛函分析方面的一些基础知识，以备读者随时查阅.

使用本书作教材，在内容取舍上可根据各校情况灵活掌握. 一般，如果五章全讲，可安排每周三学时，一年讲完；如只讲一、二、五章(因三、四两章独立于其余各章，可以不讲)，可安排每周三学时，一学期讲完(其中小字部分和某些内容可以不讲留给学生自学). 以上仅供参考.

本书在制定编写大纲过程中，承蒙叶彦谦教授给予热情指导，提出了许多宝贵建议；在初稿审查过程中，审稿同志提出了一系列修改意见；特别在复审过程中，承蒙金福临教授、姚允龙同志详细审阅了全部书稿，并给予许多具体的指导和帮助，在此特向以上诸位先生致以衷心的谢意．此外，对赵焕贤、樊修领、陈光大、刘朝杰、徐加义诸同志对本书编写工作所给予的协助，以及人民教育出版社对本书出版工作所给予的支持，深表谢意．

由于作者水平所限、时间仓促，因而谬误之处在所难免，作者除了进一步通过教学实践来修改、充实、提高外，诚恳希望读者随时给予批评指教．

作　　者

一九八一年十月

目　录

第一章 一般理论

我们知道，微分方程的基本问题在于求解和研究解的各种属性．早在微分方程发展的古典时期，由于力学、物理学、几何学等的需要，数学家曾把注意力主要集中在求微分方程的通解上，并且取得了一系列重大的发展．但后来发现，绝大多数的微分方程都求不出通解，特别在 1841 年 Liouville(柳维尔)证明了这样一个事实，即 Riccati(李卡蒂)方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

除了某些特殊情形以外，对一般的函数 P, Q, R 而言，其通解不可能用初等函数或初等函数的积分予以表示．当然，对于一般非线性方程将更是如此．另一方面，在物理和力学上所提出的微分方程问题，又大都是要求满足某种附加条件的特解，即所谓定解问题的解．这样，就使人们改变了原来的想法，不去求通解，而开始从事定解问题的研究．

到了十九世纪初叶，数学分析中所产生的划时代的飞跃，即极限、连续等严格概念和方法的建立，推动了微分方程基本理论的发展．Cauchy(柯西)首先严格证明了，在相当一般的条件下解的存在唯一性定理，为微分方程的研究奠定了坚实的基础．后来，有许多数学家又作了大量的工作，逐步形成了常微分方程的一般理论．这一理论，无论对于求解或对于研究解的各种属性都是最基本的．

读者在一般常微分方程课程里，曾经学过常微分方程一般理论的初等部分．本章将从深度和广度两个方面，对这一理论再作进一步探讨．

在以下讨论中，我们着重研究的是一阶标准形方程组

$$(E)\qquad \frac{dx_s}{dt}=f_s(t,x_1,\cdots,x_n)\qquad (s=1,2,\cdots,n),$$

其中 f_s 是关于 $t,x_1,\cdots,x_n$ 的已知函数．如令

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ f(t,x)=\begin{pmatrix}f_1(t,x_1,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ f_n(t,x_1,\cdots,x_n)\end{pmatrix},\ \frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dx_n}{dt}\end{pmatrix},$$

则方程组(E)可改写成如下的向量形式

$$(E)\qquad \frac{dx}{dt}=f(t,x),$$

其中 $t\in \boldsymbol{R}$, $x,f\in\boldsymbol{R}^n$ (n 维实欧氏空间)．这里我们规定向量 $x\in\boldsymbol{R}^n$ 的模为

$$(*)\qquad |x|=\left(\sum_{s=1}^{n}x_s^2\right)^{1/2}\text{或}\ \sum_{s=1}^{n}|x_s|\,\text{或}\max_{1\leqslant s\leqslant n}\{|x_s|\}.$$

至于一般的高阶方程组或方程，在一定条件下均可化成形如(E)的等价方程组．

[**参考文献**] Coddington, Levinson[8]; Sansone, Conti[9]; Hartman[10]; Roseau[4]; Deimling[11]; Hale[12].

§1. 预 备 定 理

为了便于以后的应用，这里首先介绍一下来自泛函分析的几条重要定理．关于它们的证明，可见书末附录 3 及 4，这里从略．

1.1. Ascoli-Arzela(阿斯卡里-阿尔采拉)定理

考虑定义在$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上的实值($m$ 维)向量函数族 $F=\{f(t)\}$．如果存在数 $M>0$，使对任一$f\in F$，都有

$$|f(t)|\leqslant M,\ \text{当}\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\ \text{时};$$

我们就说：函数族F在$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上是**一致有界的．**

如果对任给的 $\varepsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 使对任一 $f\in F$ 和任意的 $t_1, t_2\in[\alpha, \beta]$, 只要 $|t_1-t_2|<\delta$ 就有

$$|f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon;$$

我们就说: 函数族 F 在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上是**同等连续的.**

Ascoli-Arzela 定理 设 $F=\{f(t)\}$ 是定义在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的一致有界且同等连续的实值(m 维)向量函数族, 则从 F 中必可选取一个在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上一致收敛的函数列 $\{f_n(t)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$.

注 1 在上述定理的条件下, 若 $t_0\in[\alpha, \beta]$ 且 f_0 是集合 $\{f(t_0)\}$ 的一个极限点; 则不难确信, 从 $\{f(t)\}$ 中必可选取一个在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上一致收敛的函数列 $\{f_n(t)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$, 它的极限函数 $f^*(t)$ 满足 $f^*(t_0)=f_0$.

注 2 设函数族 $F=\{g_n(t)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 满足上述定理的条件, 并且它的所有在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上一致收敛的子序列都有相同的极限函数 $g(t)$; 则由上述定理不难推知, 函数列 $\{g_n(t)\}$ 本身就在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上一致收敛于 $g(t)$.

注 3 在上述定理中, 如果把条件改为: $F=\{f(t)\}$ 是映区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 入某一 Banach (巴拿赫) 空间 X 的一些连续映象 f 所构成的函数族, 它在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上一致有界且同等连续, 并对任一 $t^*\in[\alpha, \beta]$, 集合 $\{f(t^*)\}$ 在空间 X 中都是相对紧致的; 则定理中的结论仍然成立.

这里所说的"一致有界"和"同等连续", 它的意义同上, 只不过其中的模 $|\cdot|$ 要改为空间 X 中的模 $\|\cdot\|$ 而已.

上述注 1—3 中的结论, 留给读者自己证明.

1.2. 不动点原理

在数学分析中有许多诸如关于一个方程(如代数方程、微分方程、积分方程等)解的存在性等问题, 它们往往归结为形如

$$x=Tx \tag{1.1}$$

的算子方程在某一空间D内解的存在性问题，这里T是D到其自身内的一个映象或算子．方程(1.1)的解，也就是满足$x_0=Tx_0$的$x_0\in D$称为T **的不动点**，于是问题就归结为求T的不动点问题．

为了获得不动点，可以采用各种不同形式的逐次逼近法，从而得到各种不同形式的不动点定理，其中最简单而且甚为有用的一个就是由Banach所建立的

Banach压缩映象原理 设D是Banach空间X的一个非空闭子集，而T是D到其自身内的映象，它在D内满足Lipschitz(李卜希兹)条件，即对任意的$x, y\in D$，有

$$\|Tx-Ty\|\leqslant\alpha\|x-y\| \qquad (0\leqslant\alpha<1)$$

(这里的α称为Lipschitz常数)；则必存在唯一的$x^*\in D$，使$Tx^*=x^*$，即T在D内有唯一的不动点x^*．

此外，在泛函分析中还有一条非常深刻而且应用很广的所谓

Schauder（索德尔）不动点定理 设K是Banach空间X的一个有界凸闭集，而T是K到其自身内的任一全连续映象；则T在K内至少有一个不动点．

这里所谓$T: K\to K$ **是全连续的**，就是说：T在K上连续，并对K的任一有界子集$D\subset K$，$T(D)$都是K中的相对紧致集合．

我们指出：Schauder不动点定理虽然在形式上比较一般，但它仍不能包含Banach压缩映象原理．1955年，M. A. Krasnoselskii（卡拉斯诺西尔斯基）把两者很好地结合起来，给出了下面的

Krasnoselskii不动点定理 设K是Banach空间X的一个有界凸闭集，而T与S是映K入X的两个映象，它们满足下列条件：

(1) 对任意的$x, y\in K$，有$Tx+Sy\in K$；

(2) T是一压缩映象，即存在α：$0\leqslant\alpha<1$，使对任意的x, x'

$\in K$有

$$\|Tx-Tx'\|\leqslant\alpha\|x-x'\|;$$

(3) S 在K上是全连续的；

则映象$T+S$ 在K上至少有一个不动点.

§2. 解的局部存在性定理

在本节，我们研究方程组

$$(E)\qquad \frac{dx}{dt}=f(t,x),$$

其中 $t\in\boldsymbol{R}$, x, $f\in\boldsymbol{R}^n$, 而$f(t,x)$是在$n+1$维空间(t,x)或$\boldsymbol{R}^{n+1}$中某一区域G上定义的n维实值向量函数.

若给定一点$(\tau,\xi)\in G$, 这里τ是一实常数，ξ是一实的n维常向量；则常微分方程论中的基本问题之一便是：求一个向量函数$\varphi(t)$, 它在含τ的某一区间Δ上可微，并满足条件：

(1) $\varphi(\tau)=\xi$;

(2) $(t,\varphi(t))\in G$, $t\in\Delta$;

(3) $\varphi'(t)=f(t,\varphi(t))$, $t\in\Delta$.

这一问题称为方程组(E)的**初值问题**，又称为 **Cauchy 问题**，并记为

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\ x(\tau)=\xi.$$

若存在满足上述条件的函数$\varphi(t)$, 则称$\varphi(t)$为方程(E)之满足初始条件$\varphi(\tau)=\xi$或过点$(\tau,\ \xi)$的一个**解**，或简称为这个初值问题的一个解. 至于这样的解是否存在？这便是本节所要研究的主题.

关于解的存在性问题的研究，方法是很多的. 但总的说来，不外乎是两种，一种是基于用近似解逼近精确解的方法证明解的存

在性. 这种存在性定理的证明, 同时也包含了获得精确解的一个构造方法, 从而提供了近似求解的一种途径. 另一种是把解的存在性问题转化为某一变换(或映象)的不动点的存在性问题, 这种方法虽然给不出近似求解的途径, 但使用起来比较简单, 它是在前一种方法基础上的抽象和概括.

下面我们仅就几种常见的基本方法: Picard(毕卡)逐次逼近法(其抽象化即为 Banach(巴拿赫)压缩映象原理)、Euler(尤拉)折线法(差分法)、Schauder(索德尔)不动点方法以及 Cauchy 的优级数法, 分别予以介绍.

2.1. Picard 逐次逼近法(压缩映象原理)

在常微分方程论中, 逐次逼近法是比较经典的方法之一. 最早, Liouville、Cauchy、Peano (皮亚诺) 等人曾使用这种方法解决某些特殊类型方程解的存在性问题. 后来 Picard 又把这一方法运用到一般非线性方程组上, 并建立了下面的

定理 1 (Picard) 若函数 $f(t,x)$ 在空间 R^{n+1} 中某一区域

$\bar{R}$: $$|t-\tau|\leqslant a,\ |x-\xi|\leqslant b$$

上连续, 并且关于 x 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L>0$(称作 Lipschitz 常数), 使当 (t,x), $(t,\bar{x})\in\bar{R}$ 时有

$$|f(t,x)-f(t,\bar{x})|\leqslant L|x-\bar{x}|;$$

则方程组(E)至少在区间

Δ: $$|t-\tau|\leqslant h$$

上存在唯一的满足初始条件 $\varphi(\tau)=\xi$ 的解 $\varphi(t)$, 其中

$$h=\min\{a,\frac{b}{M}\},\ M=\max_{(t,x)\in\bar{R}}|f(t,x)|.$$

关于这条定理的证明, 在一般常微分方程书上都有详细论述, 这里不再重复. 其证明的主要思想在于从初始值 ξ 开始, 通过反复叠代, 相继作一串逐次逼近序列 $\{\varphi_m(t)\}$:

$$\begin{cases}\varphi_0=\xi,\\ \varphi_{k+1}(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi_k(s))ds,\end{cases}\quad (k=0,1,2,\cdots),$$

然后证明这个序列 $\{\varphi_m(t)\}$ 在 Δ 上一致收敛于我们所要求的解 $\varphi(t)$.

这一方法不仅用于证明微分方程解的存在定理，而且也可用于分析学中许多其他的问题，只是在形式上有所不同罢了．从泛函分析来看，各种不同类型问题的逐次逼近法都蕴涵着一个共同的内容．这一点首先由波兰数学家 Banach 所发现，由此建立了 Banach 压缩映象原理（见 § 1）．下面我们应用这个原理来证明上面的定理 1.

定理 1 的证明 首先，我们知道，在定理的条件下，初值问题

$$(E)\qquad \frac{dx}{dt}=f(t,x),\ x(\tau)=\xi$$

是等价于求解积分方程

$$(E)'\qquad x(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,x(s))ds$$

的问题．因此，只要证明积分方程 $(E)'$ 在区间 Δ 上存在唯一的连续解就够了.

以下为简单起见，我们只就 Δ 的右半区间 Δ^+：$\tau\leqslant t\leqslant\tau+h$ 来讨论．至于左半区间的情况，讨论完全类似.

我们用 $C[\Delta^+]$表示定义在 Δ^+上的一切连续的向量函数 $\varphi(t)$ 所构成的空间．如对任意的 $\varphi\in C[\Delta^+]$，定义它的模为

$$\|\varphi\|=\max\{|\varphi(t)|e^{-\beta t}:t\in\Delta^+\},$$

其中 $\beta>L$ 是某一常数；则不难验证 $C[\Delta^+]$ 是一 Banach 空间.

今考虑空间 $C[\Delta^+]$的一个子集合

$$D=\{x(\cdot):x(\cdot)\in C[\Delta^+],\ |x(t)-\xi|\leqslant b\quad (t\in\Delta^+)\},$$

并在其上由公式

$$\psi(t)=\xi+\int_{\tau}^{t}f(s,\varphi(s))ds \quad (t\in\Delta^{+})$$

定义一个映象(或算子)$T:\varphi\to\psi$, $\varphi\in D$.

任取 $\varphi\in D$, 由于

$$|(T\varphi)(t)-\xi|=\left|\int_{\tau}^{t}f(s,\varphi(s))ds\right|\leqslant Mh\leqslant b,\ t\in\Delta^{+},$$

知 $T(D)\subset D$. 又对任意的 $\varphi_1,\varphi_2\in D$, 当 $t\in\Delta^{+}$ 时有

$$\begin{aligned}&|(T\varphi_1)(t)-(T\varphi_2)(t)|\\&=\left|\int_{\tau}^{t}[f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_2(s))]ds\right|\\&\leqslant L\int_{\tau}^{t}|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|e^{-\beta s}e^{\beta s}ds\\&\leqslant\frac{L}{\beta}\max_{t\in\Delta^{+}}\{|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|e^{-\beta t}\}e^{\beta t},\end{aligned}$$

即

$$|(T\varphi_1)(t)-(T\varphi_2)(t)|e^{-\beta t}\leqslant\frac{L}{\beta}\max_{t\in\Delta^{+}}\{|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|e^{-\beta t}\},$$

从而

$$\|T\varphi_1-T\varphi_2\|\leqslant\frac{L}{\beta}\|\varphi_1-\varphi_2\|,\ 0<\frac{L}{\beta}<1.$$

因此,T 是 D 到它自身内的一个映象, 并满足 Lipschitz 条件(Lipschitz 常数 $\frac{L}{\beta}<1$), 故根据压缩映象原理, 必存在唯一的 $\varphi\in D$, 使 $T\varphi=\varphi$, 即

$$\varphi(t)=\xi+\int_{\tau}^{t}f(s,\varphi(s))ds,\quad t\in\Delta^{+};$$

又由于方程$(E)'$ 之定义在 Δ^{+} 上的任何连续解都包含在D之中, 因此, 方程$(E)'$ 在Δ^{+}上存在唯一的连续解 $\varphi(t)$.

至于在Δ的左半区间 Δ^{-}: $\tau-h\leqslant t\leqslant\tau$ 上的情况, 证明完全类似, 只不过此时将考虑空间 $C[\Delta^{-}]$, 并在其中引入模