

高等学校试用教材

常微分方程补充教程

尤秉礼 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

常微分方程补充教程

尤秉礼 编

人民教育出版社

出版前言

本书作为常微分方程课程的续论,内容为一般理论、实域上的线性方程(组)、复域上的线性方程(组)、边值问题与特征值问题、定性理论基础(介绍一般定性理论和稳定性理论基础)等五章,书末还有附录,它扼要地介绍了有关泛函分析方面的一些基本知识和代数学上的两个重要定理的证明,以备读者阅读本教程时查考。

本书说理清楚、选材合适、布局也较合理,一些章节的讲述方法有独到之处,可作为综合大学数学系高年级常微分方程续论选修课的教材,也可作为理科研究生、教师及有关科研人员的参考书。

高等学校试用教材
常微分方程补充教程
尤秉礼编

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京第二新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.125 字数 287,000

1981年12月第1版 1982年5月第1次印刷

印数 00,001—14,500

书号 13012·0675 定价 1.15 元

序

本书是在1977年高等学校理科教材会议上委托作者执笔编写的。其目的是作为综合大学数学系高年级常微分方程续论选修课的教材，也可作为理科研究生、教师以及有关科研人员的参考书。

全书内容共有三个部分，分五章讲授，每章均附有适量的习题。第一部分是一般理论(在第一章讲授)，其中包括解的局部和非局部存在性、延展性，比较定理与微分不等式，解的唯一性以及解对初值与参数的相依性等基本理论。第二部分是有关线性系统的若干问题和方法(在第二、三、四章讲授)，其中包括实域和复域上的线性系统的一般理论和解析理论初步，线性系统的边值问题和特征值问题。第三部分是定性理论基础(在第五章讲授)，其中包括二维系统的Poincaré-Bendixson理论和A. M. Ляпунов第二方法基本理论。希望通过学习本书，能为进一步学习定性理论、稳定性理论以及控制理论，开展专题研究打下基础。

学习本书要求读者具有数学分析、线性代数、常微分方程、直至泛函分析的基础。但为了便于学习，在书末附录中介绍了有关泛函分析方面的一些基础知识，以备读者随时查阅。

使用本书作教材，在内容取舍上可根据各校情况灵活掌握。一般，如果五章全讲，可安排每周三学时，一年讲完；如只讲一、二、五章(因三、四两章独立于其余各章，可以不讲)，可安排每周三学时，一学期讲完(其中小字部分和某些内容可以不讲留给学生自学)。以上仅供参考。

本书在制定编写大纲过程中，承蒙叶彦谦教授给予热情指导，提出了许多宝贵建议；在初稿审查过程中，审稿同志提出了一系列修改意见；特别在复审过程中，承蒙金福临教授、姚允龙同志详细审阅了全部书稿，并给予许多具体的指导和帮助，在此特向以上诸位先生致以衷心的感谢。此外，对赵焕贤、樊修领、陈光大、刘朝杰、徐加义诸同志对本书编写工作所给予的协助，以及人民教育出版社对本书出版工作所给予的支持，深表谢意。

由于作者水平所限、时间仓促，因而谬误之处在所难免，作者除了进一步通过教学实践来修改、充实、提高外，诚恳希望读者随时给予批评指教。

作 者

一九八一年十月

目 录

序	1
第一章 一般理论	1
§ 1. 预备定理	2
1.1. Ascoli-Arzelà (阿斯卡里-阿尔采拉) 定理(2)	
1.2. 不动点原理(3)	
§ 2. 解的局部存在性定理	5
2.1. Picard 逐次逼近法(压缩映象原理)(6)	
2.2. Euler 折线法(差分法)(10)	
2.3. Schauder 不动点方法(16)	
2.4. Cauchy 的优级数法(18)	
2.5. 关于高阶方程解的存在性(26)	
§ 3. 解的延展性定理	28
§ 4. 微分(积分)不等式与比较定理	34
4.1. 第一比较定理(35)	
4.2. 最大解与最小解(36)	
4.3. 微分(积分)不等式(41)	
4.4. 第二比较定理(44)	
4.5. 某些推广(45)	
§ 5. 非局部存在性定理	50
§ 6. 唯一性定理	55
6.1. 问题的提出(55)	
6.2. Kamke 一般唯一性定理(56)	
6.3. Kamke 唯一性定理的一些推论(58)	
6.4. 整体唯一性定理(61)	
6.5. 解的唯一性与逐次逼近序列的关系(62)	
§ 7. 解对初值与参数的相依性	63
7.1. 问题的提出(63)	
7.2. 解对初值与参数的连续性(65)	
7.3. 解对初值与参数的可微性(68)	
§ 8. Carathéodory 关于解的存在与唯一性定理	73
8.1. Carathéodory 意义下解的概念(74)	
8.2. 解的存在定理(75)	
8.3. 解的唯一性定理(80)	
§ 9. Banach 空间中的微分方程	82
9.1. 初值问题的提法(83)	
9.2. 关于解的存在性问题(83)	
9.3. 关于解的唯一性问题(87)	
§ 10. 带滞后的泛函微分方程	88

10.1. 前言(88)	10.2. 基本概念(90)	10.3. 基本定理(91)	
第一章习题			96
第二章 实域上的线性方程(组)			103
§ 1. 预备知识			105
§ 2. 线性组(方程)解的一般性质			110
2.1. 解的存在唯一性定理(110)	2.2. 齐线性组解的性质(111)	2.3. 齐线性组的降阶(113)	2.4. 非齐次线性组解的性质(115)
2.5. 高阶线性方程(116)			
§ 3. 常系数线性组			119
3.1. 矩阵的指数函数 e^X (119)	3.2. e^{At} 的计算(121)	3.3. 常系数线性组解的结构(122)	
§ 4. 周期系数线性组·Floquet理论			124
4.1. 矩阵的对数函数 $\log X$ (124)	4.2. 周期系数线性组解的基本性质(125)		
§ 5. 可化组			129
第二章习题			131
第三章 复域上的线性方程(组)			134
§ 1. 正规齐次线性组			134
1.1. 存在唯一性定理(134)	1.2. 推论(137)	1.3. 基本解矩阵(137)	
§ 2. 孤立奇异点			138
2.1. 问题的提出(138)	2.2. 对数变换 $s = \log z$ (139)	2.3. Cauchy方程组(141)	2.4. 解的定性结构(142)
2.5. 解的估值(143)			
§ 3. 奇异点的分类·Fuchs型方程组			145
3.1. 有限奇异点(145)	3.2. 无限奇异点(149)	3.3. Fuchs型方程组(150)	
§ 4. 解的级数展开			152
4.1. Banach空间 H_δ (152)	4.2. 形式解·解的幂级数展开定理(154)		
4.3. 空间 $H_\delta(0 < \delta < r)$ 上的两个算子(155)	4.4. 解的幂级数展开定理的证明(156)	4.5. 某些推论(158)	4.6. 一般解的级数展开定理(160)
4.7. Banach空间 H_δ^0 (161)	4.8. 引理(163)	4.9. 一般解的级数展开定理的证明(164)	4.10. 基本解组的建立(166)
§ 5. 二阶线性方程			171
5.1. 奇异点的分类(171)	5.2. 无限奇异点(171)	5.3. 例题(172)	
5.4. 解的级数展开(173)	5.5. Fuchs型方程(180)		
第三章习题			188

第四章 边值问题与特征值问题	190
§ 1. Sturm-Liouville 型边值问题	190
1.1. 问题的提出(190) 1.2. Sturm 边值问题(192) 1.3. 问题的转化(195)	
1.4. Green(格林)函数(197) 1.5. $S-L$ 型边值问题解的积分表示(200)	
§ 2. 一般线性组的边值问题	203
2.1. 解的存在唯一性定理(203) 2.2. Green 矩阵(204) 2.3. 解的积分表示(205)	
§ 3. Sturm-Liouville 特征值问题	207
3.1. 问题的提出(207) 3.2. 特征值与特征函数的两个基本性质(209)	
3.3. Prüfer 变换(211) 3.4. 关于函数 φ 的性质(211) 3.5. 特征值存在定理(216)	
§ 4. 希尔伯特(Hilbert)空间内的自共轭算子	218
4.1. 内积空间(218) 4.2. 希尔伯特(Hilbert)空间(219) 4.3. 正规直交系和傅氏级数(220) 4.4. 有界、自共轭、紧致算子(222) 4.5. 紧致自共轭算子的特征值(224)	
§ 5. 按特征函数的展开定理	229
5.1. Sturm-Liouville 型特征值问题的转化(229) 5.2. 展开定理(231)	
5.3. 展开定理的应用举例(237)	
第四章习题	240
第五章 定性理论基础	243
§ 1. 一般定性理论中的概念、问题和方法	244
1.1. 定常系统及其解的基本性质(245) 1.2. 常点(247) 1.3. 奇点(249)	
1.4. 周期解、闭轨(250) 1.5. 轨道的极限集合(252) 习题(254)	
§ 2. 不切线段及其性质	255
习题(262)	
§ 3. Poincaré-Bendixson 定理	263
习题(269)	
§ 4. 在闭轨附近的轨道分布	269
4.1. 关于极限环的存在性、唯一性等问题(270) 4.2. 在闭轨附近的轨道分布·极限环的几何分类(280) 习题(283)	
§ 5. 在奇点附近轨道的分布	284
5.1. 奇点的几何分类(284) 5.2. 在初等奇点附近轨道的分布(287)	
习题(299)	

§ 6. 稳定性理论中的概念、问题和方法	300
6.1. 问题的提出(300) 6.2. 稳定性的定义(301) 6.3. 稳定性理论中的问题和方法(306) 6.4. 辅助函数(306) 6.5. 函数 V 符号性质的判别准则(308) 习题(309)	
§ 7. A. M. Ляпунов 第二方法的基本定理	310
7.1. 稳定性定理(311) 7.2. 不稳定性定理(312) 7.3. 渐近稳定性定理(315) 习题(322)	
§ 8. 应用举例	323
§ 9. 按首次近似决定的稳定性	326
9.1. 问题的提出(326) 9.2. 常系数线性组零解的稳定性(327) 9.3. 一个辅助定理(327) 9.4. 常系数线性组函数 V 的存在性(329) 9.5. 按首次近似决定的稳定性(332) 9.6. 临界情况下稳定性问题简介(336) 习题(337)	
§ 10. 稳定性理论中的比较方法	338
习题(341)	
附录	343
附录 1 点集论中的一些记号和概念	343
1.1. 集和集的运算(343) 1.2. 映象(变换、函数或算子)(344)	
附录 2 度量空间	345
2.1. 定义(345) 2.2. 度量空间中的一些基本概念(346) 2.3. 完备的度量空间(347) 2.4. 连通的度量空间(348) 2.5. 紧致的度量空间(349)	
附录 3 有模线性空间·Banach 空间	350
3.1. 线性空间(350) 3.2. 线性子空间(351) 3.3. 有模线性空间(352) 3.4. 有限维有模线性空间(355) 3.5. 线性算子(357)	
附录 4 不动点原理	358
4.1. Banach 压缩映象原理(358) 4.2. Brouwer (布劳维尔) 不动点定理(359) 4.3. Schauder 不动点定理(364)	
附录 5 代数学上的两个重要定理的证明	369
参考文献	378

第一章 一般理论

我们知道, 微分方程的基本问题在于求解和研究解的各种属性. 早在微分方程发展的古典时期, 由于力学、物理学、几何学等的需要, 数学家曾把注意力主要集中在求微分方程的通解上, 并且取得了一系列重大的发展. 但后来发现, 绝大多数的微分方程都求不出通解, 特别在 1841 年 Liouville(柳维尔)证明了这样一个事实, 即 Riccati(李卡蒂)方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

除了某些特殊情形以外, 对一般的函数 P, Q, R 而言, 其通解不可能用初等函数或初等函数的积分予以表示. 当然, 对于一般非线性方程将更是如此. 另一方面, 在物理和力学上所提出的微分方程问题, 又大都是要求满足某种附加条件的特解, 即所谓定解问题的解. 这样, 就使人们改变了原来的想法, 不去求通解, 而开始从事定解问题的研究.

到了十九世纪初叶, 数学分析中所产生的划时代的飞跃, 即极限、连续等严格概念和方法的建立, 推动了微分方程基本理论的发展. Cauchy(柯西)首先严格证明了, 在相当一般的条件下解的存在唯一性定理, 为微分方程的研究奠定了坚实的基础. 后来, 有许多数学家又作了大量的工作, 逐步形成了常微分方程的一般理论. 这一理论, 无论对于求解或对于研究解的各种属性都是最基本的.

读者在一般常微分方程课程里, 曾经学过常微分方程一般理论的初等部分. 本章将从深度和广度两个方面, 对这一理论再作进一步探讨.

在以下讨论中, 我们着重研究的是一阶标准形方程组

$$(E) \quad \frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_1, \dots, x_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

其中 f_s 是关于 t, x_1, \dots, x_n 的已知函数. 如令

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix},$$

则方程组 (E) 可改写成如下的向量形式

$$(E) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

其中 $t \in \mathbf{R}, x, f \in \mathbf{R}^n$ (n 维实欧氏空间). 这里我们规定向量 $x \in \mathbf{R}^n$ 的模为

$$(*) \quad |x| = \left(\sum_{s=1}^n x_s^2 \right)^{1/2} \text{ 或 } \sum_{s=1}^n |x_s| \text{ 或 } \max_{1 \leq s \leq n} \{ |x_s| \}.$$

至于一般的高阶方程组或方程, 在一定条件下均可化成形如 (E) 的等价方程组.

[参考文献] Coddington, Levinson[8]; Sansone, Conti[9]; Hartman[10]; Roseau[4]; Deimling[11]; Hale[12].

§ 1. 预备定理

为了便于以后的应用, 这里首先介绍一下来自泛函分析的几条重要定理. 关于它们的证明, 可见书末附录 3 及 4, 这里从略.

1.1. Ascoli-Arzelà (阿斯卡里-阿尔采拉) 定理

考虑定义在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上的实值 (m 维) 向量函数族 $F = \{f(t)\}$. 如果存在数 $M > 0$, 使对任一 $f \in F$, 都有

$$|f(t)| \leq M, \text{ 当 } \alpha \leq t \leq \beta \text{ 时};$$

我们就说: 函数族 F 在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上是一致有界的.

如果对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使对任一 $f \in F$ 和任意的 $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, 只要 $|t_1 - t_2| < \delta$ 就有

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon;$$

我们就说: 函数族 F 在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上是**同等连续的**.

Ascoli-Arzelà 定理 设 $F = \{f(t)\}$ 是定义在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上的一致有界且同等连续的实值(m 维)向量函数族, 则从 F 中必可选取一个在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上一致收敛的函数列 $\{f_n(t)\} (n=1, 2, \dots)$.

注 1 在上述定理的条件下, 若 $t_0 \in [\alpha, \beta]$ 且 f_0 是集合 $\{f(t_0)\}$ 的一个极限点; 则不难确信, 从 $\{f(t)\}$ 中必可选取一个在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上一致收敛的函数列 $\{f_n(t)\} (n=1, 2, \dots)$, 它的极限函数 $f^*(t)$ 满足 $f^*(t_0) = f_0$.

注 2 设函数族 $F = \{g_n(t)\} (n=1, 2, \dots)$ 满足上述定理的条件, 并且它的所有在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上一致收敛的子序列都有相同的极限函数 $g(t)$; 则由上述定理不难推知, 函数列 $\{g_n(t)\}$ 本身就在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上一致收敛于 $g(t)$.

注 3 在上述定理中, 如果把条件改为: $F = \{f(t)\}$ 是映区间 $\alpha \leq t \leq \beta$ 入某一 Banach (巴拿赫) 空间 X 的一些连续映象 f 所构成的函数族, 它在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上一致有界且同等连续, 并对任一 $t^* \in [\alpha, \beta]$, 集合 $\{f(t^*)\}$ 在空间 X 中都是相对紧致的; 则定理中的结论仍然成立.

这里所说的“一致有界”和“同等连续”, 它的意义同上, 只不过其中的模 $|\cdot|$ 要改为空间 X 中的模 $\|\cdot\|$ 而已.

上述注 1—3 中的结论, 留给读者自己证明.

1.2. 不动点原理

在数学分析中有许多诸如关于一个方程(如代数方程、微分方程、积分方程等)解的存在性问题, 它们往往归结为形如

$$(1.1) \quad x = Tx$$

的算子方程在某一空间 D 内解的存在性问题, 这里 T 是 D 到其自身内的一个映象或算子. 方程 (1.1) 的解, 也就是满足 $x_0 = Tx_0$ 的 $x_0 \in D$ 称为 T 的不动点, 于是问题就归结为求 T 的不动点问题.

为了获得不动点, 可以采用各种不同形式的逐次逼近法, 从而得到各种不同形式的不动点定理, 其中最简单而且甚为有用的一个就是由 Banach 所建立的

Banach 压缩映象原理 设 D 是 Banach 空间 X 的一个非空闭子集, 而 T 是 D 到其自身内的映象, 它在 D 内满足 Lipschitz (李卜希兹) 条件, 即对任意的 $x, y \in D$, 有

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x - y\| \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

(这里的 α 称为 Lipschitz 常数); 则必存在唯一的 $x^* \in D$, 使 $Tx^* = x^*$, 即 T 在 D 内有唯一的不动点 x^* .

此外, 在泛函分析中还有一条非常深刻而且应用很广的所谓

Schauder (索德耳) 不动点定理 设 K 是 Banach 空间 X 的一个有界凸闭集, 而 T 是 K 到其自身内的任一全连续映象; 则 T 在 K 内至少有一个不动点.

这里所谓 $T: K \rightarrow K$ 是全连续的, 就是说: T 在 K 上连续, 并对 K 的任一有界子集 $D \subset K$, $T(D)$ 都是 K 中的相对紧致集合.

我们指出: Schauder 不动点定理虽然在形式上比较一般, 但它仍不能包含 Banach 压缩映象原理. 1955 年, M. A. Krasnoselskii (卡拉斯诺西尔斯基) 把两者很好地结合起来, 给出了下面的

Krasnoselskii 不动点定理 设 K 是 Banach 空间 X 的一个有界凸闭集, 而 T 与 S 是映 K 入 X 的两个映象, 它们满足下列条件:

- (1) 对任意的 $x, y \in K$, 有 $Tx + Sy \in K$;
- (2) T 是一压缩映象, 即存在 α : $0 \leq \alpha < 1$, 使对任意的 x, x'

$\in K$ 有

$$\|Tx - Tx'\| \leq \alpha \|x - x'\|;$$

(3) S 在 K 上是全连续的;

则映象 $T+S$ 在 K 上至少有一个不动点.

§ 2. 解的局部存在性定理

在本节, 我们研究方程组

$$(E) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

其中 $t \in \mathbf{R}$, $x, f \in \mathbf{R}^n$, 而 $f(t, x)$ 是在 $n+1$ 维空间 (t, x) 或 \mathbf{R}^{n+1} 中某一区域 G 上定义的 n 维实值向量函数.

若给定一点 $(\tau, \xi) \in G$, 这里 τ 是一实常数, ξ 是一实的 n 维常向量; 则常微分方程论中的基本问题之一便是: 求一个向量函数 $\varphi(t)$, 它在含 τ 的某一区间 Δ 上可微, 并满足条件:

$$(1) \quad \varphi(\tau) = \xi;$$

$$(2) \quad (t, \varphi(t)) \in G, t \in \Delta;$$

$$(3) \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), t \in \Delta.$$

这一问题称为方程组 (E) 的初值问题, 又称为 **Cauchy 问题**, 并记为

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x(\tau) = \xi.$$

若存在满足上述条件的函数 $\varphi(t)$, 则称 $\varphi(t)$ 为方程 (E) 之满足初始条件 $\varphi(\tau) = \xi$ 或过点 (τ, ξ) 的一个解, 或简称为这个初值问题的一个解. 至于这样的解是否存在? 这便是本节所要研究的主题.

关于解的存在性问题的研究, 方法是很多的. 但总的说来, 不外乎是两种, 一种是基于用近似解逼近精确解的方法证明解的存

在性. 这种存在性定理的证明, 同时也包含了获得精确解的一个构造方法, 从而提供了近似求解的一种途径. 另一种是把解的存在性问题转化为某一变换(或映象)的不动点的存在性问题, 这种方法虽然给不出近似求解的途径, 但使用起来比较简单, 它是在前一种方法基础上的抽象和概括.

下面我们仅就几种常见的基本方法: Picard(毕卡)逐次逼近法(其抽象化即为 Banach(巴拿赫)压缩映象原理)、Euler(尤拉)折线法(差分法)、Schauder(索德尔)不动点方法以及 Cauchy 的优级数法, 分别予以介绍.

2.1. Picard 逐次逼近法(压缩映象原理)

在常微分方程论中, 逐次逼近法是比较经典的方法之一. 最早, Liouville、Cauchy、Peano(皮亚诺)等人曾使用这种方法解决某些特殊类型方程解的存在性问题. 后来 Picard 又把这一方法运用到一般非线性方程组上, 并建立了下面的

定理 1 (Picard) 若函数 $f(t, x)$ 在空间 R^{n+1} 中某一区域

$$\bar{R}: \quad |t - \tau| \leq a, \quad |x - \xi| \leq b$$

上连续, 并且关于 x 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L > 0$ (称作 Lipschitz 常数), 使当 $(t, x), (t, \bar{x}) \in \bar{R}$ 时有

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leq L|x - \bar{x}|;$$

则方程组 (E) 至少在区间

$$\Delta: \quad |t - \tau| \leq h$$

上存在唯一的满足初始条件 $\varphi(\tau) = \xi$ 的解 $\varphi(t)$, 其中

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(t, x) \in \bar{R}} |f(t, x)|.$$

关于这条定理的证明, 在一般常微分方程书上都有详细论述, 这里不再重复. 其证明的主要思想在于从初始值 ξ 开始, 通过反复叠代, 相继作一串逐次逼近序列 $\{\varphi_m(t)\}$:

$$\begin{cases} \varphi_0 = \xi, \\ \varphi_{k+1}(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi_k(s)) ds, \quad (k=0, 1, 2, \dots), \end{cases}$$

然后证明这个序列 $\{\varphi_m(t)\}$ 在 Δ 上一致收敛于我们所要求的解 $\varphi(t)$.

这一方法不仅用于证明微分方程解的存在定理，而且也可用于分析学中许多其他的问题，只是在形式上有所不同罢了。从泛函分析来看，各种不同类型问题的逐次逼近法都蕴涵着一个共同的内容。这一点首先由波兰数学家 Banach 所发现，由此建立了 Banach 压缩映象原理（见 § 1）。下面我们应用这个原理来证明上面的定理 1。

定理 1 的证明 首先，我们知道，在定理的条件下，初值问题

$$(E) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi$$

是等价于求解积分方程

$$(E') \quad x(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds$$

的问题。因此，只要证明积分方程 $(E)'$ 在区间 Δ 上存在唯一的连续解就够了。

以下为简单起见，我们只就 Δ 的右半区间 Δ^+ ： $\tau \leq t \leq \tau + h$ 来讨论。至于左半区间的情况，讨论完全类似。

我们用 $C[\Delta^+]$ 表示定义在 Δ^+ 上的一切连续的向量函数 $\varphi(t)$ 所构成的空间。如对任意的 $\varphi \in C[\Delta^+]$ ，定义它的模为

$$\|\varphi\| = \max\{|\varphi(t)| e^{-\beta t} : t \in \Delta^+\},$$

其中 $\beta > L$ 是某一常数；则不难验证 $C[\Delta^+]$ 是一 Banach 空间。

今考虑空间 $C[\Delta^+]$ 的一个子集合

$$D = \{x(\cdot) : x(\cdot) \in C[\Delta^+], |x(t) - \xi| \leq b \quad (t \in \Delta^+)\},$$

并在其上由公式

$$\psi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad (t \in \Delta^+)$$

定义一个映象(或算子) $T: \varphi \rightarrow \psi, \varphi \in D$.

任取 $\varphi \in D$, 由于

$$|(T\varphi)(t) - \xi| = \left| \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq Mh \leq b, \quad t \in \Delta^+,$$

知 $T(D) \subset D$. 又对任意的 $\varphi_1, \varphi_2 \in D$, 当 $t \in \Delta^+$ 时有

$$\begin{aligned} |(T\varphi_1)(t) - (T\varphi_2)(t)| &= \left| \int_{\tau}^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] ds \right| \\ &\leq L \int_{\tau}^t |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| e^{-\beta s} e^{\beta s} ds \\ &\leq \frac{L}{\beta} \max_{t \in \Delta^+} \{|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| e^{-\beta t}\} e^{\beta t}, \end{aligned}$$

即

$$|(T\varphi_1)(t) - (T\varphi_2)(t)| e^{-\beta t} \leq \frac{L}{\beta} \max_{t \in \Delta^+} \{|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| e^{-\beta t}\},$$

从而

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq \frac{L}{\beta} \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad 0 < \frac{L}{\beta} < 1.$$

因此, T 是 D 到它自身内的一个映象, 并满足 Lipschitz 条件 (Lipschitz 常数 $\frac{L}{\beta} < 1$), 故根据压缩映象原理, 必存在唯一的 $\varphi \in D$, 使 $T\varphi = \varphi$, 即

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in \Delta^+;$$

又由于方程 $(E)'$ 之定义在 Δ^+ 上的任何连续解都包含在 D 之中, 因此, 方程 $(E)'$ 在 Δ^+ 上存在唯一的连续解 $\varphi(t)$.

至于在 Δ 的左半区间 $\Delta^-: \tau - h \leq t \leq \tau$ 上的情况, 证明完全类似, 只不过此时将考虑空间 $C[\Delta^-]$, 并在其中引入模