工程测量边角控制网平差

[苏]H.H.列别杰夫
Д.П.巴尔科夫

测绘出版社

内 容 简 介

本书讨论了工程测量边角控制网的平差问题，给出了用联系数法和参数法进行平差的基本公式，叙述了组成条件方程式和误差方程式的原则。

阐明了平差边角网时选择边和角的权的根据。

书中对联系数法及参数法平差都列举了大量示例。

本书可供测量专业学生使用，对从事控制测量、大比例尺测图和高精度施工放样以及从事大型工程建筑物位移和变形观测的专业人员都是有益的。

工程测量边角控制网平差

[苏]H.H.列别杰夫
Д.П.巴尔科夫 著

授 明 译

*

测绘出版社出版
测绘出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32·印张 4·字数 90 千字
1983 年 11 月第一版·1983 年 11 月第一次印刷
印数 1—8,500 册·定价 0.63 元
统一书号：15039·新 273

前　言

众所周知，早在 1615～1617 年就已采用三角测量来建立测量控制网的方法，当时荷兰的天文学家和数学家斯涅利乌斯(Снеллиус)就采用三角方法进行子午圈的弧长测量。迄今，这种方法在测量工作的外业和成果处理中仍被广泛采用。

但是，这种方法对建立工程测量专用控制网来说，诸如水利枢纽工程、桥梁建筑、科研和生产的实验室以及其它大型工程设施等，则有许多难以克服的缺点。其中之一，就是随着待定边至已知边之间距离的增大而使边长测定的精度显著地下降。特别是明显的不等边三角形，这在工程控制网中是屡见不鲜的。例如有个角度为 90°、60° 和 30° 的直角三角形，起始边为短边，则相对于 60° 角的直角边，仅由几何传距误差所求得的边长相对误差为$\frac{m_s}{s}=\frac{m_{角}}{121000}$。对于高精度测量工作，边长精度如此显著下降是极为不利的。

另外，三角测量还有一个重要缺点，那就是它的观测方法有明显的旁折光影响，致使角度观测精度降低。

自从有了电磁波测距仪，有可能以三边测量来代替三角测量。这样，就可以免除旁折光的有害影响，而使得整个网的边长精度大致相同。

但是，即便是高精度的三边测量也还是有一些缺点，例如在作业地区温度迅速变化，将使电磁波测距的边长精度明显降低。同时，假如三角形与等边的图形相差很大，则按边长确定角值的精度也明显不等。

根据以上所述，当要求平面控制网的点位具有很高精度和确信可靠时，建议采用边角网来建立工程测量控制网，即测量全部边长和角度，或其中的大部分。这样就产生了不同类观测值成果的平差问题，正确和有根据地选择它们的权有着重要的意义。

书中讨论了用于建立边角网的联系数法和参数法平差。并且推导了联系数法的条件方程式以及参数法误差方程式的规则和给出了所需的公式。

为了便于学习，书中还给出了计算参数法法方程式系数的详细示例。

解算法方程式都是在电子计算机上进行的，而且当用联系数法平差时，仅将改正数条件方程式的系数矩阵输入电子计算机。

为高精度施工放样或大型工程建筑物的变形观测而建立的工程测量边角控制网，其观测成果的平差问题，在目前的科技文献中还没有得到应有的反映。

鉴于类似这方面的工作正在普遍推广，且有广阔的前途，作者试图在本书中填补这一空白。

目　录

第一章

用联系数法平差边角网的基本原理

§1. 平差方法的选择和方程式数目的计算

平差边角控制网可用联系数法或参数法，这要根据解算法方程式的数目来决定。

但是参数法需要进行大量概算，所以当法方程式数目相同时，联系数法平差总的来讲要比较省事。

用参数法平差时，法方程式数目按公式 $R=2n$ 来确定（式中 n 为待定点的数目）。参数法平差自由网时，法方程式数目是以网中的一个点作为起始点进行计算的。

用联系数法平差自由网时，法方程式的数目等于网中产生的条件数，并按下列公式计算：

（a）按角度平差时，

$$r_{角}=N+S-2n+3. \tag{1}$$

式中 N——测角数；

S——测边数；

n——网中的点数。

图形条件数的计算公式为

$$f=N-P-q+1. \tag{2}$$

式中 P——网的边数；

q——水平条件数。

（b）按方向平差时，

$$r_{方}=D+S-3n+3。 \quad (3)$$

式中　D——全网的方向数。

边角网中的条件方程式与三角测量条件式的形式有些不同，其中极条件可用边长条件来代替，这将在第三章中进行讨论。

§2.　边角网平差时权的选择

以 $m_{方}$ 表示方向测量中误差，以 m_s 表示边长测量中误差，则平差时观测值的权可按下式计算：

$$p_{方}=\frac{c}{m_{方}^2},$$

$$p_s=\frac{c}{m_s^2}。$$

式中　c——常数。

Н.И.涅费佐罗夫在其副博士论文中指出：在所有方向中，如果保持等式

$$\frac{m_{方}}{\rho}=\frac{m_s}{s}。 \quad (4)$$

则工程测量控制网的点位误差积累是最均匀的。

这个条件可以写成

$$\frac{m_{方}}{m_s}=\frac{\rho}{s}，\text{或 } m_s=\frac{s}{\rho}m_{方}。$$

此公式是工程测量控制网选择边长测量和方向测量方法以及技术措施时应该遵循的关系。

当方向测量中误差给定时，公式（4）可用来计算边长测量的精度。

这样，当 $m_{方}=1.4''$，$s_{均}=1000\text{m}$ 时，

$$m_s=\frac{1.4\times10^6}{2\times10^5}\approx7\text{mm}.$$

生产中为了简化和便于计算，在边角网中按边长测量成果来计算角值。然后，由直接观测的角度和按边长测量计算的角值取平均数。再按三角测量那样进行平差。这种平差程序是不严密的，如果不考虑到这些按边长测量所计算的角度是不等精度的，那就更不严密。三角形的角度越锐，所得角值的精度越高。

由所测边长推算角度中误差的计算公式的一般形式为

$$\left.\begin{aligned}m_A&=\frac{\rho}{h_a}\sqrt{m_a^2+m_b^2\cos^2C+m_c^2\cos^2B},\\m_B&=\frac{\rho}{h_b}\sqrt{m_b^2+m_c^2\cos^2A+m_a^2\cos^2C},\\m_C&=\frac{\rho}{h_c}\sqrt{m_c^2+m_a^2\cos^2B+m_b^2\cos^2A}.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

式中 h_a、h_b 和 h_c 为三角形顶点 A、B、C 至各对边的高（图 1）。

三角形各边高的数值按下式计算

$$h_a=b\sin C=c\sin B,$$
$$h_b=c\sin A=a\sin C,$$
$$h_c=a\sin B=b\sin A.$$

如果边长测量中误差相同与其长度无关，即 $m_s=$ 常数，则

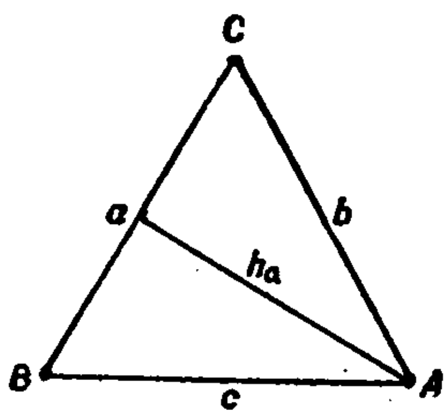

图 1

$$\left.\begin{aligned}
m_A' &= \rho\frac{m_s}{h_a}\sqrt{1+\cos^2 B+\cos^2 C}\,,\\
m_B' &= \rho\frac{m_s}{h_b}\sqrt{1+\cos^2 A+\cos^2 C}\,,\\
m_C' &= \rho\frac{m_s}{h_c}\sqrt{1+\cos^2 A+\cos^2 B}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad (6)$$

当三角形的角度为$A=90°$，$B=60°$，$C=30°$，且与a、b、c相应的高为h_a、h_b、h_c时，则

$$m_A'=3.3\frac{m_s}{a}\rho,$$

$$m_B'=2.6\frac{m_s}{b}\rho,$$

$$m_C'=0.6\frac{m_s}{c}\rho.$$

这种情况下，如果以直接观测的角度的权为单位权，则采用平均观测边长而求得该角的权为

$$\left.\begin{aligned}
p_A &= \frac{m_{角}^2\left(\frac{a}{\rho}\right)^2}{10m_s^2},\\
p_B &= \frac{m_{角}^2\left(\frac{b}{\rho}\right)^2}{7m_s^2},\\
p_C &= \frac{m_{角}^2\left(\frac{c}{\rho}\right)^2}{0.4m_s^2}.
\end{aligned}\right.\qquad (7)$$

当三角形的角度$A=90°$，$B=C=45°$时，则

$$m_A=2.4\frac{m_s}{a}\rho,$$

$$m_B = m_C = 1.4\frac{m_s}{b}\rho = 1.4\frac{m_s}{c}\rho.$$

可见

$$p_A = \frac{m_{角}^2\left(\frac{a}{\rho}\right)^2}{6m_s^2},$$

$$p_B = p_C = \frac{m_{角}^2\left(\frac{b}{\rho}\right)^2}{2m_s^2} = \frac{m_{角}^2\left(\frac{c}{\rho}\right)^2}{2m_s^2}.$$

在等边三角形中

$$m_A = m_B = m_C = \sqrt{2}\frac{m_s}{s}\rho。$$

$$p_A = p_B = p_C = \frac{m_{角}^2}{2m_s^2}\left(\frac{s}{\rho}\right)^2.$$

如果三角形各边的相对精度相同，即$\frac{m_s}{s}$=常数，则按边长计算得角度中误差为

$$\left.\begin{aligned} m_A &= \rho\frac{m_s}{s}\sqrt{\operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg}^2 C + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C}, \\ m_B &= \rho\frac{m_s}{s}\sqrt{\operatorname{ctg}^2 C + \operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A}, \\ m_C &= \rho\frac{m_s}{s}\sqrt{\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

当三角形的角度为$A=90°$，$B=60°$，$C=30°$时，则

$$m_A = 2.9\frac{m_s}{s}\rho,$$

$$m_B = 2.4\frac{m_s}{s}\rho,$$

$$m_C = 0.8\frac{m_s}{s}\rho.$$

角度的权为

$$p_A = \frac{m_{角}^2}{8m_s^2}\left(\frac{s}{\rho}\right)^2,$$

$$p_B = \frac{m_{角}^2}{6m_s^2}\left(\frac{s}{\rho}\right)^2,$$

$$p_C = \frac{m_{角}^2}{0.6m_s^2}\left(\frac{s}{\rho}\right)^2.$$

具有各种复杂的相互联测的网形（如桥梁、水利枢纽或隧道三角测量）中，产生真实闭合差的原因尚未完全揭露出来。这些误差可能是角度和边长测量误差，以及网中角度和边长元素之间几何传距误差的结果。三角形与等边的图形相差越大，则对角线联系也越多，这种联系就越可能形成几何传距的真实闭合差，当然也包括角度和边长测量本身的误差。

在工程实践的许多情况中，按如下方法来分配角度和边长测量元素之间的真实误差是合理的，即单独取一方向，固定一点，使另一点产生位移，也即沿着该方向和垂直于该方向引入平差的改正数，使端点的位移量与角度和边长的测量精度相适应。

公式

$$\frac{m_{方}}{\rho} = \frac{m_s}{s} \tag{9}$$

成立时，则沿着直线方向上点的位移和垂直于该方向点的位

移量是相同的。因而，在测量误差的影响下，网中所有方向的变形是比较均匀的。

在下列示例中，对于边和角元素共同平差时，权的计算公式为：

按方向平差时，

$$p_{方}=1,\quad p_s=\frac{m_{方}^2}{m_s^2}.$$

按角度平差时，

$$p_{角}=1,\quad p_s=\frac{m_{角}^2}{m_s^2}.$$

§3. 联系数法平差时条件方程式的组成原则

以测量三个角和三条边的单个三角形(图2)为例，我们来讨论联系数法平差时条件方程式的组成原则。

当$N=3$，$S=3$，$n=3$时，按照(1)式，条件方程式个数为

$$r_{角}=3+3-6+3=3.$$

当$P=3$，$q=0$时，按照(2)式，图形条件方程式的个数为

$$f=3-3-0+1=1.$$

可见测量了三个角和三条边的三角形有三个条件方程式，也即一个图形条件和两个边长条件。

最好用正弦定理组成边长条件。如图2所示，三角形的条件方程式为

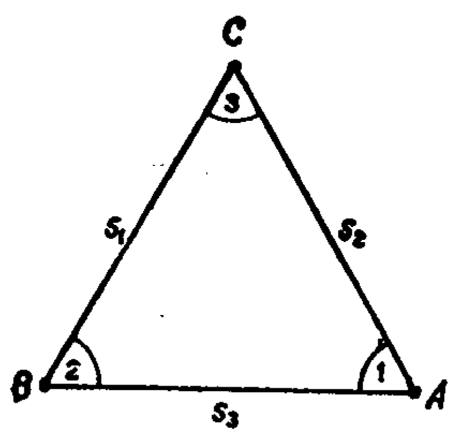

图 2

$$\left.\begin{aligned}
&1.\quad \angle 1+\angle 2+\angle 3-180^\circ=0,\\
&2.\quad \frac{s_1}{s_2}=\frac{\sin 1}{\sin 2}\quad \text{或}\ s_1\sin 2-s_2\sin 1=0,\\
&3.\quad \frac{s_2}{s_3}=\frac{\sin 2}{\sin 3}\quad \text{或}\ s_2\sin 3-s_3\sin 2=0.
\end{aligned}\right\}\qquad (10)$$

还可以组成边长条件式 $s_3\sin 1-s_1\sin 3=0$，但是它不是独立的条件，仅作平差时的检核用。

为了从函数式推导出改正数条件方程式，现对方程组(10)中的第 2 式取全微分为

$$\sin 2ds_1-\sin 1ds_2+\frac{s_1}{\rho}\cos 2d\angle 2$$

$$-\frac{s_1}{\rho}\cos 1d\angle 1=0.$$

再从微分式变为改正数式为

$$\sin 2v_{s_1}-\sin 1v_{s_2}+\frac{s_1}{\rho}\cos 2(2)$$

$$-\frac{s_1}{\rho}\cos 1(1)+w_2=0.$$

则改正数条件方程组为

$$(1)+(2)+(3)+w_1=0,$$

$$\sin 2v_{s_1}-\sin 1v_{s_2}-\frac{s_2}{\rho}\cos 1(1)$$

$$+\frac{s_1}{\rho}\cos 2(2)+w_2=0,$$

$$\sin 3v_{s_2}-\sin 2v_{s_3}-\frac{s_3}{\rho}\cos 2(2)$$

$$+\frac{s_2}{\rho}\cos 3(3)+w_3=0,$$

式中 (1)、(2)、(3)——角度观测的改正数；

v_{s_1}、v_{s_2}、v_{s_3}——边长测量的改正数。

改正数条件方程式的自由项为

$$\left.\begin{aligned}w_1&=\angle 1+\angle 2+\angle 3-180°,\\ w_2&=s_1\sin 2-s_2\sin 1,\\ w_3&=s_2\sin 3-s_3\sin 2.\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

自由项容许值的计算公式为

$$\lim(w_1)=2m_{角}\sqrt{3}=3.5m_{角}$$

$$\lim(w_{2,3})=2\sqrt{m_{角}^2\Sigma\delta_i^2+m_s^2\Sigma\delta_{s_i}^2}.$$

式中 δ_i——条件方程式中角度改正数的系数；

δ_{s_i}——条件方程式中边长改正数的系数。

如果计算自由项 w_1 时角度以秒为单位，则自由项的单位是秒；这时 ρ 以秒表示，角度改正数的单位为秒。

在计算自由项 w_2 和 w_3 时，如边长以毫米为单位，则自由项和边长改正数的单位都是毫米。

下面讨论组成改正数条件方程式的第二种方法。为此，把方程组(10)的第二式写成

$$s_2=s_1\frac{\sin 2}{\sin 1}.$$

全微分得

$$ds_2=\frac{\sin 2}{\sin 1}ds_1+\frac{s_1}{\sin 1}\cos 2\frac{d\angle 2}{\rho}-s_1\frac{\sin 2}{\sin^2 1}\cos 1 d\angle 1$$

因为 $\frac{\sin 2}{\sin 1}=\frac{s_2}{s_1}$ 或 $\frac{s_1}{\sin 1}=\frac{s_2}{\sin 2}$，

所以 $ds_2=\frac{s_2}{s_1}ds_1+\frac{s_2}{\rho}\operatorname{ctg}2d\angle 2-\frac{s_2}{\rho}\operatorname{ctg}1d\angle 1$

或 $$\frac{ds_1}{s_1}-\frac{ds_2}{s_2}-\frac{\operatorname{ctg}1}{\rho}d\angle 1+\frac{\operatorname{ctg}2}{\rho}d\angle 2=0.$$

把微分式转换为改正数式，得

$$\frac{1}{s_1}v_{s_1}-\frac{1}{s_2}v_{s_2}\frac{\operatorname{ctg}1}{\rho}(1)+\frac{\operatorname{ctg}2}{\rho}(2)+w=0.$$

式中的边长改正数以毫米为单位时，改正数系数中的边长也应以毫米为单位。

这样，无论边长或是角度改正数的系数都小于1，而且在小数点之后有若干个零。为了简化计算时的书写，改正数系数采用小数点后的第六位或第七位为单位。

边长改正数的系数以 δ_{s_i} 表示，而角度改正数的系数则以 δ_i 表示，可写为

$$\delta_{s_i}=\frac{1}{s_i}10^n,\quad \delta_i=\frac{\operatorname{ctg}\angle i}{\rho}10^n$$

式中 n——计算 δ_{s_i} 和 δ_i 时，系以小数点后的第n位为单位。

工程测量边角网平差时，采用 $n=6$ 或 $n=7$。

改正数条件方程组（10）可写成

$$(1)+(2)+(3)+w_1=0$$

$$\delta_{s_1}v_{s_1}-\delta_{s_2}v_{s_2}-\delta_1(1)+\delta_2(2)+w_2'=0,$$

$$\delta_{s_2}v_{s_2}-\delta_{s_3}v_{s_3}-\delta_2(2)+\delta_3(3)+w_3'=0.$$

这时，自由项 w_2' 和 w_3' 按下式计算

$$\left.\begin{aligned} w_2' &= \left(\frac{s_2\sin 1}{s_1\sin 2}-1\right)10^n, \\ w_3' &= \left(\frac{s_3\sin 2}{s_2\sin 3}-1\right)10^n. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

自由项 w_2 和 w_3 按（11）式计算，自由项 w_2' 和 w_3' 按（12）式计算，两者之间的关系式为

$$w_2' = w_2\frac{10^n}{h_3},\quad w_3' = w_3\frac{10^n}{h_1}$$

式中 $h_3 = s_2\sin1 = s_1\sin2$

$h_1 = s_3\sin2 = s_2\sin3.$

边长改正数和自由项规定以毫米为单位的平差，要比以小数点后第六位或第七位为单位的平差简单和明了一些。

但是第二种方法也不能忽视，因为在平差工程测量边角网时，它是另一种可应用的独立方法。

例 1. 测量了全部边长和角度的三角形的平差

观测值列于表 1。

表 1

角　　号	角度观测值	边　号	边长观测值(m)
1	60°43′40.4″	s_1	825.200
2	44 41 42.3	s_2	665.336
3	74 34 41.5	s_3	911.930

平差时采用：$m_{角} = 2.0''$，$m_s = 7.0$mm。

条件方程式自由项计算于表 2 和表 3。

自由项容许值的计算如下：