信号与线性系统

徐俊荣　范懋基 编

電子工業出版社

内 容 简 介

本书讨论信号和线性系统的基本分析方法，其中包括时域和变换域的分析。在时域分析法中除了以微分方程、差分方程和卷积计算为基础的经典方法外，还讨论了现代的状态空间法。变换域分析法包括Z变换、傅里叶变换和拉普拉斯变换等基本方法。关于信号，着重讨论傅里叶分析法，其中还介绍快速傅里叶变换的基本原理和算法。最后讨论了滤波器的基本概念和设计方法。本书对连续和离散时间系统的讨论并重，并着重讨论连续时间系统离散化的基础。本书各章都附有习题。

本书的读者对象为高等工科院校自动控制和工业自动化专业本科学生，本书也可供一般工程技术人员参考。

信 号 与 线 性 系 统

徐俊荣、范懋基 编

责任编辑　王国昌

*

电子工业出版社出版

北京科技印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1985年6月第1版　　开本：787×1092　1/16

1985年6月第1次印刷　　印张：20

印数：0001—6,500　　字数：461.7千字

统一书号：15290·99

定价：4.10元

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材159种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到"打好基础、精选内容、逐步更新、利于教学"的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》。中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构。并制定了一九八二到一九八五年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共217种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前　言

本教材系由计算机及自动控制教材编审委员会自动控制编审小组评选审定，并推荐出版。

本教材由上海交通大学徐俊荣教授、范懋基副教授担任主编，南京工学院刘士中教授担任主审。编审者均依据自动控制编审小组审定的编写大纲进行编写和审阅的。

本课程的参考教学时数为60学时，其主要内容为讨论信号与线性系统的一般概念。介绍时域分析方法，包括以差分方程、微分方程和卷积计算为基础的经典方法以及现代的状态空间法。也介绍系统的稳定性、因果性、可控性、可观性等基本概念。变换域分析方法包括Z变换、傅里叶变换和拉普拉斯变换；并介绍信号的采样，离散傅里叶变换和快速傅里叶变换及其算法；还有频率响应在系统分析中的意义和计算方法；滤波器的基本原理及模拟滤波器的设计基础；连续时间系统离散化的基本方法以及数字滤波器设计引论。

本教材适合一个学期每周4学时课堂教学使用。各章的参考学时分配如下：第一章3学时，第二、三章各8学时，第四章6学时，第五章15学时，第六章6学时，第七章6学时，最后第八章8学时。如学时数较紧，则可考虑把第六章内容压缩。使用本教材时应注意学生能力的培养。在教学方法上既要讲清基本概念又要重视应用和计算。在内容组织方面对连续和离散时间系统的讨论应并重。

本教材各章附有习题和思考题，可使学生巩固和加深对课程内容的理解。其中，还增加了一些课堂教学中未提及的新概念，以进一步扩大学生的知识面。还应注意在整个课程教学过程中不断培养和巩固学生使用计算机的能力，安排适当的有关习题实验内容。

本教材由范懋基副教授编写第一、二、三、四章，由徐俊荣教授编写第五、六、七、八章，刘美仪同志参加了第八章的部分编写工作，徐俊荣教授统编全稿。参加审阅工作的还有上海交通大学张钟俊教授，并为本书提出许多宝贵意见，这里对此表示诚挚地感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

一九八四年六月

目　　录

第一章　信号和线性系统的一般概念

1.1 引　言

所谓信号是指带有信息的某种物理量，如声学量、光学量、电学量等。物理量的变化包含着信息。因此信号可以是随时间变化或随位置变化的物理量。信号可以在数学上用一个或几个独立变量的函数来表示，也可以用曲线图形等表示。本书主要讨论的是电信号，即以时间变量作为信号表达式的独立变量。我们将着重研究信号的各种表示方法，刻划信号的特征，以及信号的分析计算方法等，同时对于信号的传输和处理等基本问题也将作初步介绍。

所谓系统是由一些互相制约的事物组成并具有一定功能的整体。因此系统的含义是极其广泛的，包括物理系统和非物理系统，自然系统和人工合成系统等等。系统在外加信号作用下将产生某种反应，这种外加信号称为系统的输入或激励，相应的反应称为系统的输出或响应。对系统的理论研究包括系统的分析和综合两方面。在系统结构已给定的条件下，研究系统在输入信号作用下产生的响应称为系统的分析。如果规定了某种激励下的响应，然后要求设计系统则称为系统的综合。尽管分析和综合紧密相关，而且系统的设计是科学工作者和工程师最富有创造性的部分，但是系统分析却是最基本的。在进行系统设计之前总要先考虑系统的分析，因此本书内容主要讨论系统的分析。

首先我们通过一些实例来叙述建立系统方程式(数学模型)的过程，然后把注意力集中到数学模型的求解，并对解进行各种解释。

我们的讨论仅限于线性系统，这不仅因为线性系统已有了一整套成熟的数学理论，更主要的是因为它很实用。尽管实际物理系统并不纯粹是线性的，但是在输入和输出的一定范围内，线性模型常常是适用的。

信号与系统之间关系十分密切，利用特种类型的信号进行系统分析往往是很方便的，因此在讨论系统的同时，我们将强调信号的表达方式，特别是经常利用正弦信号和冲激信号作为系统的输入信号。

1.2 线性系统的定义

本书主要讨论线性非时变系统。线性系统可以用线性微分方程或线性差分方程来描述。线性系统应该具有齐次性和叠加性。

当系统的输入为 $u(t)$，对应的系统响应为 $y(t)$ 时，可记为

$$u(t)\longrightarrow y(t)$$

所谓齐次性是指输入信号变化 a 倍时，相应的输出也同样变化 a 倍，即

$$au(t)\longrightarrow ay(t)$$

所谓叠加性是指有几个输入同时作用于系统时，系统总响应为各个输入单独作用时

的系统响应的叠加。如系统在输入 $u_1(t)$ 单独作用下的响应为 $y_1(t)$，在 $u_2(t)$ 单独作用下的响应为 $y_2(t)$，则当 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 同时作用于系统时，系统的输出为 $y_1(t)+y_2(t)$，即

$$u_1(t)\longrightarrow y_1(t)$$
$$u_2(t)\longrightarrow y_2(t)$$

则

$$u_1(t)+u_2(t)\longrightarrow y_1(t)+y_2(t)$$

把齐次性和叠加性结合在一起，则当

$$u_1(t)\longrightarrow y_1(t)$$
$$u_2(t)\longrightarrow y_2(t)$$

时

$$au_1(t)+bu_2(t)\longrightarrow ay_1(t)+by_2(t) \tag{1-1}$$

式中 a、b 均为任意常数。这就是系统的线性性质。

事实上叠加性蕴含了齐次性，例如 $au_1(t)$ 可理解为 $u_1(t)+u_1(t)+\cdots+u_1(t)$ 等 a 项相同输入 $u_1(t)$ 相叠加。因此只要满足叠加性条件时，就已是线性系统，可不必再提齐次性的要求。

[例 1-1] 对于图 1-1 所示的 RC 电路，设其输入为电流 $i(t)$，输出为电压 $e(t)$。开始时电容器没有存储能量，现在要问该电路能否作为线性系统来确定 $i(t)$ 和 $e(t)$ 间的关系?

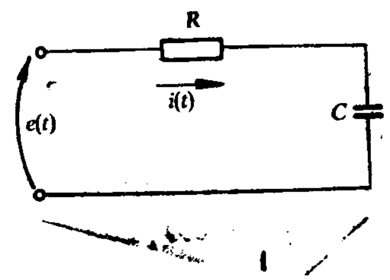

图 1-1 RC 电路

利用基尔霍夫电压定律得到

$$e(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

现在根据线性性质的定义来验证该系统是不是线性的。设分别对系统施加两个输入 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$，则相应的输出为

$$e_1(t)=Ri_1(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_1(\tau)d\tau$$

$$e_2(t)=Ri_2(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_2(\tau)d\tau$$

如施加于系统的输入为 $ai_1(t)+bi_2(t)$，则输出为

$$\begin{aligned}e(t)&=R[ai_1(t)+bi_2(t)]+\frac{1}{C}\int_0^t[ai_1(\tau)+bi_2(\tau)]d\tau\\&=a[Ri_1(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_1(\tau)d\tau]+b[Ri_2(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_2(\tau)d\tau]\\&=ae_1(t)+be_2(t)\end{aligned}$$

这就表明系统是线性的。但是读者应注意，假设电容器开始时储有电能，即电容器两端有一个初始电压 v_0，这时回路电压方程为

$$e(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v_0 \qquad t \geqslant 0 \tag{1-2}$$

式中 v_0 为电容器两端的初始电压，是由 $t = 0$ 时刻以前电容上积聚的电荷 $q(0)$所形成

$$v_0 = \frac{q(0)}{C} = \int_{-\infty}^{0} \frac{i(\tau)d\tau}{C}$$

这时如果仍采用上述线性定义，来检验(1-2)式所描述的输入输出关系就不再是线性的。因此我们在验证系统是否为线性系统时，常常假定初始条件为零。

从本例中我们看到一个系统的输出不仅取决于系统的输入 $u(t)$，而且还取决于系统开始存储的能量(初始条件)。如果我们把初始条件也看作输入，而把系统的总响应看作是系统输入引起的响应和存储的初始能量引起的响应的叠加。那末在本例中，由于初始存储能量引起的关于线性概念的混淆就可以得到合理解决。我们把线性系统的响应分解为这样两部分：系统开始处于静止(即松弛)状态时输入 $u(t)$引起的响应 $y_{zs}(t)$与系统输入为零时初始存储能量引起的系统输出 $y_{zi}(t)$。即

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$$

这种分解可用图 1-2 表示，对系统进行这种分解后的解仍和原来系统的解相同。即这两种解都满足同一个微分方程或差分方程，初始条件也都一样。$y_{zs}(t)$ 称为系统的零状态响应，$y_{zi}(t)$称为系统的零输入响应。

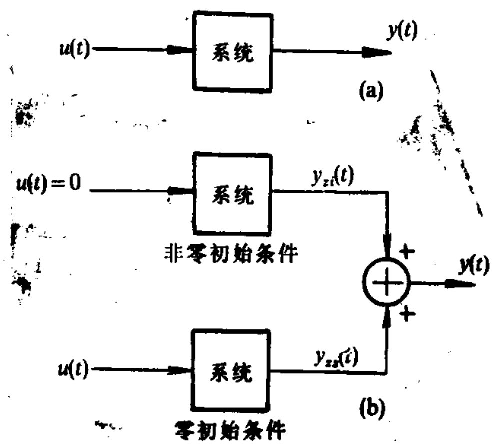

图 1-2 系统响应的分解

[例 1-2] 再来考虑例 1-1 所示的 RC 电路，此电路由下列微分方程描述

$$e(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v_0$$

式中，v_0 是电容器上的初始电压。如果按照上面的办法把系统总响应分解成 $y_{zi}(t)$ 和 $y_{zs}(t)$两部分

$$y_{zi}(t) = v_0$$

$$y_{zs}(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

那末我们就可以得到系统的总响应为

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau+v_0$$

检验 $y_{zi}(t)$和 $y_{zs}(t)$都能满足叠加原理，因此系统是线性的。

1.3 离散时间信号与离散时间系统

前面已讲过信号是随时间而变化的物理量，因此信号可以用时间函数描述，把时间函数画成图形，就是信号的波形。当用一个确定的时间函数表示信号时，根据时间变量为离散值或连续值可以把信号划分为连续时间信号与离散时间信号。

如果在信号的持续时间内，在任何时刻信号都有确定的数值，这种信号称为连续时间信号，并用连续时间函数 $f(t)$表示。图 1-3 所示的正弦信号和矩形脉冲都是连续时间信号。连续时间信号的幅值也可以是连续的或离散的，如果信号的时间变量和幅值都连续变化时，就称之为模拟信号。

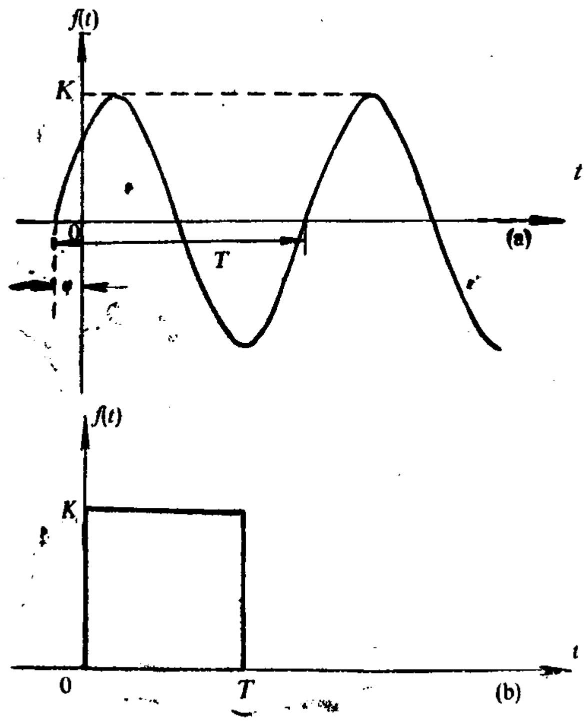

图 1-3 连续时间信号

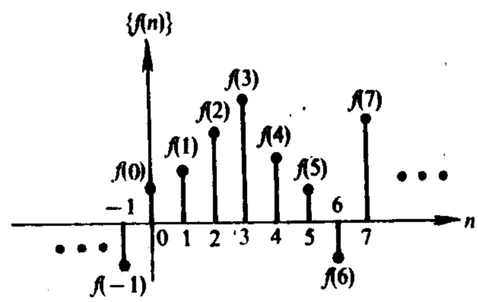

图 1-4 离散时间信号

离散信号的时间变量是离散的，因此仅在某些离散时刻具有确定的信号值，而在其他时间不加规定。离散信号可用时间序列表示，并用符号$\{f(nT)\}$表示，其中 $f(nT)$是指序列在 nT 时刻的数值，或称为第 n 个采样值。离散时间的间隔可以是均匀的，即时间间隔 T 为常数，也可以是不均匀的，即时间间隔 T 为变数。通常都采用均匀间隔。此时我们用$\{f(n)\}$表示整个序列，这里 n 是整数，如图 1-4 所示。如果信号的时间变量和幅值都取离散值时，我们就称之为数字信号。

离散时间信号或序列，可以有下列几种表示方法。

(1) 序列 $f(n)$的计算规则

例如

$$\{f(n)\}=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

根据这个规则，可以得到一个序列 $\left\{\cdots,0,0,\underset{\uparrow}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots\right\}$，其中箭头用来表示出$n=0$的这一项。

(2) 列出序列值

例如
$$\{f(n)\}=\{\cdots,0,0,1,\underset{\uparrow}{5},-3,0,0,\cdots\}$$
对于没有画出箭头的序列，则意味着第一项是 $n=0$ 的序列值，同时 $n<0$的序列值均为零。例如
$$\{f(n)\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\left(\frac{1}{2}\right)^n,\cdots\right\}$$
相当于
$$\{f(n)\}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

(3) 离散时间信号的图示法

我们用不同长度的线段代表各个序列值的大小，如图 1-4 所示。往后为了书写方便，我们就用符号 $f(n)$代表整个序列，并称之为序列 $f(n)$。

离散时间信号 $f(n)$仅在 n 为整数时有定义，但是在图 1-4 中的横坐标仍画成一条直线，这时不能认为时间不等于整数时的信号幅值为零，而应看作未加规定。

在进行离散系统的分析时，常常涉及到序列相加、相乘以及序列的延时等基本运算。

两个序列相加如 $a(n)+b(n)$，是指两个序列中同序号的数值逐项相加，并构成一个新序列 $c(n)$
$$c(n)=a(n)+b(n)$$
类似地两个序列相乘如 $a(n)b(n)$，是指两个序列中同序号的数值逐项相乘，并构成一个新序列 $c(n)$
$$c(n)=a(n)b(n)$$
序列 $a(n)$和常数 k 相乘，相当于这个序列中每一项都乘以 k，由此构成新的序列为
$$c(n)=ka(n)$$
序列 $f(n-m)$指原序列 $f(n)$各项延迟m个时间间隔得到的新序列，即原序列的后移形式，延时表示序列右移。当然也可以前移，$f(n+m)$就是原序列 $f(n)$的前移形式，前移亦即序列左移。

在本书中经常用到的典型离散信号主要有下面几种：

(1) 单位冲激序列 单位冲激序列定义为
$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$
这种序列的波形如图 1-5(a)所示。这种序列只在 $n=0$ 时取单位值，$n\neq 0$ 时的序列值均为零。

(2) 单位阶跃序列 单位阶跃序列定义为
$$u_0(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

它的图形如图 1-5(b)所示，单位阶跃序列可用单位冲激序列表示

$$u_0(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

单位冲激序列也可以用单位阶跃序列表示

$$\delta(n) = u_0(n) - u_0(n-1)$$

（3）**实指数序列**　实指数序列定义为

$$f(n) = a^n$$

式中，a 是实数，且 $0 < a < 1$ 时的实指数序列如图 1-5(c)所示。

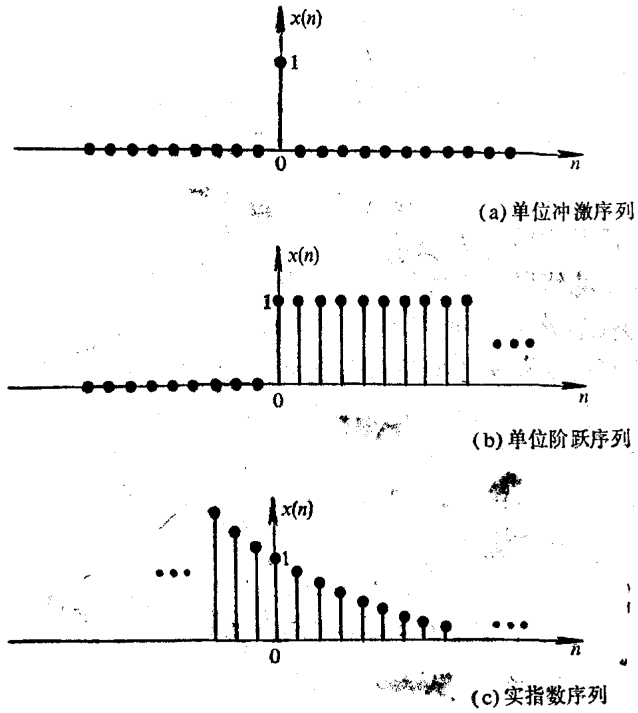

图 1-5　典型离散时间信号

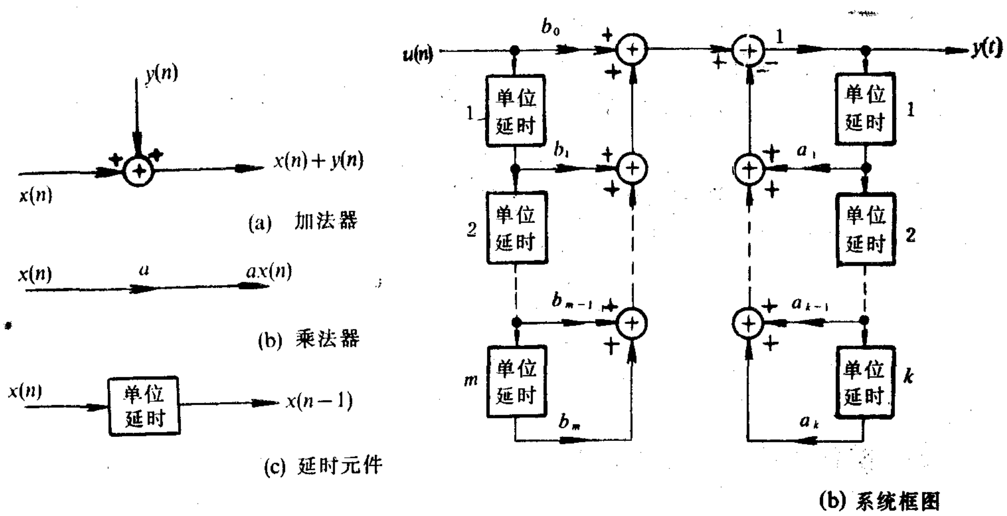

图 1-6　离散系统的框图和表示符号

离散时间系统是把输入序列 $u(n)$变换成输出序列 $y(n)$的一个总体结构。组成这种系统的基本部件是加法器、常数乘法器和单位延时元件。如图 1-6(a)、(b)、(c)所示。我们可以用常系数线性差分方程作为数学模型来描述离散时间系统。

$$y(n)+a_1y(n-1)+\cdots+a_ky(n-k)=b_0u(n)+b_1u(n-1)+\cdots+b_mu(n-m)$$

或

$$y(n)=\sum_{i=0}^{m}b_iu(n-i)-\sum_{i=1}^{k}a_iy(n-i)$$

这两个方程描述了 n 时刻的输出 $y(n)$与这一时刻的输入 $u(n)$及以前的输入和输出的关系。这是我们在第二章里将要详细讨论的离散系统的基本模型之一。这种差分方程描述的系统可以用框图表示,如图 1-6(d)所示。

下面我们将通过几个实例来说明如何建立离散时间系统的数学模型——差分方程。

[例 1-3] 在图 1-7中所示的电阻梯形网络各支路的电阻均为 R,电路各个节点对地的电压用 $U(n)$表示,$n=0,1,2,\cdots,N$。试写出描述这个网络第 n 个节点电压 $U(n)$的差分方程。

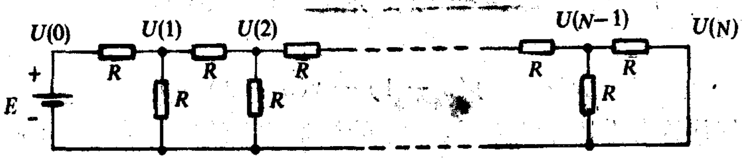

图 1-7 电阻梯形网络

[解] 我们根据节点电流定律可以写出任一个节点的电流方程

$$\frac{U(n-1)}{R}=\frac{U(n)-U(n-1)}{R}+\frac{U(n-2)-U(n-1)}{R}$$

即

$$U(n)-3U(n-1)+U(n-2)=0$$

当这个网络的边界值 $U(0)$和 $U(N)$给定后,网络中任意一个节点的电压均可以求得。所以上面这个差分方程可以作为描述这个电网络的节点电压的数学模型。

[例 1-4] 考虑一个化学过程,每次在装有 1000 升化学药品A和B混合液的容器中取出 100 升,然后再把总量为 100 升新配制A和B的混合液添加进去,并搅拌均匀。如此循环操作直到第 n 次循环时,求容器中A的浓度变化规律。

[解] 用 $y(n)$表示循环 n 次后容器中混合液所含A的浓度,$u(n)$表示第 n 次加入容器内的A的量,则其浓度变化规律符合差分方程

$$1000y(n)=900y(n-1)+u(n)$$

亦即

$$y(n)=0.9y(n-1)+0.001u(n)$$

这里输入量是所加A的量,输出量是容器内混合液中A的浓度。当取 $n=1,2,3,\cdots$时,$u(n)$和 $y(n)$的值就构成了输入和输出序列。

[例 1-5] 现在来研究一个人口问题。假使我们把人口增长速度控制在每年 1.2%,试写出描述人口增长规律的数学方程式。

[解] 设 $N(n)$表示第 n 年末的人口总数,那末人口增长数应为

$$N(n+1)-N(n)=0.012N(n)$$

或

$$N(n+1)-1.012N(n)=0$$

在这个例题中假定输入为零，给定的初始条件是某一年的人口数，人口则按上述方程所描述的规律逐年增长。人口增长是由不等于零的初始条件引起的。

[例 1-6] 假定每对兔子每月可以生一对小兔，新生的小兔要隔一个月后才能有生育能力。若第一个月只有一对新生小兔，求第 n 个月的兔子对数是多少？

[解] 我们用 $y(n)$ 代表第 n 个月开始时的兔子对数，显然 $y(0)=0$，$y(1)=1$。由于第一个月只有一对新兔子，所以第二个月开始时还不能生育，第二个月开始仍是一对兔子，即 $y(2)=1$。第三个月开始时，由于在第二个月中第一对兔子生了一对新兔子，所以 $y(3)=2$。我们可以设想在第 $n-1$ 个月具有生育能力的兔子对数是 $n-2$ 个月的兔子对数 $y(n-2)$。这些兔子再生育，从第 n 个月开始变成 $2y(n-2)$ 对。而在第 $(n-1)$ 月内仍有幼兔 $y(n-1)-y(n-2)$ 对，还是不能生育，因此第 n 个月的兔子总对数为

$$y(n)=2y(n-2)+y(n-1)-y(n-2)$$

即

$$y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0$$

兔子对数增长规律符合上述差分方程，方程的解是著名的费班纳赛(Fibonacci)序列，即黄金分割序列。当初始值给定以后，第 n 个月的兔子对数就可以求得。

关于差分方程求解问题将在下一章详细讨论。

1.4 连续时间信号与连续时间系统

连续时间信号是大家比较熟悉的。经常遇到的连续时间信号有

(1) **正弦信号** $f(t)=K\sin(\omega t+\varphi)$

(2) **指数信号** $f(t)=Ke^{\alpha t}$

(3) **复指数信号** $f(t)=Ke^{st}$

复指数信号中的 s 是复数，$s=\alpha+j\omega$。利用欧拉公式可得

$$Ke^{st}=Ke^{(\alpha+j\omega)t}=Ke^{\alpha t}\cos\omega t+jKe^{\alpha t}\sin\omega t$$

除此之外，在信号与系统分析中还经常遇到函数本身包含不连续点，或其导数与积分存在不连续点的情况，这类信号称为奇异信号。

在我们以后的分析中，最常遇到的奇异信号是阶跃信号和冲激信号。

单位阶跃信号用符号 $u_0(t)$ 表示

$$u_0(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

$u_0(t)$ 在 $t=0$ 处出现跳变，但其取值一般是不规定的，也可以在 $t=0$ 处规定函数值为 1/2。阶跃函数可用图 1-8(a)表示。

从图形可以想象单位阶跃信号相当于在 $t=0$ 时对某一电路接入单位直流电压的情况。因此如果把接入电源的时间推迟到 $t=t_0$，$t_0>0$，那末就得到一个阶跃信号的延时形式，并可用下面的数学表达式表示

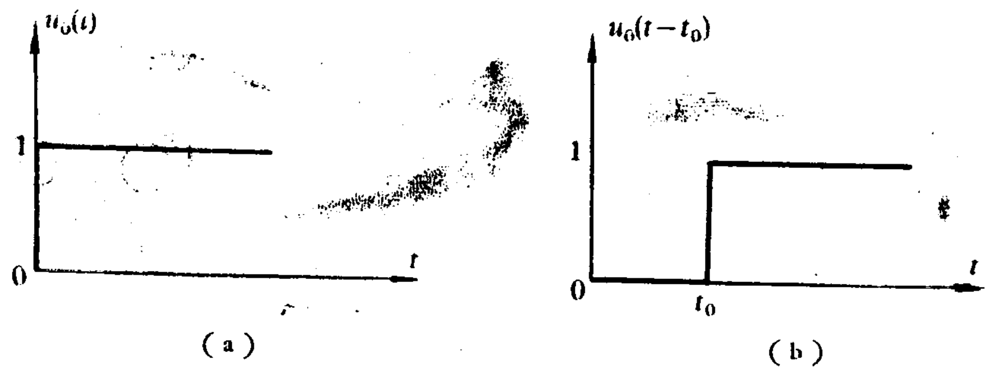

图 1-8 单位阶跃信号与延时单位阶跃信号

$$u_0(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\1 & t>t_0\end{cases}$$

延时单位阶跃信号如图 1-8(b)所示。在以后的分析中，常常为了书写方便，我们用阶跃函数表示各种信号在某一时刻接入。例如

$$f(t)=\sin t u_0(t)$$

表示正弦信号在 $t=0$ 时接入，如图 1-9(a)所示。

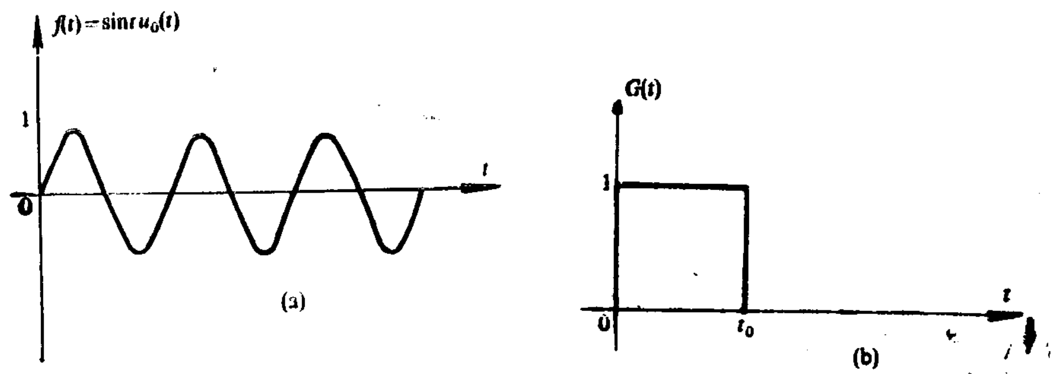

图 1-9 $\sin t u_0(t)$ 波形和矩形脉冲

单位矩形脉冲可以写成

$$G(t)=u_0(t)-u_0(t-t_0)$$

上式表示在 $t=0$ 时接入单位阶跃信号，在 $t=t_0$ 时又接入一个负的单位阶跃信号，结果形成一个单位矩形脉冲，如图 1-9(b)所示。这种书写形式很紧凑，以后将经常采用。

奇异信号中的单位冲激信号、单位符号信号等在以后应用这些信号时再作介绍。

连续时间系统对于读者来说应该也是熟悉的，例如在电路基础等课程中已经学习过。描述连续时间系统的基本数学模型是常系数线性微分方程。

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n y(t)=b_0\frac{d^m u(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_m u(t)$$

微分方程中的输入 $u(t)$和输出 $y(t)$都是变量 t 的连续函数。

下面将通过几个实例来说明如何建立连续时间系统的数学模型——微分方程。

[**例 1-7**] 图 1-10 所示的电路是可以用微分方程来描述的一个典型例子，根据基尔霍夫电压定律我们得到下列微分积分方程。

$$e(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \qquad t>0$$

对上式两边求导，也可以化为微分方程

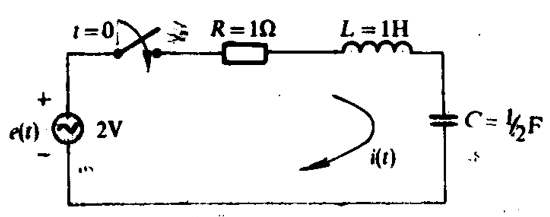

图 1-10　RLC 电路

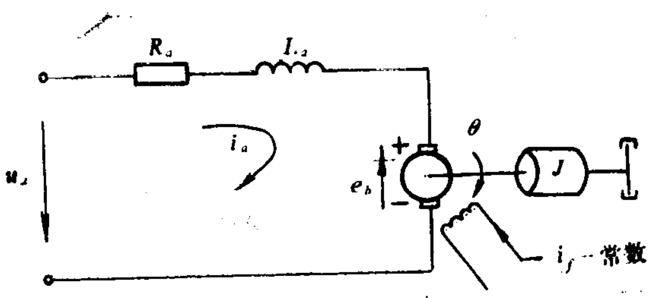

图 1-11　电枢控制式直流电动机

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}=0$$

如要求得微分方程的解，我们必须规定初始条件。设 $V_c(0)=0$ 并根据 $t=0$ 时电路接通的瞬间电感电流不能突变的规律，我们可以确定 $i(0^+)=0$，因此外加电压应全部降落在电感两端，即

$$L\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0^+}=e(0^+)$$

由此可得

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0^+}=2(\mathrm{A/s})$$

因此这一电路应根据微分方程

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{di(t)}{dt}+2i(t)=0$$

并结合初始条件

$$i(0^+)=0$$

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0^+}=2(\mathrm{A/s})$$

求解。

[例 1-8]　考虑一个由直流电动机驱动机械负载的系统，如图 1-11 所示。

电压 u_a 加在具有电阻 R_a 和电感 L_a 的电枢线圈的两端，电枢转动时的反电势 e_b 正比于角速度 $\frac{d\theta}{dt}$

$$e_b=K_b\frac{d\theta}{dt}$$

电枢电路的电压方程为

$$R_ai_a+L_a\frac{di_a}{dt}+e_b=u_a$$

电动机产生的转矩正比于电枢电流 i_a 和气隙磁通量 ϕ 的乘积，而 ϕ 又与激磁电流 i_f 成正比

$$\phi=K_fi_f$$

因此转矩 T 为

$$T=K_1K_fi_fi_a$$