高等学校教材

随机控制引论

郑政谋　朱志祥

西安电子科技大学出版社

高等学校教材

随机控制引论

郑政谋　朱志祥

西安电子科技大学出版社
1991

内 容 简 介

本书是工科自动控制和其他电子类专业硕士研究生的随机控制引论教材，大部分内容也可作为大学本科生的选修教材．全书以线性最优滤波、参数估计和分离定理为重点内容，较系统地介绍了随机控制的基本理论和基本方法，同时也简单介绍了随机控制中的一个较新分支——自校正控制理论．

本书共分七章，一、绪论；二、随机变量与随机过程基础；三、输入为随机过程的线性系统分析；四、最优滤波；五、系统辨识与参数估计；六、线性系统的随机最优控制；七、自校正控制．此外，在附录中还介绍了随机控制中常用的一些数学公式．为了便于学习，每章附习题，书后附有参考文献．

本书也可供自动控制、工业自动化及有关专业的教师、科技人员与学生自学与参考．

高等学校教材

随机控制引论

郑政谋　朱志祥

责任编辑　殷咸安

西安电子科技大学出版社出版

西安电子科技大学印刷厂印刷

陕西省新华书店发行　各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16　印张 19 4/16　字数 452 千字

1991年6月第1版　1991年6月第1次印刷　印数1－2 000

ISBN 7－5606－0159－6/TP·0053(课)　　定价：5.00元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作．从1977年底到1982年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材159种．

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础、精选内容、逐步更新、利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于1982年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》，中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构，并制定了1982～1985年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共217种选题．在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行．

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的．广大编审者，各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力．

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作．

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力．

电子工业部教材办公室

前　言

本教材系按电子工业部的工科电子类专业教材1986—1990年编审出版规划，由自动控制教材编审委员会征稿，推荐出版，责任编委陈新海教授，西安交通大学万百五教授担任主审。

本教材的教学参考学时数为80～100学时。本科生以第一、二、三、四及第五、六章中的基本内容为主，书中标有“*”号的为选读内容，硕士生可以根据需要选读全书内容。

本书是一本随机控制的引论性教材，为自动控制及其它电子类专业本科生及低年级硕士生进一步阅读随机最优控制，自适应控制方面的文献资料及钻研随机控制问题，提供必要的初步理论基础。为此，在内容安排上，以分离定理为核心，重点讲述最优滤波与参数估计，再根据这两个重点内容的需要，较系统地补充了随机过程的一些有关知识，最后为了扩展学生的视野，简单地介绍了随机自适应控制的一个新分支——自校正控制。在讲述方法上，力求简明扼要，严宽适中，读者只要略具有概率论基础与自动控制方面的初步知识，即可顺利读完全书内容。

本教材由西北工业大学郑政谋、朱志祥合作编写，郑政谋编写第二、三、四章及附录，朱志祥编写第一、五、六、七章并统编全稿。参加审阅工作的还有西安交通大学韩崇昭副教授。万百五教授与韩崇昭副教授为本书提出许多宝贵意见，这里表示诚挚的感谢。杨曙光、朱宏胜、何磊、张浩等同志为本教材的编写作了大量的文字工作，在此表示感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

1990.5

目　录

第一章　绪　　论

§1.1　随机系统与随机控制

实际的动态系统，几乎都受到各种随机因素的作用，虽然有时可以忽略这些因素，把系统近似地当作确定性系统处理；但是为了提高系统的分析设计精度，把动态系统如实地当作随机系统来研究是十分必要的．

本书所考虑的随机系统，是一类能够用受随机因素作用的时间过程的数学模型描述的物理对象，这类系统的数学模型一般是指某些含随机过程的差分方程或微分方程，一般讲，任何一个随机系统，它总包含随机因素作用于系统的随机干扰．

为了分析设计一个随机系统，首先需要建立系统的数学模型，这就是系统辨识和参数估计所要解决的问题．有了随机系统的数学模型，为要控制系统的演化，还必须知道系统的状态信息，这就需要对系统的运动状态进行测量，但是我们能够测量到的往往只是部分状态的信息，且带有随机误差，如何根据带有随机误差的部分状态测量值，估计出系统的全部状态，这就是状态估计(最优滤波)所要解决的问题．得到了系统的全部状态估计之后，才能进一步解决如何选择控制规律，使得闭环系统的性能指标在一定的统计意义下达到最优，从而解决随机最优控制问题．因此，随机控制理论的研究内容主要是随机系统的状态估计(最优滤波)、参数估计和最优控制三部分问题，又由于线性随机最优控制在随机最优控制理论中占有重要的地位，所以本书侧重于研究线性的随机最优控制问题．

随机最优控制包含对被控制对象的信息提取和信息变换两个基本问题．提取被控制对象的运动信息(即状态$X(t)$)，这是状态估计所要解决的问题；提取被控制对象的结构和参数的信息，这是系统辨识和参数估计所要解决的问题．信息变换包括：①通过计算机给出最优控制规律，以控制被控制对象的运动状态，这就是最优控制问题；②通过改变被控制对象本身的结构和参数，以适应数学模型的变化，从而保证控制系统具有既定的控制性能，这是自适应控制问题．

如何从观测量中最优地提取(估计)有用信息(状态与参数)，是求解随机最优控制问题中的一个主要问题，N.维纳(Wiener)在四十年代初创立的滤波和预测理论，是解决这个问题的理论基础；但由于当时计算条件的限制和理论本身的局限性，使得维纳滤波未能发挥其应有的作用．

随着数字计算机的发展与应用，R.E.卡尔曼(Kalman)在维纳滤波的基础上，提出了一种新的线性滤波算法，使得最优滤波理论得到了突破性的进展，给状态估计问题提供了一个有效的解算方法，较彻底地解决了随机最优控制中的最优估计问题．

§1.2　随机控制理论的主要内容

下面我们简单介绍随机控制理论所要研究的主要内容。

状态最优估计

要实现闭环最优控制，计算机必须获取被控制对象的全部状态变量。但是：

(1) 由于工程上测量装置往往不能测量出全部状态变量，即反馈到计算机的测量信号$Y(t)$只能提供状态向量$X(t)$的部分信息；

(2) 被控制对象及测量装置上常常作用着随机的系统噪声$W(t)$和测量噪声$V(t)$。

因此，要实现闭环最优控制，首当其冲的问题是如何从夹杂着随机噪声的、信息不足的测量信号$Y(t)$中，对状态$X(t)$进行估计，求出在一定的统计意义上最优的估值$\hat{X}(t)$。这就是状态最优估计问题。

随机最优控制

如果被控制对象的数学模型完全掌握，但被控制对象中可能有部分状态变量不能测量，且被控制对象和测量装置上作用着随机噪声，这时最优控制问题称为随机最优控制问题。问题的解决可分为三步：

(1) 首先忽略随机的系统噪声$W(t)$和测量噪声$V(t)$，将问题转化为确定型的最优控制问题；假定已获取闭环解，则最优控制信号是状态的函数：$U = U(x)$。

(2) 其次，用卡尔曼滤波方法，从夹杂着随机噪声的信息不足的测量信号$Y(t)$中，确定出状态向量$X(t)$的最优估值$\hat{X}(t)$。

(3) 用可实现的状态最优估计值$\hat{X}(t)$来代替控制信号$U = U(x)$中无法获取的状态$X(t)$，产生可实现的控制信号$U = U(\hat{x})$。

这里产生一个这样的问题：以可实现的控制信号$U = U(\hat{x})$代替真实的控制信号$U = U(x)$，能否使控制系统最优呢？

这是随机最优控制的核心问题。分离定理回答了这个问题。分离定理指出：如果被控制对象是线性系统，性能指标是二次型函数，系统噪声和测量噪声是高斯(Gauss)型的情况(通称为线性–二次型–高斯情况，简称 LQG 情况)，回答是肯定的。使用状态$\boldsymbol{X}$的最优估计$\hat{\boldsymbol{X}}$代替确定性最优控制规律$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X})$中的$\boldsymbol{X}$，仍然能使控制达到最优。

根据分离定理，在 LQG 情况下，计算机实现最优控制系统可转化为设计互为独立的两部分程序：最优估计程序和最优控制程序。

因此，在 LQG 情况下，随机最优控制问题实质上是确定性最优控制问题和状态最优估计问题的综合。

系统辨识和参数估计

至此，我们总是假定被控制对象的数学模型是完全掌握的。如果被控制对象的数学模型不能确切掌握，包括：

(1) 系统结构的先验信息毫无所知，则需要进行系统辨识，描述出被控制对象的结构；

(2) 从一定途径已经获知系统结构的信息，则只需估计出系统中的某些参数。

这两类问题统称为系统辨识问题。系统辨识问题可以表达为：根据作用在被控制对象上的已知输入和可测量到的输出，估计一个尽可能拟合此输入和输出数据的数学模型。因此，辨识问题可分为两步：确定结构和估计参数，而两者是密切相关的。

在控制工程中，常遇到的是参数估计问题。常用的参数估计方法有：最小二乘法、卡尔曼滤波法等等。

参数估计问题往往与状态估计问题交织耦合在一起。工程应用中，如果系统的参数变化速度远小于系统的瞬变响应速度，则可将参数估计与状态估计问题近似地分离开来处理。

自适应控制

如果被控制对象的数学模型不能确切掌握，可能有部分状态变量不能测量获得，且被控制对象和测量装置上又作用着随机噪声，这时的最优控制问题，称为最优自适应控制问题。可见，最优自适应控制问题是参数设计、最优估计和最优控制问题的综合。

自校正控制是一种典型的次最优自适应控制，亦称参数自适应控制系统。它有两个环路：一个环路由调节器与被控制对象组成，称为内环，它类似于通常的反馈控制系统；另一个环路由递推参数辨识器与调节器参数设计器组成，称为外环。因此，自校正控制系统是将在线参数估计与最优控制器的设计有机地结合在一起。在运行过程中，首先进行被控对象的参数在线设计，然后根据参数辨识的结果进行调节器参数设计以达到有效地消除被控制对象参数扰动所造成的影响。

自校正控制通常属于随机自适应控制系统，在控制器设计中它采用确定性等价策略，即当系统中所有未知参数用它们相应的估计值代替后，其控制规律的形式恰与对应的参数已知的最优控制规律的形式相同。由此可知，在寻求自校正控制规律时，即可应用确定性等价原理和分离原则，先假定该受控系统的所有参数都是已知的，并根据给定的性能指标综合出系统的最优控制规律；然后，用估计模型来估计未知参数，并用估计结果代替上述最优控制规律中的相应的未知参数，就得到了自校正的控制规律。

§1.3 本书线索

本书就是根据上述思路来组织内容的。限于篇幅，我们不可能详细研究其中的每一部分。假设读者已经学过《线性代数》、《概率论与数理统计》、《最优控制》等课程，对超越这些课程的内容，都将在附录中作适当介绍。

我们着重研究状态最优估计中的卡尔曼滤波、参数估计和随机最优控制，特别是 LQG 问题和分离定理。

第二章补充介绍与随机控制有关的概率论和随机过程的一些基础知识，内容力求精简扼要。

第三章研究具有随机输入的线性系统的统计分析，分为连续时间线性系统输出响应分析和离散时间线性系统状态分析两部分。

第四章首先简要地研究线性滤波中较早采用的一种滤波方法——维纳滤波。随后作为维纳滤波的一个重要发展，讨论了离散型与连续型卡尔曼滤波的基本方程，同时还讨论了卡尔曼滤波的一些推广问题，如预测问题、平滑问题、有色噪声问题和非线性模型问题等。

第五章讨论系统辨识与参数估计问题。先给出有关系统辨识的一般概念，然后重点讨论差分模型的各种离线或在线辨识方法，详细论述最小二乘参数估计和极大似然估计的各种算法。同时还介绍参数估计的随机逼近法。

第六章首先回顾确定性离散和连续时间系统的 LQ 问题，然后研究线性−二次型−高

斯情况的随机最优控制、最优滤波与最优控制的分离定理，并对离散情况给出详细的证明。

第七章介绍近年来发展得较快并在实际中得到广泛应用的自校正控制。首先研究最小方差调节器，然后应用确定性等价原理引出在参数不确定情况下的自校正控制。重点介绍最小方差自校正调节器、控制器及自校正控制的极点配置技术。最后给出一个自校正控制的应用实例。

第二章　随机变量与随机过程基础

由于随机控制理论的研究对象是随机系统的最优控制问题，而随机系统的输入、输出及干扰，一般讲又都是一些随时间变化的随机变量，因此，要正确处理随机控制问题，就必须对随机过程的基本内容有足够的了解。这一章假定读者已具备工科概率论基础，但对概率计算的矢量矩阵法则和随机过程的基本内容不太熟悉，将对随机变量、随机过程中与随机最优控制有关的一些内容，作一些简单的回顾、推广和补充。

§2.1　随机变量及其概率分布

如果对于随机试验 E 中的每一基本事件 ω，都给定一个实数 $X(\omega)$和它对应，这样定义在随机试验的全体基本事件(样本空间)Ω 上的单值实函数 $X(\omega)$就是一个**随机变量**，简记作X。随机变量根据可能取得的数值(可能值)的不同，有两种主要的类型:

2.1.1 离散型随机变量

离散型随机变量只能取得有限多个或可列无穷多个可能值。设X是一个离散型随机变量，其可能值是x_1，x_2，…，X取得这些可能值的概率分别是p_1，p_2，…，由于这一组数值完整地给出了X取得各个可能值的概率，因此给定了概率数列p_1，p_2，…，就完全描述了离散型随机变量X的概率分布。但在实际问题中，我们需要了解的常常并不是X的全面概率分布情况如何，而是刻划它的两个主要分布特性的数字特征——**数学期望**与**方差**，其定义如下:

(1) 如果随机变量X的可能值是x_1，x_2，…，其对应的概率是p_1，p_2，…，则称①

$$E\{X\} \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \qquad (2.1-1)$$

为离散型随机变量X的**数学期望**或**均值**，X的数学期望有时又记作μ_x。从式(2.1−1)可以看出，数学期望μ_x是随机变量X的所有可能值x_1，x_2，…，以其对应概率p_1，p_2，…为权的加权平均值，因此μ_x刻划了随机变量X在数轴上的平均出现位置。

(2) 随机变量X对其数学期望μ_x偏差平方$(X-\mu_x)^2$的数学期望

$$\mathrm{Var}(X) \triangleq E\{(X-\mu_x)^2\} = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i-\mu_x)^2 p_i \qquad (2.1-2)$$

称为离散型随机变量X的**方差**，X的方差有时又记作σ_x^2或V_x。从式(2.1−2)可以看出，方差是随机变量$(X-\mu_x)^2$的所有可能值$(X_i-\mu_x)^2$ ($i=1$，2，…)以其对应的概率p_i (i

①符号"≜"表示"定义为"。

$=1, 2, \cdots$)为权的加权平均值，因此，它刻划了X对其均值(数学期望)的平均离散程度。

2.1.2 连续型随机变量

连续型随机变量可以取得某一区间内的任何数值。设X是一个连续型随机变量，它可以取得某一区间(比如说$-\infty<x<\infty$)的任何数值，如果有一非负函数$f(x)$，X出现在区间$(a, b]$上的概率为

$$P(a<X\leqslant b)=\int_a^b f(x)dx \tag{2.1-3}$$

则称$f(x)$为连续型随机变量X的**分布密度**(或**概率密度函数**)，并称

$$F(x)\triangleq P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{2.1-4}$$

为X的**分布函数**。根据式(2.1−4)，显然当$f(x)$在x处连续时，有

$$F'(x)=f(x) \tag{2.1-5}$$

式(2.1−3)给我们指出，知道了$f(x)$就可以给出X出现在任一区间(a, b)上的概率，因此连续型随机变量X的概率密度函数$f(x)$也完全描述了X的概率分布。由式(2.1−3)及式(2.1−4)还可以看出，概率密度函数$f(x)$具有以下两个基本性质:

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1\\ f(x)\geqslant 0\end{cases}$$

类似于离散型随机变量的数学期望与方差的定义式(2.1−1)及式(2.1−2)，可以给出连续型随机变量X的数学期望$E\{X\}$与方差$\mathrm{Var}(X)$的定义如下:

$$E\{X\}\triangleq\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{2.1-6}$$

$$\mathrm{Var}(X)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 f(x)dx \tag{2.1-7}$$

数学期望与方差具有以下两个常用的性质:

(i) 如果C为非随机量，X为随机变量，则有

$$E\{CX\}=CE\{X\} \tag{2.1-8}$$

$$\mathrm{Var}(CX)=C^2\mathrm{Var}(X) \tag{2.1-9}$$

(ii) 对于n个任意的随机变量X_1，X_2，$\cdots$，X_n，有

$$E\{X_1+X_2+\cdots+X_n\}=E\{X_1\}+E\{X_2\}+\cdots+E\{X_n\} \tag{2.1-10}$$

对于n个相互独立("独立"的意义以后说明)的随机变量X_1，X_2，…，X_n，有

$$\mathrm{Var}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+\cdots+\mathrm{Var}(X_n) \qquad (2.1-11)$$

§2.2 随机矢量(多维随机变量)及其概率分布

设有随机矢量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$，其中$X_i(i=1, 2, \cdots, n)$是随机变量，如果有一非负的$n$元函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$出现在$n$维空间域$V_n$的概率为

$$P\{(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T\in V_n\}=\int\overset{(n)}{\cdots}\int_{V_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n \qquad (2.2-1)$$

则称$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$的**联合分布密度**(或**联合概率密度函数**)，并称

$$\begin{aligned}F(x_1, x_2, \cdots, x_n)&\triangleq P(X_1\leqslant x_1, X_2\leqslant x_2, \cdots, X_n\leqslant x_n)\\&=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n \qquad (2.2-2)\end{aligned}$$

为$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$的**联合分布函数**。根据式(2.2–2)，显然，当$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$点连续时，有

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}F(x_1, x_2, \cdots x_n)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (2.2-3)$$

由式(2.2–1)可以看出，知道了$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$就能给出$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$出现在任一$n$维空间域$V_n$中的概率，因此联合分布密度$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$完全描述了随机矢量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$的概率分布。

对于随机矢量，除了联合分布外，还可以推引出另外两种概率分布——**边沿分布**与**条件分布**：

边沿分布密度是描述多维随机变量中的某一个或某几个分量的概率分布的概率密度函数。根据概率乘法定理与分布密度的定义，可以证明

(i) $(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$关于$X_1$的边沿分布密度

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\overset{(n-1)}{\cdots}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_2\cdots dx_n \qquad (2.2-4)$$

(ii) $(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$关于$X_2$的边沿分布密度

$$f_2(x_2)=\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}\overset{(n-1)}{\cdots}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1dx_3\cdots dx_n \qquad (2.2-5)$$

(iii) $(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$关于$(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1})^T$的边沿分布密度

$$f_{1,2,\cdots,n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_n \qquad (2.2-6)$$

(iv) $(X_1, X_2, \cdots, X_n; Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)^T$关于$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$的边沿分布密度

$$\begin{aligned} &f_x(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\overset{(m)}{\cdots}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m)dy_1dy_2\cdots dy_m \qquad (2.2-7)\end{aligned}$$

条件分布密度是在已知一个随机矢量的某些分量的出现值的情况下，其余分量的分布密度。根据事件概率的基本概念，可以得出：

(i) 在$X_1=x_1$，$X_2=x_2$，$\cdots$，$X_{n-1}=x_{n-1}$的条件下，X_n的条件分布密度

$$\begin{aligned} f(x_n|x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) &= \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{f_{1,2,\cdots,n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})}\\ &=\frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}|x_n)f_n(x_n)}{f_{1,2,\cdots,n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})} \qquad (2.2-8)\end{aligned}$$

(ii) 在$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)^T=(y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$的条件下，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$的条件分布密度

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n|y_1, y_2, \cdots, y_m) &= \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m)}{f_y(y_1, y_2, \cdots, y_m)}\\ &=\frac{f(y_1, y_2, \cdots, y_m|x_1, x_2, \cdots, x_n)f_x(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{f_y(y_1, y_2, \cdots, y_m)} \qquad (2.2-9)\end{aligned}$$

式(2.2−8)及式(2.2−9)又称为分布密度的贝叶斯(Bayes)公式，是估计理论中的两个重要关系式。

采用矢量矩阵表示法，记

$$\boldsymbol{X} \triangleq (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$$

$$\boldsymbol{x} \triangleq (x_1, x_2 \cdots, x_n)^T$$

$$\boldsymbol{X} \leqslant \boldsymbol{x} \triangleq (X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n)^T$$

$$\boldsymbol{x}_{-i} \triangleq (x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)^T$$

$$d\boldsymbol{x} \triangleq dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$f(\boldsymbol{x}) \triangleq f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \triangleq f(x_1, x_2, \cdots, x_n|y_1, y_2, \cdots, y_m)$$