

甚低频电磁法

史保连 主编

地质出版社

452
29

甚低频电磁法

图说

史保连 主编

地质出版社

甚低频电磁法

史保连 主编

责任编辑：曹玉

地质出版社出版

(北京西四)

河北省蔚县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本：787×1092¹/₁₆；印张：9¹/₂；插图：2个 字数：222,000

1986年10月北京第一版·1986年10月北京第一次印刷

印数：1—2,205册 定价：2.30元

统一书号：13033·新288

目 录

绪 言	(1)
第一章 甚低频电磁法的理论基础	(3)
§1.1 交变电磁场的基本方程式	(3)
§1.2 无限介质中的平面波	(8)
§1.3 水平二层介质的平面波阻抗	(11)
§1.4 均匀无限介质中的垂直电偶极子的场	(16)
§1.5 均匀导电半空间上方的垂直电偶极子	(19)
第二章 甚低频电磁波的传播	(24)
§2.1 一般概念	(24)
§2.2 电波沿地面传播时场分量之间的关系	(26)
§2.3 地波电场的方向	(29)
§2.4 电磁场的椭圆极化	(30)
§2.5 甚低频电磁场随时间的变化	(35)
§2.6 电磁波在地下传播的衰减和相移	(37)
§2.7 甚低频电磁法的探测深度	(42)
§2.8 波阻抗、波倾斜和介质参数的关系	(46)
第三章 规则几何形体上甚低频电磁异常	(48)
§3.1 甚低频电磁场的模拟	(48)
§3.2 二次场相位的求取	(49)
§3.3 线电流源的倾角和偏心率曲线	(49)
§3.4 半无限垂直薄板的倾角和偏心率曲线	(53)
§3.5 有限延深倾斜薄板的倾角曲线	(56)
§3.6 多个薄板导体的倾角曲线	(57)
§3.7 球体的倾角异常	(59)
第四章 甚低频电磁法的资料解释	(62)
§4.1 一般概念	(62)
§4.2 导体位置的确定	(63)
§4.3 逆概率法	(63)
§4.4 导体埋深的估计	(72)
§4.5 甚低频二层曲线的反演	(77)
§4.6 覆盖层对甚低频异常的影响	(92)
§4.7 极化椭圆倾角曲线的地形改正	(96)
第五章 甚低频电磁法仪器及测量方法	(107)
§5.1 场源	(107)

§5.2	磁场及电场的测量方法	(103)
§5.3	仪器的磁场灵敏度	(110)
§5.4	甚低频电磁信号的特点	(110)
§5.5	DDS-1型甚低频电磁仪	(111)
§5.6	EM-16型甚低频电磁仪	(113)
§5.7	EM-16R型甚低频电阻率仪	(115)
§5.8	SE-80型甚低频电磁仪	(116)
第六章	野外工作方法及应用实例	(118)
§6.1	地面甚低频测量	(118)
§6.2	地下坑道中的甚低频测量	(121)
§6.3	井中甚低频测量	(122)
§6.4	航空甚低频测量方法	(124)
§6.5	甚低频电磁法在勘探地下水中的应用	(125)
§6.6	甚低频电磁法在大比例尺地质填图中的应用	(137)
§6.7	甚低频电磁法在金属矿床上的应用	(141)
参考文献	(147)

绪 言

甚低频 (VLF)电磁法是近十余年发展起来的一种电磁法。这种方法是用频率为15~25kHz电台发射的电磁波作为场源,在地表、空中或地下探测场的参数变化,从而获得电性局部差异或地下构造的信息。

甚低频发射天线通常当作位于地表的一个垂直电偶极子。辐射场包括磁分量和电分量。离开发射台几倍波长的距离只需考虑地表影响,当距离更大时,必须考虑电离层的影响,因为这时存在着天波,因而从数千公里的远方传来的甚低频电磁波(即地波和天波)是在电离层和地球表面组成的波导中传播。这就使甚低频电磁波具有传播距离远、衰变小、噪声低和场强比较稳定的特点。

甚低频电磁法既可以利用磁分量,也可以利用电分量。前者基于电磁感应原理,后者与电波传播特性和大地电性有关。

(1) 利用磁分量的甚低频测量。位于地表的垂直电偶极子所产生的磁分量只有水平分量,如果在远区并考虑有限区域内的场,一次场通常接近于沿地表几乎成切线入射的横向磁场平面波。地中局部电性差异的地质体或分界面,在水平一次场的作用下,就会感应出二次场来,则必然出现垂直磁分量,因此磁场垂直分量的产生是存在甚低频磁分量异常的一个标志。

(2) 利用电分量的甚低频测量。当大地为理想导体($\sigma = \infty$)时,电场只有垂直分量,而无水平分量。若大地为有限电导率的介质,一部份电磁能量穿透地表,而产生水平分量,则电场在波的传播方向上发生倾斜,波倾斜的大小和大地电性及频率有关,并用电场水平分量与垂直分量之比来表示。因而可以根据波倾斜的变化来研究大地电阻率的变化,这就构成了甚低频电阻率填图的物理基础。

由此可见,基于电磁感应原理的磁分量测量可以研究地下局部电性差异,探测地下良导体的存在;而基于电分量测量可以研究大地电性,进行电阻率填图。后者是区别于一般电磁法的一个重要特点。

1960年初,瑞典地质调查所为水平线圈电磁法引进了一种新的工作频率($f = 18\text{kHz}$)。然而从这以后,出现了一种很强的干扰信号,使之难以获得准确的测量结果。后来发现这种干扰信号是由工作在甚低频波段的强无线电发射机引起的。因此他们在1963~1964年使用甚低频无线电信号进行矿产普查,扩大试验。

1964年Geonics公司介绍了工作在15~25kHz的仪器(EM-16型仪器)。1965年利用这些仪器在加拿大一些矿区已成功地完成多次测量。1966年末,此方法已得到普遍应用。1967年后又出现几种与此类似的甚低频系统和仪器。与此同时,在1965年前后,苏联物探工作者也把使用频率较高(150—450kHz)的无线电波比较和定向法(Радиокип)改为甚低频波段,称之为超长波无线电比较和定向法(СДВ-Р)。

因而从1965年开始,甚低频电磁法已成为矿床勘探和地质填图中广泛使用的方法,特别是在加拿大和斯堪的纳维亚,在圈定电导率增高的构造带中,例如矿化带、构造破碎

1964

带、石墨片岩和页岩，已经证明这种方法是一种有效的手段。1971年加拿大安托万·莱萨德 (Antoine Lessard) 在研究北魁北克弗洛特湖发现的一块铜镍矿转石来源时，用地面甚低频电磁法发现了一个电磁导体。根据甚低频异常剖面及其它物探方法的结果打了钻，没有发现转石来源，但找到了一个铜锌硫化矿。1975年春，德克萨斯海湾公司在依佐克湖矿床上进行了地面甚低频电磁法工作，在离高品位转石不远的地方探测出一个导体。后来的钻探工作，于1977年春探明了是一个高品位的块状硫化矿体，储量在1200万吨以上。1981年报导了用甚低频在南非探测地下水的成功实例。

我国从1975年开始引进了SE-80型地面甚低频电磁仪，后来又引进了EM-16型仪器。地质矿产部物探研究所曾先后在浙江及湖北等已知矿体上做过甚低频测量，取得了明显的甚低频异常。陕西203研究所用甚低频法找构造的试验工作，也取得了良好的效果。此后成都地质学院和地质矿产部航空物探总队分别进行了地面及航空甚低频方法和仪器的试验研究工作。在许多已知矿区和岩溶发育地区进行了甚低频测量，取得了明显的异常反映。

自1981年我国自己研制的DDS-I型甚低频电磁仪由重庆地质仪器厂投产以来，已出厂450台以上，分布于全国各地进行着水文地质和工程地质方面的物探工作。在探测岩溶地下水方面于湖南和广西已取得了不少成功的实例。

本书由史保连同志主编，并编写了第一、二、六章，第三章由陈华玢、第四章由袁庆华、第五章由都景荣编写。傅良魁、张学民同志对全书作了仔细的审阅，并提出了许多宝贵的修改意见，对此致以深切的谢意。

在编写过程中得到了有关部门的大力支持，书中引用了广西水文地质队、岩溶地质研究所、湖南水文地质队、00934部队等有关单位的资料，黄兰珍和刘竞波同志为本书编制了电算程序，王骧、冯光玲和林琳同志担任了图件清绘等工作，在此一一表示感谢。

由于作者水平有限，加之编写时间仓促，缺点和错误在所难免，敬希读者批评指正。

第一章 甚低频电磁法的理论基础

§ 1.1 交变电磁场的基本方程式

在地下激发的交变电磁场的主要特点是存在感应分量或二次场，这是在地层中或导体中由于磁感应通量的变化而产生的。二次场通常和一次场叠加在一起，我们在地表、空中或井中可以观测到两种场与被探测对象（地质介质）相互作用的总和效应。为了确定介质中任何一点，任何时刻的电磁场各要素，必须引入确立电磁场各量之间基本规律的麦克斯韦方程组：

$$\left. \begin{array}{l} \text{I、} \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{II、} \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{III、} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{IV、} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho' \end{array} \right\} \quad (1.1.1)$$

与上述方程有连系的方程：

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.1.2)$$

式中 \vec{E} 、 \vec{H} —— 分别是电场和磁场强度矢量； \vec{D} 、 \vec{B} —— 分别是电感应和磁感应强度矢量； \vec{J} —— 传导电流密度； ρ' —— 体电荷密度； σ —— 电导率； μ —— 磁导率； ϵ —— 介电系数。这时场矢量是时间 t 和观测点坐标 (x, y, z) 的函数。

在有理化MKS单位制中，上述方程组中各物理量的单位是

$$\begin{array}{ll} [E] = 1 \text{ v/m}; & [H] = 1 \text{ A/m}; \\ [D] = 1 \text{ c/m}^2; & [B] = 1 \text{ Wb/m}^2; \\ [J] = 1 \text{ A/m}^2; & \left[\frac{\partial D}{\partial t} \right] = 1 \text{ A/m}^2. \end{array}$$

由上述方程组可以看出，麦克斯韦第一方程的右部是传导电流密度和位移电流密度之和。这是全电流定律的微分表达式，即安培定律的数学表达式，它表示有旋磁场与传导电流和位移电流的联系。旋度矢量的方向与电流方向一致。它表明若空间具有随时间变化的电场，则所有各点都有磁场发生。

第二方程是电磁感应定律（即法拉第定律）的微分表达式，它表示磁感应强度的任何变化就要引起电场的涡旋，亦即若空间有随时间变化的磁场，则所有各点都有电场发生。

对于均匀各向同性介质，麦克斯韦方程组可以简化为

$$\left. \begin{aligned}
 \text{I、} \quad \nabla \times \vec{H} &= \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
 \text{II、} \quad \nabla \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \text{III、} \quad \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \text{IV、} \quad \nabla \cdot \vec{D} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

通常, 根据位函数求解电磁理论问题是很方便的, 因为由位函数求导数可以得出场强来。方程组 III 表明, 矢量 \vec{B} 是无散矢量, 因此可以用另外一个任意矢量 \vec{A} 的旋度来表示:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.1.4)$$

这是因为旋度的散度等于零。

我们把 (1.1.4) 代到方程 II 中可得:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.1.5)$$

这意味着矢量 $\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ 是无旋的, 由于梯度的旋度等于零, 因此可以由任意标量函数 ϕ 来求出, 即

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (1.1.6)$$

或
$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.1.7)$$

函数 \vec{A} 和 ϕ 分别为场的矢量位和标量位。

现在我们把 (1.1.7) 代到方程 I 中, 并考虑 (1.1.2) 和 (1.1.4) 则有

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \mu \sigma \left(\nabla \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

或
$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} + \mu \epsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu \sigma \nabla \phi + \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \quad (1.1.8)$$

利用矢量的性质:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla \cdot \nabla \vec{A} = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

和洛伦兹条件:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu \sigma \phi = 0, \quad (1.1.9)$$

我们可得

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \quad (1.1.10)$$

把 (1.1.7) 式代到方程 IV 中, 我们可得

$$\nabla \cdot \left(\nabla \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.1.11)$$

或

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.1.12)$$

把 (1.1.9) 式对 t 求导并利用 (1.1.12) 式, 则有

$$\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.1.13)$$

因此由 (1.1.10) 和 (1.1.13) 式给出:

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (1.1.14)$$

和

$$\nabla^2 \phi = \mu\sigma \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (1.1.15)$$

这就是矢量位和标量位两种位函数所满足的波动方程。

现在证明, 在均匀各向同性介质中, \vec{B} 、 \vec{E} 和 \vec{J} 也遵循象 (1.1.14) 及 (1.1.15) 那样的波动方程。我们取麦克斯韦方程 I 的旋度, 则得到:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \mu \left[\sigma \nabla \times \vec{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E} \right] \quad (1.1.16)$$

或

$$\nabla \nabla \cdot \vec{B} - \nabla^2 \vec{B} = - \left[\mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \right] \quad (1.1.17)$$

由于 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, 则上式可写为:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (1.1.18)$$

用类似的方法, 取麦克斯韦方程 II 的旋度

$$\nabla \nabla \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \quad (1.1.19)$$

并由方程 I 代替 \vec{B} , 又因 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, 对于均匀各向同性介质, 我们可以把 (1.1.19) 式写成如下形式:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.1.20)$$

由于 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, 则由 (1.1.20) 式可得到

$$\nabla^2 \vec{J} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{J}}{\partial t^2} \quad (1.1.21)$$

(1.1.18)、(1.1.20) 和 (1.1.21) 式表明, \vec{B} 、 \vec{E} 和 \vec{J} 满足 \vec{A} 和 ϕ 所遵循的类似的波动方程。

在解决地球物理的有关电磁理论问题时, 这些方程的解必须满足相应的边界条件。而方程的解可以根据各自场的矢量明确地求解出来。

在有些地球物理问题中, 引入单一矢量函数——赫芝矢量, 而变得易于求解。由洛伦兹条件可看出, 如果按照下式来定义一个矢量函数 $\vec{\Pi}$, 则洛伦兹条件自然满足:

$$\vec{A} = \mu\sigma\vec{\Pi} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t} \quad (1.1.22)$$

和

$$\phi = -\nabla \cdot \vec{\Pi} \quad (1.1.23)$$

由 (1.1.22) 和 (1.1.23) 表示的 \vec{A} 和 ϕ 值代到表示 \vec{E} 的 (1.1.7) 中去, 我们得:

$$\vec{E} = \nabla\nabla \cdot \vec{\Pi} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} \quad (1.1.24)$$

或

$$\vec{E} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi} + \nabla^2\vec{\Pi} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} \quad (1.1.25)$$

如果假定

$$\nabla^2\vec{\Pi} = \mu\sigma\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} \quad (1.1.26)$$

我们应当有:

$$\vec{E} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi} \quad (1.1.27)$$

另外把 (1.1.22) 表示的 \vec{A} 代入到 (1.1.14) 中去有

$$\vec{B} = \nabla \times \left(\mu\sigma\vec{\Pi} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t} \right)$$

因此

$$\vec{B} = \frac{k^2}{j\omega}\nabla \times \vec{\Pi} \quad \text{或} \quad \vec{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\nabla \times \vec{\Pi} \quad (1.1.28)$$

很明显, 有了赫芝矢量波动方程 (1.1.26) 的解, 便可能通过 (1.1.27) 和 (1.1.28) 确定电磁场。

对于谐变场, 方程组 (1.1.1) 可以简化。我们假定场以角频率 $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ 变化着, 式中 f 为频率, 用 Hz 表示; T 为周期, 用 s 表示, 则电场和磁场强度将按谐变规律变化, 即

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}; \quad (1.1.29)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{j\omega t}; \quad (1.1.30)$$

式中 $\vec{E}_0 = |E|e^{j\varphi_E}$, $\vec{H}_0 = |H|e^{j\varphi_H}$ 为复振幅, 其模数等于被测信号的幅度, 而幅角等于初相位 φ_E 和 φ_H 。对上式 (1.1.29) 和 (1.1.30) 微分后有

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = j\omega\vec{E}_0 e^{j\omega t};$$

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = j\omega\vec{H}_0 e^{j\omega t};$$

或写成

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = j\omega\vec{E} \quad (1.1.31)$$

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = j\omega\vec{H} \quad (1.1.32)$$

因此,很明显,把 \vec{E} 或 \vec{H} 对 t 取导数,相当于把 \vec{E} 或 \vec{H} 乘以 $j\omega$ 。
我们把(1.1.31)和(1.1.32)代到(1.1.3)后,便可得到:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= j\omega\epsilon' \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.33)$$

式中 ϵ' 叫做复介电系数, $\epsilon' = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}$, 当 $\sigma \rightarrow 0$ 时, ϵ' 变为实部, 即 $\epsilon' = \epsilon$ 。应当记住, 方程组(1.1.33)中矢量 \vec{E} 和 \vec{H} 是复振幅。

因此,对于谐变场的情况,上述波动方程式(1.1.14)、(1.1.15)、(1.1.18)和(1.1.20)可写为:

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0 \quad (1.1.34)$$

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (1.1.35)$$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (1.1.36)$$

$$\nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0 \quad (1.1.37)$$

式中 k 是介质的波数,

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon' = \omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma \quad (1.1.38)$$

应当指出,波数反映介质参数与场的频率变化的关系,波数并反映了场的基本特征。波数是一个复数。在一般情况下波数可写成代数形式

$$k = \alpha - j\beta \quad (1.1.39)$$

α 和 β 是复波数的实部和虚部,它们可由下列方程求出:

$$k^2 = \alpha^2 - \beta^2 - j2\alpha\beta = \omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma$$

由此可得

$$\text{Re} k^2 = \alpha^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\text{Im} k^2 = 2\alpha\beta = \omega \mu \sigma$$

解上述方程式可得:

$$\alpha = \left\{ \frac{\omega \mu \epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.40)$$

$$\beta = \left\{ \frac{\omega \mu \epsilon}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.41)$$

波数的实部 α 称为相位常数,虚部 β 称为衰减常数。

在导电介质中通过低频电流时,由于电磁能主要转变为热能,则损耗最大,对于10kHz数量级的频率(相当于甚低频的情况),在大多数岩石中传导电流起主要作用,位移电流的数值很小。对于这种场可写成在 $\omega \rightarrow 0$ 和 $\sigma \rightarrow \infty$ (即理想导电情况)时,(1.1.38)式中第一项可忽略,则

$$k^2 \approx -j\omega \mu \sigma,$$

$$k = (-j\omega\mu\sigma)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.42)$$

$$\alpha = \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \beta = \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.43)$$

假定 $\omega = 2\pi/T$, $\sigma = 1/\rho$, $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$, 可以把公式 (1.1.42) 写成

$$k = \sqrt{-j} \sqrt{\frac{2\pi \times 4\pi \times 10^{-7}}{T\rho}} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{10^7 T\rho}} \sqrt{-j}$$

众所周知,

$$\pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} \pm j \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{-j} = (-j)^{\frac{1}{2}} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-j)$$

因此

$$k = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{10^7 T\rho}} e^{-j\pi/4}; \quad |k| = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{10^7 T\rho}} \quad (1.1.44)$$

或

$$k = \alpha - j\beta = \frac{2\pi}{\sqrt{10^7 T\rho}} (1-j) \quad (1.1.45)$$

式中

$$\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{10^7 T\rho}}; \quad \beta = \frac{2\pi}{\sqrt{10^7 T\rho}} \quad (1.1.46)$$

§ 1.2 无限介质中的平面波^[1]

这一节我们讨论均匀介质中传播的平面电磁波问题, 以它作为解赫姆霍兹方程的例子。

相位面近似为平面的这种电磁场叫做平面场, 换句话说, 这是一种具有平面波前的波。例如, 远源一次场 (甚低频电台通常可看作这种场) 在局限范围内可视为平面波。

均匀场和非均匀场是有区别的。均匀场表示在相位面范围内是幅度恒定的场。在非均匀场中, 等幅面和等相位面是不一致的。具有固定频率的谐变场叫做单色波。假定在电阻率为 ρ_1 的均匀各向同性介质中, 传播平面均匀的单色波, 需要求出介质中任何一点的电场和磁场的分量。我们选择 x 、 y 、 z 直角坐标系, 使 x 和 y 轴位于极化面内, 而 z 轴沿着波的传播方向。假定场源是远方的电偶极子, 其波数用 k_1 表示, 则可由 §1.1 节写出根据矢量位求场分量的基本方程如下

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -k_1^2 A; \quad (1.2.1)$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}; \quad (1.2.2)$$

$$\vec{E} = j\omega\mu \left(\vec{A} - \frac{1}{k_1^2} \nabla \nabla \cdot \vec{A} \right) \quad (1.2.3)$$

由于均匀场中在 xoy 平面内矢量位的幅度不变 ($\partial A/\partial x = 0, \partial A/\partial y = 0$)，则赫姆霍兹方程 (1.2.1) 可以简化为

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k_1^2 A = 0 \quad (1.2.4)$$

散度公式也可以化简:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.2.5)$$

因此，对于矢量位的分量 A_x 、 A_y 和 A_z 的二阶齐次微分方程和相应的通解分别为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + k_1^2 A_x &= 0; & A_x &= C_{1x}e^{-jk_1z} + C_{2x}e^{jk_1z} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + k_1^2 A_y &= 0; & A_y &= C_{1y}e^{-jk_1z} + C_{2y}e^{jk_1z} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k_1^2 A_z &= 0; & A_z &= C_{1z}e^{-jk_1z} + C_{2z}e^{jk_1z} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.6)$$

式中 C 为常数，它与坐标无关。(1.2.6)式由两个指数函数的线性组合构成，其中一个指数函数沿 z 轴衰减，而另一个则增加。显然，第一个表征直达波，其幅度随着离开场源的距离而衰减，第二个则相反，它是反射波。由于在无限介质中不可能有反射波，因而可假定 $C_{2x} = C_{2y} = C_{2z} = 0$ 。则最后结果可写为:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= C_x e^{-jk_1z} \\ A_y &= C_y e^{-jk_1z} \\ A_z &= C_z e^{-jk_1z} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.7)$$

现在利用公式 (1.2.2)、(1.2.3)、(1.2.5) 和 (1.2.7) 可求出场的各分量 H_x 、 H_y 、 H_z 、 E_x 、 E_y 和 E_z 。应用 (1.2.2) 式可得:

$$H_x = (\nabla \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial A_y}{\partial z} = C_y k_1 e^{-jk_1z} \quad (1.2.8)$$

$$H_y = (\nabla \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial z} = -C_x k_1 e^{-jk_1z} \quad (1.2.9)$$

$$H_z = (\nabla \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

$$E_x = j\omega\mu \left(A_z - \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = j\omega\mu A_z = j\omega\mu C_z e^{-jk_1z} \quad (1.2.10)$$

$$E_y = j\omega\mu \left(A_y - \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = j\omega\mu A_y = j\omega\mu C_y e^{-jk_1z} \quad (1.2.11)$$

$$E_z = j\omega\mu \left(A_z - \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) = 0$$

由公式 (1.2.8) — (1.2.11) 可见，场的各分量具有复振幅，它们取决于常数 C_x 、 C_y 和波数 k_1 ，并沿 z 轴正方向按指数衰减。因为在平面场中场的矢量垂直于波的运动方

向, 所以场的分量 H_z 和 E_z 当然等于零。

为了得到全矢量, 需要把复振幅乘以时间因子 $e^{-j\omega t}$ 。我们以电场的全矢量 \vec{E}_x 作为例子进行讨论。

$$\vec{E}_x = E_x e^{-j\omega t} = j\omega\mu C_x e^{-jk_1 z} e^{-j\omega t} = \omega\mu C_x e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j(\alpha - j\beta)z} e^{-j\omega t}$$

因此

$$\vec{E}_x = \omega\mu C_x e^{-\beta z} e^{-j(\omega t + \alpha z - \frac{\pi}{2})}$$

式中振幅是

$$|E_x| = \omega\mu C_x e^{-\beta z} \quad (1.2.12)$$

而全相位为

$$\varphi(t) = \omega t + \alpha z - \frac{\pi}{2} \quad (1.2.13)$$

现在用上式来确定相位速度和波长。假定平面波前在时间 Δt 内位移距离 Δz , 则

$$\varphi(t + \Delta t) = \omega(t + \Delta t) + \alpha(z + \Delta z) - \frac{\pi}{2}$$

考虑到相位是相同的, 我们可写出等式

$$\omega t + \alpha z - \frac{\pi}{2} = \omega t + \omega \Delta t + \alpha z + \alpha \Delta z - \frac{\pi}{2}$$

或

$$\alpha \Delta z = -\omega \Delta t$$

由此可求出波前的相位移动速度或相位速度 (m/s)

$$V = \Delta z / \Delta t = -\omega / \alpha$$

将由公式 (1.1.40) 和 (1.1.46) 确定的 α 值代入上式后, 我们得到两种相位速度: 在一般情况下,

$$V = \left\{ \frac{\epsilon\mu}{2} \left[1 + \sqrt{(\omega\epsilon\rho)^{-2} + 1} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (1.2.14)$$

在导电介质中对于似稳场,

$$V = \frac{\sqrt{10^7 T \rho}}{T} = \sqrt{10^7 f \rho} \quad (1.2.15)$$

波长 (以米为单位) 由下式求出:

$$\lambda = VT = -2\pi / \alpha$$

因此, 对于上述情况我们得到:

$$\lambda = 2\pi \left\{ \frac{\omega^2 \epsilon\mu}{2} \left[1 + \sqrt{(\omega\epsilon\rho)^{-2} + 1} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (1.2.16)$$

$$\lambda = \sqrt{10^7 T \rho} \quad (1.2.17)$$

公式(1.2.17)可以确定波数与波长的关系。我们利用波数公式(1.1.44)、(1.1.45)和(1.1.46), 并考虑公式(1.2.17), 则可把这些公式写成:

$$k = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\lambda} e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad |k| = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\lambda} \quad (1.2.18)$$

或

$$k = \alpha - j\beta = -\frac{2\pi}{\lambda}(1-j) \quad (1.2.19)$$

式中

$$\alpha = \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.2.20)$$

α 、 β 和 k 用 m^{-1} 表示。

由此可见，波数的模数等于 $2\pi/\lambda$ 长度中波的数量。

为了消去公式(1.2.8) — (1.2.11)中的未知系数 C_x 和 C_y ，我们取复振幅比：

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} = -j \frac{\omega\mu}{k_1}, \quad Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x} = j \frac{\omega\mu}{k_1} \quad (1.2.23)$$

Z_{xy} 和 Z_{yx} 叫做波阻抗。阻抗用 Ω 来度量，它是传播平面波的介质的复阻抗或复波阻抗。在极化面均匀的介质中，波阻抗 Z_{xy} 和 Z_{yx} 振幅相等，但相位相反。它们表现了介质的特性，并可用来确定介质参数。

现在来讨论根据波阻抗模数确定介质参数的问题，为此考虑到(1.1.42)可把 Z 改写成如下形式：

$$Z = \frac{-j\omega\mu}{\sqrt{\frac{-j\omega\mu}{\rho}}} = \sqrt{-j} \sqrt{\omega\mu\rho} = |Z| e^{j(\pi/4)}$$

其模为

$$|Z| = \sqrt{\omega\mu\rho}$$

故
$$\rho = \frac{1}{\omega\mu} |Z|^2 \quad (1.2.24)$$

如果已知介质的电阻率，则根据甚低频测量可以计算磁导率。

$$\mu = \frac{1}{\omega\rho} |Z|^2 \quad (1.2.25)$$

在非磁性介质中 ($\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$)，可据(1.2.24)式确定 ρ 值。

§ 1.3 水平二层介质的平面波阻抗

对于离观测点很远的甚低频电台所辐射出的电磁波可以认为是垂直入射的平面波。现在来讨论层状半空间正问题的解。

假如给定水平分界面层状的半空间，层厚 h ，电阻率为 ρ ，分界面的深度 z 。在该介质表面上入射均匀平面单色波并沿层理方向极化。需要求出电场 E 和磁场 H 并确定它们与介质参数的关系。

我们选择右手直角坐标系 x, y, z 。 z 轴方向与分界面垂直，即 z 轴沿波的传播方向，分界面的埋深用

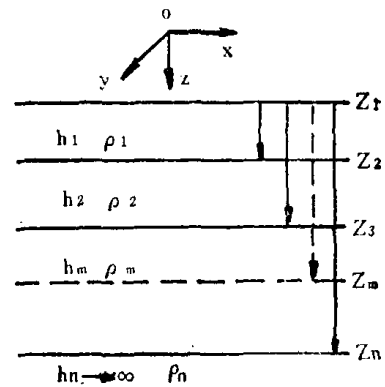


图 1.3.1 水平层状介质的平面场

z 表示。

对于任一层可写出下列基本方程式：

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= k^2 \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} - j\omega\mu \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.1)$$

在均匀平面波中，场强在每一等相面里与坐标无关，所以对沿 z 方向传播的电磁波，沿水平方向(x, y)的导数为零，即

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

在这一约束条件下，上述方程可写成：

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - j\omega\mu H_y = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = k_1^2 E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = k_1^2 E_y$$

考虑到相互垂直的两个场的分量，对于任一层，我们取

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= k_1^2 E_x \\ H_y &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

则上述方程的一般解为

$$E_x = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad (1.3.3)$$

$$H_y = -\frac{k}{j\omega\mu} (Ae^{kz} - Be^{-kz})$$

现在我们取电分量和磁分量的比

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{j\omega\mu}{k} \left(\frac{Ae^{kz} + Be^{-kz}}{Ae^{kz} - Be^{-kz}} \right) \quad (1.3.4)$$

对上式分子分母都用 \sqrt{AB} 除之，并以 $\sqrt{A/B} = \exp(\ln\sqrt{A/B})$ 代替之，则上式重写为

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{H_y} &= -j \frac{\omega\mu}{k} \frac{\exp(kz + \ln\sqrt{A/B}) + \exp(-kz - \ln\sqrt{A/B})}{\exp(kz + \ln\sqrt{A/B}) - \exp(-kz - \ln\sqrt{A/B})} \\ &= -j \frac{\omega\mu}{k} \operatorname{cth}(kz + \ln\sqrt{A/B}) \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

如果使用同一层中两个不同深度处的波阻抗，那么就能够消去系数 A 和 B 。为此我们计算同一层内深度 $z = z_1$ 的波阻抗：

$$Z_{(z_1)}^{(1)} = -j \frac{\omega\mu}{k} \operatorname{cth}(kz_1 + \ln\sqrt{A/B}) \quad (1.3.6)$$