职工高等工业专科学校试用教材

工程数学

张令松　主编

机械工业出版社

职工高等工业专科学校试用教材

工　程　数　学

主　编　　张令松

副主编　　陈如德　刘启贞　魏增岩

参　编　　魏火生　徐烈民　周爱华　余　英

主　审　　吴蓝芳

机　械　工　业　出　版　社

（京）新登字054号

本书是根据中国机械工程学会职工高等教育专业学会机械制造专业委员会1993年制定的“职工高等工业专科学校工程数学教学大纲”编写的。

全书分成两篇，第一篇是线性代数，内容包括行列式，矩阵，n维向量，线性方程组以及二次型和方阵的特征值。第二篇是复变函数，内容包括复数和复变函数，解析函数，复变函数的积分，级数，留数以及拉普拉斯变换。每章均配置有适当的习题，书末附有习题答案，可供高等职业技术学校、职工大学、业余大学各专业作教材使用。

工 程 数 学

主编 张令松

*

责任编辑：王世刚 版式设计：李松山

封面设计：姚 毅 责任校对：丁丽丽

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

邮政编码：100037

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

北京市通县永乐印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 11·字数 275千字

1994年9月北京第1版·1994年9月北京第1次印刷

印数 00 001—3800 定价：9.40元

*

ISBN 7-111-04256-5/O.96(G)

序　言

随着机电一体化技术与产品在世界范围内的兴起与发展，教育必须紧紧跟上形势及经济发展的需要。1990 年 4 月我会受原机械电子工业部教育司委托，组织了全国部分成人高等学校的专家、教授在天津编写了“机电一体化”等专业指导性教学文件。对本专业的研究与发展起了一定的推动和示范作用。编写组的这项工作获得 1991 年全国学会工作成果奖。

1992 年我会机械制造专业委员会桂林年会发起编写“机电一体化”成套教材，以解决本专业当前教学急需。经过一年多的工作；重新编写了“机电一体化”专业教学计划（分为应用型和技艺型两类）及各科教学大纲，并在部分职工高校试用。在此同时，着手组织编写教材及出版工作。鉴于这套教材涉及几个专业委员会的教学研究领域，为保证编写质量，加快出版进程以及工作上的方便，自 1993 年 5 月济南会议起，由学会秘书处统一组织工作，并委托我会学术委员会具体负责本次编辑出版的协调和实施工作。

这套教材以我会学术委员会、机械制造专业委员会、工程材料专业委员会、技术基础课委员会、基础学科委员会为主，集中我会全国学术骨干力量，在三年内分两批出齐。第一批共计出版：1. 工程材料与金属工艺学；2. 金属切削机床与数控机床；3. 伺服系统与机床电气控制；4. 机械制造工艺与机术夹具；5. 计算机绘图；6. 微机与可编程控制器；7. 数控原理与编程；8. 电子技术；9. 8098 单片机原理与应用；10. 高等数学；11. 工程数学；12. 工程力学等十二种教材。其余教材将于第二批进行出版，以供全国职工高校试用。

中国机械工程学会
职工高等教育专业学会
1994 年元月

前 言

本书是根据中国机械工程学会职工高等教育专业委员会机械制造专业委员会1993年机电一体化年会精神和所确定的教学大纲编写而成的,它是机电一体化专业教材之一,可作为高等职业技术学校和职工大学、业余大学相应专业的工程数学教材,也可供其他专业选用。

在编写过程中,根据国家教委"基础理论教育以应用为目的,以必需、够用为度,以掌握概念,强化应用为教育重点"的原则精选内容,叙述力求通俗易懂,便于自学,书中还配有较多的习题,并附以答案。全书共分两篇,第一篇 为线性代数,第二篇为复变函数(含拉普拉斯变换)。书中有"*"号的章节各校可根据具体情况进行选择。

本书由上海第二工业大学张令松主编,上海第二工业大学陈如德,贵州机械职工大学刘启贞,济南机械职工大学魏增岩任副主编:

编写分工如下:周爱华编写第一篇的第一章、第四章,魏火生编写第一篇的第二、三章,陈如德编写第一篇的第五章,魏增岩编写第二篇的第一章、第二章,徐烈民编写第二篇的第三、四章,余英编写第二篇的第五章,张令松编写第二篇的第六章,刘启贞编写第二篇的第七章。第一篇由陈如德统稿,第二篇由张令松统稿,全书由张令松统稿、定稿。

全书由上海第二工业大学吴蓝芳副教授主审,对于她所提出的宝贵意见,我们表示衷心的感谢。

由于我们的水平有限,错误和不妥在所难免,诚请使用本教材的广大师生和其他读者提出批评和指正。

编者

1994.4.

目　录

第一篇　线性代数

第一章　行　列　式

初等数学里，讨论过二、三阶行列式，并利用它们来解二、三元线性方程组。本章介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法以及用 n 阶行列式解 n 元线性方程组。

第一节　n 阶行列式

一、全排列及逆序数

为了引入逆序数的概念，先看下面的例子。

例 1-1-1　用 1、2、3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解　这个问题相当于说，把三个数字分别放在百位、十位与个位上，有几种不同的放法？

显然，百位上可以放 1、2、3 三个数字中的任意一个，所以有 3 种放法。由于数字不能重复，所以十位上只有两种放法，个位上只有一种放法。因此，共有 $3\times2\times1=3!$ 种放法。

这 6 个不同的三位数是 1 2 3、1 3 2 、2 1 3 、2 3 1、3 1 2、3 2 1 。

数学上，通常将研究的对象称为元素，从而上面的问题就是将三个不同的元素排成一列，共有多少种不同的排法？对于 n 个不同的元素，同样可以提出类似的问题：n 个不同的元素排成一列，共有多少种不同的排法？

把 n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列（简称排列）。所有全排列的种数用 P_n 表示。将例 1-1-1 的结果推广到 n 个元素，可以得到 $P_n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$。

定义 1-1-1　n 个不同数的任一排列中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面（$i_s<i_t$），则 i_s 与 i_t 称为构成一个逆序，一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数。

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列。

下面我们讨论排列的逆序数的计算方法。

排列 $1\ 2\ 3\cdots n$ 的逆序数是零，是偶排列。设 $P_1P_2\cdots P_n$ 为 n 个自然数的一个排列，考虑 $P_i(i=1,2,\cdots n)$，如果比 P_i 大的且排在 P_i 前面的元素有 t_i 个，显然 P_i 这个元素的逆序数是 t_i，则全体元素的逆序数之总和。

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

是这个排列的逆序数。

例 1-1-2　求排列 2 3 1 5 4 与 2 5 1 3 4 的逆序数。

解　在排列 2 3 1 5 4 中，2 的前面没有元素，逆序数为 0；3 的前面没有比 3 大的数，逆序数为 0；1 的前面有两个数比它大，逆序数是 2；5 的前面没有比 5 大的数，逆序数为 0；4 的前面比 4 大的数只

有一个，逆序数为 1。所以这个排列的逆序数

$$t = 0 + 0 + 2 + 0 + 1 = 3$$

在排列 2 5 1 3 4 中，2 的前面没有元素，逆序数是 0；5 的前面没有比 5 大的数，逆序数是 0；1 的前面有两个比它大的数，逆序数是 2；3 的前面有一个数比它大，逆序数是 1；4 的前面有一个数比它大，逆序数是 1。所以该排列的逆序数

$$t = 0 + 0 + 2 + 1 + 1 = 4$$

通过观察可以发现，排列 2 5 1 3 4 是由排列 2 3 1 5 4 经过对调 3、5 两个元素得到的，它们的奇偶性发生了改变。

一般，在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种产生新排列的过程称为对换。

定理 1-1-1　一个排列中，将任意的两个元素对换，则改变排列的奇偶性.

证明　先证相邻两个元素对换的情形。

设有排列 $a_1a_2\cdots a_l\ a\ b\ b_1\ b_2\cdots b_m$，对换相邻元素 a 与 b，则排列变为 $a_1\ a_2\cdots a_l\ b\ a\ b_1\ b_2\cdots b_m$。显然，$a_1,\cdots a_l;b_1,\cdots b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a,b 两个元素的逆序数发生变化：当 $a<b$ 时，经过对换后 a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经过对换后 a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1，所以排列 $a_1a_2\cdots a_l\ a\ b\ b_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l\ b\ a\ b_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同。

再证一般对换的情形。

设排列为 $a_1a_2\cdots a_l\ a\ b_1b_2\cdots b_m\ b\ c_1\ c_2\cdots\ c_n$，对它作 m 次相邻对换，调成 $a_1a_2\cdots a_l\ a\ b\ b_1b_2\cdots b_mc_1c_2\cdots c_n$，再对它作 $m+1$ 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_l\ b\ b_1\cdots b_m\ a\ c_1\cdots c_n$，这样，经过 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1a_2\cdots a_l\ a\ b_1\cdots b_m\ b\ c_1\cdots c_n$ 调成 $a_1\cdots a_l\ b\ b_1\cdots b_m\ a\ c_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性不同。

总之，经过两个元素的对换，就要改变排列的奇偶性。

二、二、三阶行列式

代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式，用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

例如：

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\times 2-(-1)\times 3 = 13$$

代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ 称为三阶行列式，用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

上式可借助于图 1-1-1 记忆，将三阶行列式的元素不变其次序，横排接连抄两遍，则图中三条实线上的三个元素乘积是三阶行列式的代数和中的正项，三条虚线上三个元素乘积是三阶行列式的代数和中的负项。

三、n 阶行列式的定义

为了作出 n 阶行列式的定义，我们先研究三阶行列式的结构。观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

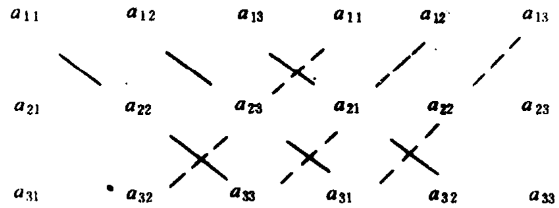

图 1-1-1

上式左端的横排称为行，纵排称为列。位于行列中的元素，比如 a_{23} 它的第一个下标"2"，表示它所在的行数，第二个下标"3"，表示它所在的列数，所以 a_{23} 表示三阶行列式中，位于第二行，第三列的元素，其余类同。

容易看出：① 上式右边的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列。因此上式右端的每一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，这里第一个下标（称为行标）排成自然数顺序 1 2 3，第二个下标（称为列标）排成 $p_1p_2p_3$，它是 1、2、3 三个数的任意一个排列，共有 $3! = 6$ 项。② 各项的正负号与列标排列的逆序数有关。这里带正号的三项列标排列是 1 2 3、2 3 1、3 1 2 都是偶排列；带负号的三项列标排列是 1 3 2、2 1 3、3 2 1 都是奇排列。因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$，t 是列标排列的逆序数。由 ①、② 可知，3^2 个元素组成的三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

式中，t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数；$\sum$ 是对 1、2、3 这三个数的所有排列数求和。

根据这个规律，可给出 n 阶行列式的定义如下。

定义 1-1-2 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$，将它们排成 n 个横排，n 个纵排的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

其中横排称为行，纵排称为列。作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数。显然可能作出的这样的项共有 $n!$ 个，所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum_{n!} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_2}$$

称为 n 阶行列式，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记为 $D=|a_{ij}|$,数 a_{ij} 称为行列式 D 的元素,它的第一个下标 i 表示这个元素所在的行数,即第 i 行;第二个下标 j 表示它所在的列数,即第 j 列。所以 a_{ij} 表示行列式 D 中位于第 i 行,第 j 列的元素。

在上面行列式的定义中,任意项为

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$

其中行标是自然排列 $1\ 2\cdots i\cdots j\cdots n$,其逆序数为零。$t$ 是列标排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数,因而 t 也是行标与列标排列逆序数之和。对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 后成

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

显然,这时它的绝对值不变。现在考察其符号。由于两个元素对换,相当于将行标与列标排列同时作了一次相应的对换,根椐对换后的排列要改变奇偶性,所以

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

其中,s 是行标排列与列标排列的逆序数之和。经过一次元素对换是这样,经过若干次元素对换也是这样。于是,经过若干次元素对换后,可使列标排列变成自然排列,从而任意项可写成如下形式

$$(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$$

式中,s 是行标排列的逆序数。

所以 n 阶行列式定义也可以表示为

$$D=\sum_{n!}(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$$

式中,s 为行标排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数。

例 1-1-3 证明下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

解 根据定义,行列式的任意项为

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

因行列式的第一行元素除 a_{11} 外全为 0,所以只要考虑 $p_1=1$ 的这一项。在第二行中,除去 a_{21},a_{22} 以外,其余元素全为 0,因而 p_2 只有取 1,2 两种可能性,然而 $p_1=1$,所以 p_2 就不能再取 1 了,只有取 $p_2=2$。这样逐步地取下去,不难看出:展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为 0,其余各项全为 0,而这一项的列标所成排列为偶排列,所以它应取正号,故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理有上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这里未写出的元素均为零，下同，以后不再指出。

对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

第二节　行列式的性质及按行(列)展开

一、行列式性质

用定义直接计算 n 阶行列式的值，必须计算 $n!$ 项 n 个元素乘积的代数和，其计算量是相当大的，并且随着 n 的增大将迅速递增。例如，$4! = 24$，$10! = 3\,628\,800$。所以计算一个 10 阶行列式，须计算 3 628 800 项，而且每一项都是 10 个数的乘积，这要花费很多时间才能算出结果。为此需研究行列式的性质，并用行列式的性质来简化行列式的计算。

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D^T，即

若 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 则 $$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质一　行列式的值与它的转置行列式的值相等。即

$$D = D^T$$

证明　记 $D = |a_{ij}|$ 的转置行列式

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $$b_{ij} = a_{ji} (i,j = 1,2,3,\cdots,n)$$

按定义 $$D^T = \sum (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n}$$
$$= \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

由定义可知 $$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

故 $$D = D^T$$

由此性质可知，对行列式的行成立的性质，对列也同样成立。

性质二　交换行列式的两行(列)，行列式的值改变符号。

证明　设行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D = |a_{ij}|$ 交换 i 行与 j 行而得到。即当 $k \neq i, j$ 时，$b_{kp} = a_{kp}$；当 $k = i, j$ 时，$b_{ip} = a_{jp}$，b_{jp}

$= a_{ip}$。

于是，$D_1 = \sum (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n}$

$$= \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n}$$

式中，$1,2\cdots i\cdots j\cdots n$ 是自然排列；t 是 $p_1 p_2 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数。设排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则

$$(-1)^t = -(-1)^{t_1}，故$$

$$D_1 = -\sum (-1)^{t_1} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D$$

推论　如果行列式中有两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零。

证明　把元素相同的两行互换，由性质二得 $D = -D$，故 $D = 0$。

性质三　行列式的某一行(列)的所有元素同乘以数 k，等于用数 k 乘此行列式。

推论一　如果行列式中某行(列)的所有元素有公因子，则此公因子可以提到行列式外面。

推论二　如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式的值等于零。

性质四　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} + b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} + b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} + a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2i} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ni} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

以上性质三，四由行列式定义不难证得，请读者自证之。

性质五　把行列式的某一列(行)的所有元素同乘以数 k 后加到另一列(行)的对应元素上，则行列式的值不变。例如第 j 列乘数 k 后加到第 i 列上，就有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} + ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　由行列式性质四和性质三的推论二知，

$$右端 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = 左端$$

利用行列式的上述性质计算行列式，可以使计算简化，现举例如下。

例 1-1-4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

之值。

解 为了解题过程叙述方便，现作如下规定：

① $k(i)$表示第i行(列)乘数k。② $(i)+k(j)$表示第j行(列)乘数k后加到第i行(列)。③ $((ij))$表示第i行(列)与第j行(列)互换。上述记号凡写在等号上方表示对行应用行列式的有关性质，写在等号下方表示对列应用行列式有关性质，这样我们有

$$D\xlongequal{(①②)}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[]{\substack{③+①\\④+(-2)①}}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{③+②\\④+3②}}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal{④+(-1)③}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4$$

例 1-1-5 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

之值。

解 这个行列式的特点是各列 4 个数之和都是 6，现在把第 2,3,4 行同时加到第一行上后，并提出公因子 6，就有

$$D\xlongequal{\substack{①+②\\①+③\\①+④}}\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}\xlongequal{\frac{1}{6}①}6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{②+(-1)①\\③+(-1)①\\④+(-1)①}}6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=48$$

例 1-1-6 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & x+4 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & x & 1 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

解　因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & x+4 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & x & 1 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[③+④]{②+(-2)①} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+5 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{①+(-3)④ \\ ②+2④ \\ ③+5④}]{} \begin{vmatrix} -5 & 8 & 13 & 2 \\ 0 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5(x-4)(x+5)$$

原方程即为　$5(x-4)(x+5)=0$，由此可得原方程的解为：

$$x_1 = 4,\quad x_2 = -5$$

二、行列式按行(列)展开

三阶以上的行列式的计算是比较复杂的，利用上面介绍的行列式的性质，就可简化行列式的计算。而且从前面的计算已可看到，计算低阶行列式比计算高阶行列式容易，因此，我们需要用低阶行列式来表示高阶行列式。为此先引进余子式和代数余子式的概念。

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，剩下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，而 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如　四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23}$$

定理 1-1-2　行列式之值等于它的任意一行(列)的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和。

即
$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}\quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

这个定理称为行列式按行(列)的展开定理，由于证明过程较繁，这里不予证明。利用这一定理并结合行列式的性质，可以简化行列式的计算。

例如　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&0\\5&1&3&-1\\2&0&0&1\\0&-5&3&1\end{vmatrix}$$

之值。

若将行列式按第三行展开，有

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&3&-1\\-5&3&1\end{vmatrix}=2\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}3&-1&0\\5&3&-1\\0&3&1\end{vmatrix}=-23$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}3&1&0\\5&1&-1\\0&-5&1\end{vmatrix}=-17\qquad A_{34}=-\begin{vmatrix}3&1&-1\\5&1&3\\0&-5&3\end{vmatrix}=-64$$

所以 $D=2\times2+0\times(-23)+0\times(-17)+1\times(-64)=-60$

由上面的计算可以看出，利用行列式的展开定理计算行列式时，可以选零元素最多的行或列展开，因为零与任何数相乘都等于零，这样，零元素的代数余子式可以不用计算，节省了计算量。另外，在计算行列式时，若行列式中无零元素，我们可以利用行列式的性质，先把行列式的某一行或某一列中的大部分元素化成零，然后再利用展开定理，就会使计算变得简单。

例 1-1-7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

之值。

解 我们保留 a_{33}，把第三行其余元素变为 0，然后按第三行展开，则

$$D\xlongequal[\text{④}+\text{②}]{\text{①}+(-2)\text{②}}\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}=1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{②}+\text{①}}\begin{vmatrix}5&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{②}+(-1)\text{①}]{}\begin{vmatrix}-6&8\\-5&0\end{vmatrix}=40$$

例 1-1-8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&a&b&a\\a&0&a&b\\b&a&1&a\\a&b&a&0\end{vmatrix}$$

之值。

解 为了按第一列展开，有

$$D \xlongequal[\text{②}+(-1)\text{④}]{\text{①}+(-1)\text{③}} \begin{vmatrix} 1-b & 0 & b & a \\ 0 & -b & a & b \\ b-1 & 0 & 1 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{③}+\text{①}]{\text{④}+\text{②}} \begin{vmatrix} 1-b & 0 & b & a \\ 0 & -b & a & b \\ 0 & 0 & b+1 & 2a \\ 0 & 0 & 2a & b \end{vmatrix}$$

$$= (1-b)\begin{vmatrix} -b & a & b \\ 0 & b+1 & 2a \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = -b(1-b)\begin{vmatrix} b+1 & 2a \\ 2a & b \end{vmatrix} = b(b-1)(b^2+b-4a^2)$$

由定理 1-1-2,可得下述重要推论:

推论　行列式中任意一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零。即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j)$$

证明　设 $i<j$,作辅助行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

因为行列式 D_1 中第 i 行与第 j 行元素相同,因此 $D_1=0$,把 D_1 按第 j 行展开有

$$D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}\quad(i<j)$$

故

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j)$$

同理

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j)$$

综合定理 1-1-2　及推论得到下列有关代数余子式的重要性质

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ D & (i=j)\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ D & (i=j)\end{cases}$$

第三节　克莱姆(Cramer)法则

一、克莱姆法则

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程组成的线性方程组,其一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-1-1}$$

由它的系数 a_{ij} 组成的 n 阶行列式