JING JI XUE
SHI FEN XI LI LUN

经济学实分析理论

郎国放　编著

济南出版社

内容简介

本书主要介绍了用于经济学研究的现代数学工具——实分析理论，内容包括凸集分离定理、锥理论和不动点定理等。同时，介绍了一般经济均衡理论、经济核和福利经济定理等。

本书可作为经济类研究生教材以及经济和数学专业高年级本科生的选修课教材，也可供一般的经济工作者和数学工作者参考。

经济学实分析理论 郎国放 编著

责任编辑：丁少伦 封面设计：孙卫华
济南出版社出版发行
（济南市经七路 251 号） 济南新华印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32 1997 年 6 月第 1 版
印张：9.75 1997 年 6 月第 1 次印刷
字数：225 千字 印数 1—1000 册

ISBN7—80629—128—8/F・13 定价：17.50 元

（如有倒页、缺页、白页，直接与印刷厂调换）

目　　录

第一章　集　合

§1　集　合

集合是现代数学中的一个重要的基本概念．但要把这个概念加以严格的规定并不是一件容易的事情．我们这里只给出如下朴素的说法：

一定范围内的所有个体事物，当把它们看作一个整体时，这个整体称为一个集合，而其中的每一个个体事物称为这个集合的元素．一个集合的各个元素必须是彼此相异，哪些个体事物是给定集合的元素必须是确定无疑的．

以下是关于集合的一些基本概念．

用大写字母 A、B、C 等表示集合，用小写字母 a、b、c 等表示集合的元素．a 是集合 A 的元素记作：

$$a \in A$$

读作"a 属于 A"．a 不是集合 A 的元素记作：

$$a \notin A$$

如果集合 A 是具有性质 P 的个体事物的全体，我们也可用下面形式表示 A：

$$A=\{x \mid x\ \text{具有性质}\ P\}$$

如果能明确写出集合 A 的所有元素，也可以把所有元素列举在大括号里来表示 A．

不含任何元素的集称为空集，记作 ϕ．

空集 ϕ 以及具有有限个元素的集合统称为有限集.

只有一个元素的有限集称为单元素集.

不是有限集合的集合统称为无限集.

若属于集合 A 的元素都属于集合 B,则称 A 是 B 的子集,记作:

$$A \subset B$$

读作"A 包含于 B". 或记作:

$$B \supset A$$

读作"B 包含 A".

若 $A \subset B$,而 B 中确有元素不属于 A,则称 A 是 B 的真子集.

若 $A \subset B$ 并且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记作:

$$A = B$$

我们规定,空集 ϕ 是任何集的子集.

例 1.1 集合例子

(1)自然数全体(称为自然数集).

(2)实数全体(称为实数集).

(3)$A=\{1,2,3\}$

(4)汉语拼音字母全体.

(1)和(2)是无限集,(3)和(4)是有限集,(1)是(2)的真子集.

命题 1.1 对任何集合 A、B、C,均有

(i)$A \subset A$;(反射性)

(ii)若 $A \subset B$,$B \subset A$,则 $A=B$;

(iii)若 $A \subset B$,$B \subset C$,则 $A \subset C$.(传递性)

从给定的一些集出发,通过所谓集合的运算可以作出新的集,最常用的集合运算有"并"、"交"和"差"三种.

定义 1.1 设 A 和 B 是两个集，A 中的所有元素与 B 中的所有元素合起来所组成的集合称为 A 和 B 的并集或 A 与 B 的并，记作 $A\cup B$

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

同时属于 A 与 B 的所有元素所组成的集称为 A 与 B 的交集或 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 并且 } x\in B\}$$

当 $A\cap B\neq\phi$ 时称 A 与 B 相交；当 $A\cap B=\phi$ 时称 A 与 B 不相交．

定理 1.1

(i) $A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.　　(交换律)

(ii) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.　　(结合律)

(iii) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.（分配律）

(iv) $A\cup A=A$；$A\cap A=A$.　　(幂等律)

设 $\{A_i\mid i\in I\}$ 为某一族集（这里 I 是所有指标 i 构成的集合），记

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid \text{存在 } i_0\in I, \text{使 } x\in A_{i_0}\}$$

表示由各个 A_i 的元素的全体构成的新集合，称为它们的并集．

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\mid \text{对任 } i\in I, \text{都有 } x\in A_i\}$$

表示由所有 A_i 的公共元素所组成的集合，称为它们的交集．

定理 1.2 设 E 是一个集合，$\{A_i\mid i\in I\}$ 是一族集，则有

(i) $E\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}(E\cap A_i)$；

(ii) $E\cap(\bigcap_{i\in I}A_i)=\bigcap_{i\in I}(E\cup A_i)$.

证明 (i) 对任意 $x\in E\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)$，有 $x\in E$，$x\in\bigcup_{i\in I}A_i$. 即存

在 $i_0\in I$，使得 $x\in A_{i_0}$. 从而 $x\in E\cap A_{i_0}\subset\bigcup\limits_{i\in I}(E\cap A_i)$. 因为 x 为任意的，所以

$$E\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)\subset\bigcup_{i\in I}(E\cap A_i)$$

另一方面，对任意 $x\in\bigcup(E\cap A_i)$，存在 $i_0\in I$ 使得 $x\in E\cap A_{i_0}$，即 $x\in A_{i_0}\subset\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ 从而有 $x\in E\cap(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)$. 因为 x 任意，所以

$$\bigcup_{i\in I}(E\cap A_i)\subset E\cup(\bigcup_{i\in I}A_i)$$

所以结论(i)成立.

(ii)略.

定义 1.2 设 A 和 B 是两个集，由属于 A 而不属于 B 的所有元素所组成的集称为集 A 减去集合 B 的差集，记作 $A\backslash B$，

$$A\backslash B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

当 $A\supset B$ 时，差集 $A\backslash B$ 称为 B 相对于 A 的余集或余，记作 $\mathscr{L}_A B$.

当我们讨论某方面问题时，往往所涉及的所有集都是某个取定的集合 X 的子集，这时称集 X 是基本集(或空间). 如果已明确 X 是基本集，集 A 对于 X 的余集简称为集 A 的余集，简单记作 $\mathscr{L}A$.

定理 1.3 设 X 是基本集，则

$(i)\mathscr{L}X=\phi,\mathscr{L}\phi=X$;

$(ii)\mathscr{L}(\mathscr{L}A)=A$;

(iii)当 $A\subset B$ 时，$\mathscr{L}A\supset\mathscr{L}B$.

定理 1.4 (*De Morgan* 公式)设 X 是基本集，则

$(i)\mathscr{L}(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)=\bigcap\limits_{i\in I}\mathscr{L}A_i$;

$(ii)\mathscr{L}(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)=\bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{L}A_i$.

证明 (i)略.

$(ii)x\in\mathscr{L}(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)\Rightarrow x\notin\bigcap\limits_{i\in I}A_i\Rightarrow$存在 $i_0\in I$ 使 $x\notin A_{i_0}\Rightarrow x\in$

$\mathscr{L}A_{i_0} \Rightarrow$ 存在 $x \in \bigcup_{i\in I} \mathscr{L}A_i$.

$x \in \bigcup_{i\in I} \mathscr{L}A_i \Rightarrow$ 存在 $i_0 \in I$，使 $x \in \mathscr{L}A_{i_0} \Rightarrow x \notin A_{i_0} \Rightarrow x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in \mathscr{L}(\bigcap_{i\in I} A_i)$

由以上两方面，(ii)获证．

§2 映 射

定义 2.1 设 A 和 B 是两个集合，A 非空集．若依照规则 f，对于 A 中每个元素 x，在 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 是 A 到 B 的映射，记作

$$f: A \to B \text{ 或者 } A \xrightarrow{f} B$$

而与 x 对应的元素 y 称为 x(在映射 f 下)的象，记作 $f(x)$．集合 A 称为映射 f 的定义域，集合

$$\{f(x) \mid x \in A\}$$

称为映射 f 的值域．若 E 是 A 的子集，则集合

$$\{f(x) \mid x \in E\}$$

称为 E(在映射 f 下)的象集，记作 $f(E)$．

定义 2.2 若映射 $f: A \to B$ 的值域 $f(A)=B$，则称 f 是满射的．若映射 $f: A \to B$ 对每个 $y \in f(A)$ 都有唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$，则称 f 是单射的．若映射 f 既是满射又是单射，则称 f 是(A 到 B 的)一一映射．

设 f 是 A 到 B 的一一映射，则对每个 $y \in B$ 有唯一 $x \in A$ 使 $f(x)=y$，定义 $g(y)=x$(当 $f(x)=y$ 时)，则 g 是 B 到 A 的一一映射，称 g 是 f 的逆映射，记作 f^{-1}.

设 f、g 分别是 F、G 到 B 的映射，若 $F \subset G$ 并且对每个 $x \in F$ 都有 $f(x)=g(x)$(即 g 在 F 上与 f 一致)，则称映射 g 是 f

在 G 上的一个扩张，而称 f 是 g 在 F 上的限制，记作 $f=g|_F$

例 2.1 (1) $f:[0,+\infty)\to R^1, f(x)=x^2$.

(2) $g:R^1\to R^1, g(x)=x^2$.

(3) $A=\{$全体方矩阵$\}, B=R^1$, $1.1:A\to B$

$1.1(x)=|x|$（行列式）.

(4) $A=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], B=[-1,1], f(x)=sinx:A\to B$

下面利用映射的概念讨论集合的对等关系.

对于有限集而言，集合之间的相互比较，或者判断两个集合所含元素是否一样多，这是一个比较简单的问题. 然而，对于无限集而言，按通常的意义来理解显然不合适. 我们将利用一一映射概念解决这个问题.

定义 2.3 设 A、B 是两个集，若存在 A 到 B 的某个一一映射，则称 A 与 B 对等，记作 $A\sim B$.

规定空集 ϕ 与空集 ϕ 对等.

首先应该注意，$A=B$ 与 $A\sim B$ 不是一回事，但是 $A=B\Rightarrow A\sim B$. 其次，对有限集而言，$A\sim B$ 相当于 A 与 B 所含元素个数相同

例 2.2 设 $N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}, N_e=\{2,4,\cdots 2n,\cdots\}$

则 $N\sim Ne$. 取 $f(n)=2n(n\in N)$，显然：$f:N\to Ne$ 为一一映射.

例 2.3 $R^1\sim(0,1)$

取 $f(x)=\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}: R^1\to(0,1)$ 为一一映射.

例 2.2 揭示了一个极其重要的事实：无限集有可能与它的真子集对等. 事实上，任何一个无限集必然与它的一个真子集对等（这里不予证明），换句话说，“部分”等于“全体”（但不会大于全体）. 这对于有限集来说，显然是不可能的.

命题 2.1 对等关系有如下性质

(i) $A\sim A$(反身性)；

(ii)若 $A\sim B$，则 $B\sim A$(对称性)；

(iii)若 $A\sim B, B\sim C$，则 $A\sim C$(传递性).

§3 可数集与不可数集

定义 3.1 与自然数集 $N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 对等的集合称为可数集(或可列集)

显然，一个集是可数集当且仅当它们的所有元素可以排列成一个无穷序列. 可数集当然是无限集. 然而，并不是一切无限集都是可列集. 例如，$[0,1]$中全体实数就不是可数集.

定理 3.1 $[0,1]$不是可数集.

证明 反证法. 设$[0,1]$可数，即存在一种排列：

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \qquad (*)$$

使$[0,1]$中每一实数都在上述排列中出现.

将$[0,1]$分为三等分区间$[0,\frac{1}{3}]$，$[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$和$[\frac{2}{3},1]$. 则三个中至少有一个不含 x_1，记为$[a_1,b_1]$. 再三等分$[a_1,b_1]$，同样，三者中至少有一个不含 x_2，记为$[a_2,b_2]$. ……. 依次可得区间套：

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

并且 $b_n-a_n=\frac{1}{3^n}\to 0(n\to\infty, x_n\notin[a_n,b_n])(n=1,2,\cdots)$. 由区间套定理可知，存在 $\xi\in[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$. 因为 $\xi\in[0,1]$，所以 ξ 应出现在$(*)$中. 但另一方面，$x_n\notin[a_n,b_n]$，所以 $\xi\neq x_n(n=1,2,\cdots)$. 即 ξ 不在$(*)$中出现. 矛盾. 所以$[0,1]$不可数.

定理 3.2 (1)有限个可数集之并是可数集.

(2)有限个或可数个可数集之交至多可数.

证明，(1)设 $E_1,E_2,\cdots,E_N$ 是可数集．

$$E=\bigcup_{i=1}^{N}E_i$$

$$\begin{array}{ll} E_1 & x_1^{(1)},x_2^{(2)},\cdots,x_n^{(1)},\cdots \\ E_2 & x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots,x_n^{(2)},\cdots \\ & \cdots\cdots \\ E_N & x_1^{(N)},x_2^{(N)},\cdots,x_n^{(N)},\cdots \end{array}$$

则 $E:x_1^{(1)},\cdots,x_1^{(N)},\cdots,x_N^{(1)},\cdots,x_n^{(N)},\cdots\cdots$

所以 E 可数．

(2)略

事实上，定理 3.2(1)对于可数个可数集之并也成立．

例 3.1 有理数集 Q 是可数集．

证明

$$Q=\bigcup_{i=1}^{\infty}(Q_i^+\cup Q_i^-)\cup\{0\}$$

其中
$$Q_i^+=\{\frac{1}{i},\frac{2}{i},\cdots,\frac{n}{i},\cdots\}$$

$$Q_i^-=\{-\frac{1}{i},-\frac{2}{i},\cdots,-\frac{n}{i},\cdots\}$$

均为可数集．所以有理数集可数．

习　题

1. 证明 § 1 定理 1.2.(2)
2. 证明 § 1 定理 1.4(1)
3. 证明

   1) $A\backslash B=\mathscr{L}B\backslash\mathscr{L}A$

   2) $(A\backslash B)\cup B=A\cup B$

   3) $(A\cup B)\backslash B=A\backslash B$

4)若 $A\supset B$，则 $C\setminus A\subset C\setminus B$

4. 试举几个一一映射的例子．

5. 证明$[0,1]\sim R^1$

6. 证明圆周与 R^1 对等．

第二章　欧氏空间 R^n

§1　实数及完备性

我们知道，实数由有理数和无理数组成．准确地说，循环小数加上一切形式的不循环小数就构成了全体实数．其中循环小数（包括有限小数）称为有理数，不循环小数称为无理数．我们用 R^1 记全体实数．

实数 R^1 具有完备性，我们通过下面的六个等价定理讨论这种完备性．

定理 1.1（区间套定理）　设

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

是 R^1 上一闭区间套，并且 $b_n-a_n\to 0(n\to\infty)$，则必存在唯一的实数 $\xi\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$.

定理 1.2（有限复盖定理）　设 D 是实数 R^1 上无限多个开区间构成的集合：$D=\{I_\lambda | I_\lambda\subset R^1$，开区间，$\lambda\in J\}$，$[a,b]\subset R^1$ 为闭区间．若对任何 $x\in[a,b]$，都有 D 中一个开区间 I_λ，使得 $x\in I_\lambda$（此时称$[a,b]$被开区间族 D 所复盖）．则存 D 中必有有限个开区间 I_i，$i=1,\cdots,n$，使得对任何 $x\in[a,b]$，存在 i_0，$(1\leqslant i_0\leqslant n)$，使得 $x\in I_{i_0}$（即$[a,b]$被有限个 $I_i(i=1,\cdots,n)$所复盖）.

定义 1.1　数列$\{x_n\}$的一个子数列，是指从数列$\{x_n\}$中去掉一些项（有限、无限项均可）后，由剩下的无穷多项按原来先后秩序排列所成的新数列，记为$\{x_{n_k}\}$．这里的 k 表示新的序号，n_k 表示

新数列的第 k 项在原数列中的序号.

由子数列的定义,易知下面两个命题成立.

(1)每个数列有无限多个子数列;

(2)数列 $\{x_n\}$ 有极限 $\Longleftrightarrow$ 每个子数列有相同极限.

定理 1.3 任何有界数列有收敛的子数列.

定义 1.2 设 $\{x_n\}$ 是一数列. 若对任 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $m,n\geqslant N$ 时,总有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$ 成立. 则称 $\{x_n\}$ 是一基本数列(或柯西数列).

我们也常用记号

$\lim\limits_{n,m\to\infty}|x_n-x_m|=0$,或 $|x_n-x_m|\to 0(n,m\to\infty)$ 表示 $\{x_n\}$ 是基本数列.

定理 1.4 $\{x_n\}$ 是收敛数列 $\Longleftrightarrow\{x_n\}$ 是基本数列.

设 A 是一数集,M 是一个数. 若对任何 $x\in A$,均有 $x\leqslant M$,则称 M 是一个上界. 显然,若 A 有上界,则它必有无限多个上界(因大于 M 的数都可成为 A 的上界). 在这无穷多个上界中,是否一定有一个最小的上界呢? 为此给出下面的定义

定义 1.3 数集 A 的最小上界称为 A 的上确界,记作 $supA$.

类似,可以定义 A 的下确界为 A 的最大下界,记作 $infA$.

上确界的等价定义:设 M_0 是 A 的一个上界,并且对任 $\varepsilon>0$,存在 $x\in A$,使 $x>M_0-\varepsilon$(即 $M_0-\varepsilon$ 不再是 A 的上界),则 M_0 是 A 的上确界.

同理:若 M_0 是 A 的一个下界,并且对任 $\varepsilon>0$,存在 $x\in A$,使 $x<M_0+\varepsilon$,则 M_0 为 A 的下确界.

显然,若数集 A 中有一最大值 x_0,则 x_0 一定是 A 的上确界. 但有上确界的数集并不一定都有最大值存在. 例如:

$A=\{x\,|\,x<0\}$,$supA=0$,$0\notin A$

定理 1.5 非空有上(下)界的数值必有上(下)确界.

非空而无上界的数值,当然无上确界而言,此时规定 $supA=+\infty$. 于是对任何非空数值 A,$supA$ 都有意义.

不难得知,当 A 为非空数值时,总有$\{x_n\}\subset A$,使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=supA$ 成立.

定理 1.6 单调增(减)有上(下)界的数列必为收敛数列.

以上我们给出了六个定理. 它们相互等价. 我们采取以下顺序证明这种等价性:

定理 1.1⇒定理 1.2.⇒定理 1.3⇒定理 1.4⇒定理 1.5⇒定理 1.6⇒定理 1.1

证明

(一)定理 1.1⇒定理 1.2 设$[a,b]$不能被 D 中有限个开区间所复盖. 记$[a,b]$为$[a_1,b_1]$,将其二等分为$[a_1,c_1]$与$[c_1,b_1]$. 则二者中至少有一个不能被 D 中有限个开区间所复盖,记其为$[a_2,b_2]$. 再二等分其为$[a_2,c_2]$与$[c_2,b_2]$. 同样,二者中必有一个不能被 D 中有限个开区间所复盖,记其为$[a_3,b_3]$. 如此无限进行下去,得到闭区间套:

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

其中每个$[a_n,b_n]$都不能被 D 中有限个开区间所复盖. 另一方面,因为

$$b_n-a_n=(b-a)/2^{n-1}\to 0(n\to\infty)$$

由定理 1.1,必有唯一实数 $\xi\in[a_n,b_n]$$(n=1,2,\cdots)$因为 $\xi\in[a,b]$,而$[a,b]$被 D 复盖,所以存在开区间 $I_\xi\in D$,使 $\xi\in I_\xi$. 由 a_n,b_n 取法知

$$a_n\to\xi,b_n\to\xi,(n\to\infty)$$

即当 n 充分大时,有$[a_n,b_n]\subset I_\xi$,即 D 中的 I_ξ 就将$[a_n,b_n]$所复盖. 这与每个$[a_n,b_n]$不能被 D 中有限个开区间所复盖相矛盾.

定理获证.

（二）定理 1.2⇒定理 1.3　设$\{x_n\}$是有界数列，$a\leqslant x_n\leqslant b(n=1,2,\cdots)$. 若$\{x_n\}$没有任何收敛的子数列，则对$[a,b]$中的每个数 x，都不是任何子数列的极限，即对每个 $x\in[a,b]$，存在 $\xi>0$，使开区间 $I_x=(x-\xi,x+\xi)$中最多只含有$\{x_n\}$的有限多个项. 于是这样的 I_x 的全体 D 构成了$[a,b]$的一个开复盖. 由定理 1.2，存在 $I_1,I_2,\cdots,I_N\in D$，使$\{I_i|i=1,\cdots,n\}$复盖$[a,b]$，因而复盖$\{x_n\}$. 而每个 I_i 只含有$\{x_n\}$中有限项，因此，$\{x_n\}$一共只有有限多项，矛盾. 定理获证.

（三）定理 1.3⇒定理 1.4

"⇒"：设 $x_n\to a$，则任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n,m\geqslant N$ 时.

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

故有$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-a|+|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

所以$\{x_n\}$是基本列.

"⇐"：先证$\{x_n\}$有界.

取 $\varepsilon=1$，则存在 N，当 $m=N,n>N$ 时，有

$$|x_N-x_n|<1$$

所以，当 $n>N$ 时，$|x_n|\leqslant 1+|x_N|$. 所以

$$|x_n|\leqslant max\{|x_1|,\cdots,|x_{N-1}|,1+|x_N|\}(n=1,2,\cdots)$$

再证$\{x_n\}$收敛.

由定理 1.3$\{x_n\}$有子数列$\{x_{n_k}\}$收敛，设 $x_{n_k}\to a(k\to\infty)$. 即任给 $\varepsilon>0$，存在 K，当 $k\geqslant K$ 时，

$$|x_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又因为$\{x_n\}$为基本列，所以存在 N，当 $k\geqslant N$ 时（此时 $n_k\geqslant k\geqslant N$）