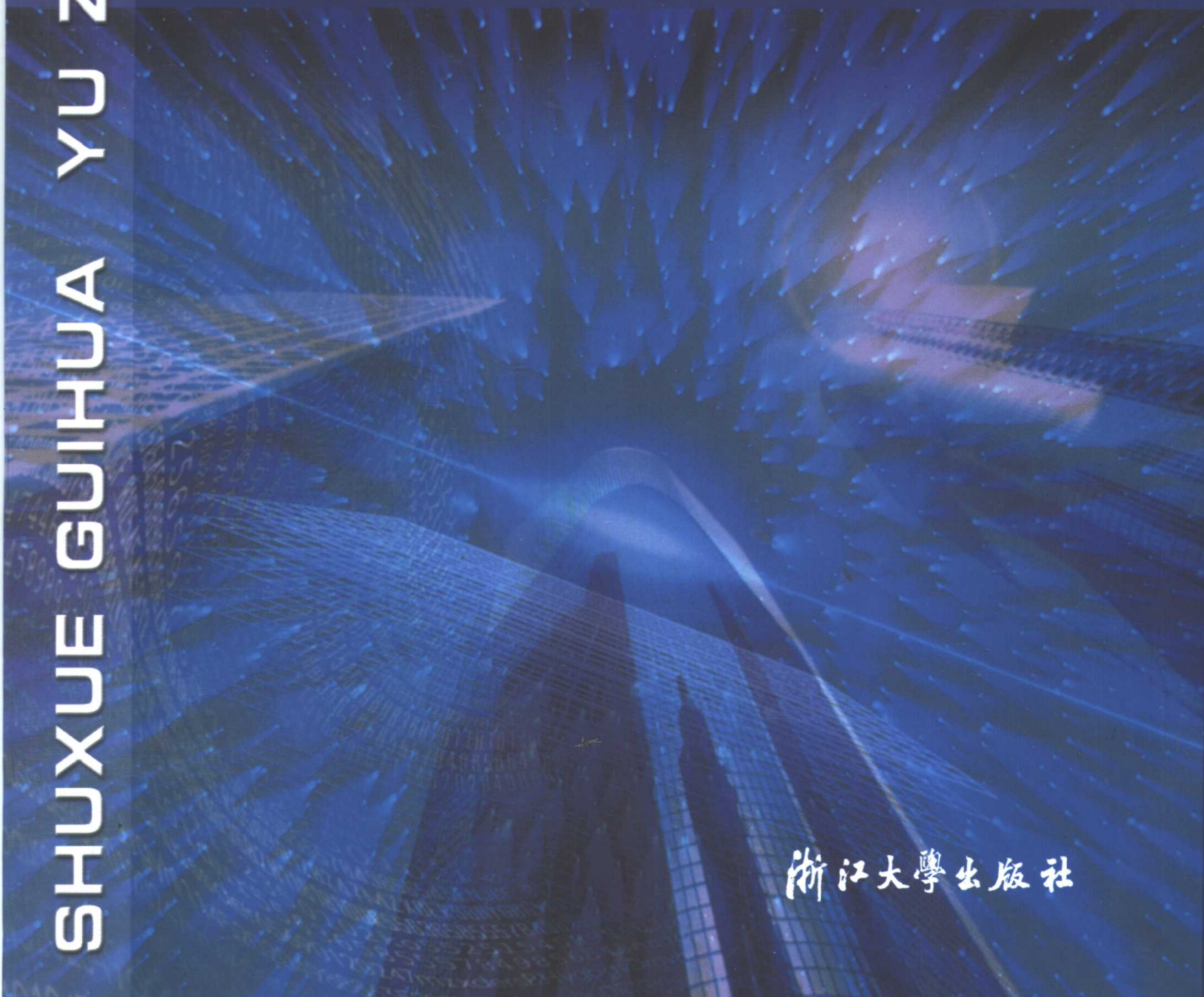
世界银行贷款“高等教育发展”项目赞助

数学规划与组合优化

SHUXUE GUIHUA YU ZUHE YOUHUA

姚恩瑜 何 勇 陈仕平 编著



浙江大學出版社

世界银行贷款“高等教育发展”项目资助

数学规划与组合优化

姚恩瑜　何　勇　陈仕平　编著

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学规划与组合优化/姚恩瑜,何勇,陈仕平编著.
杭州:浙江大学出版社,2001.10
ISBN 7-308-02816-X

Ⅰ.数... Ⅱ.①姚... ②何... ③陈... Ⅲ.①数学规划—高等学校—教材②组合数学—高等学校—教材
Ⅳ.①O221②O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 073667 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州市浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 杨晓鸣
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 浙江印刷集团公司
经　　销 浙江省新华书店
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 16.5
字　　数 410 千字
版 印 次 2001 年 10 月第 1 版 2002 年 4 月第 2 次印刷
印　　数 1001—3000
书　　号 ISBN 7-308-02816-X/O·265
定　　价 25.00 元

内容提要

本书是作者在多年开设的相关课程基础上编写而成的，系统地介绍了连续及离散优化的原理及方法．全书分上、中、下三篇，共二十一章．上篇为线性规划与整数线性规划，含第一至第七章；中篇为组合优化，含第八至第十三章；下篇为非线性规划，含第十四至第二十一章．本书内容充实，其中包括一些较新的材料．

本书可作为数学、管理科学、系统科学、信息科学以及工科各专业高年级本科生和研究生的教材与参考书．对于从事最优化理论、最优化方法和最优化应用的研究人员或工程技术人员，也有一定的参考价值．

前　言

在人类几乎所有的社会活动中都有“寻优”的需求，将寻优的过程用数学模型描述并求解，是20世纪应用数学的重大进展之一. 数学规划就是其中一类重要的数学模型. 随着计算机科学的飞速发展，针对离散变量的优化问题被逐渐重视，从而形成了有别于数学规划的另一类重要模型，即组合优化(又称离散优化). 作为两者之间的桥梁则是线性规划和整数规划. 线性规划是连续模型，它是数学规划的基础问题，但由于它的解的特殊结构，它又能作为离散问题考虑. 整数规划是严格意义下的离散优化，但它的模型及求解均与连续的数学规划密切相关.

本书涉及的就是上述两类重要的优化模型，且在叙述中竭力避免形成割裂的感觉，给读者以统一的寻优思想. 作为教材，我们力求讲清基本概念和基本求解方法的思想，所以在取材上着重经典方法的介绍.

本书是在作者多年教学的基础上编写而成的. 上篇主要参考了D. G. Luenberger所著“Introduction to linear and nonlinear programming”(夏尊铨等译，科学出版社，1980年)中的有关部分改写而成，下篇主要依照浙江大学讲义“非线性规划”(韩继业、孙兰芬、汤竞生、杨启帆、姚恩瑜编著)编写，中篇则是作者专门编写的. 作者对以上提及的各位致以衷心的感谢.

本书上篇第一至第五章及第七章由陈仕平执笔，上篇第六章及中篇各章由何勇执笔，下篇各章由姚恩瑜执笔.

我们将连续与离散优化编写于一书之中，实为一种尝试，难免会有很多不足之处，诚望得到读者的指正.

作者于浙江大学

2001年9月

目　　录

上篇　线性规划和整数线性规划

中篇　组合优化

下篇　非线性规划

上篇

线性规划和整数线性规划

第一章

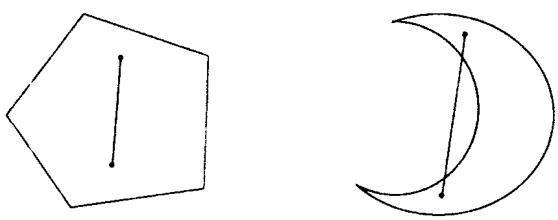
预备知识

§1.1 凸集的定义及性质

定义 1.1 设 C 是 E^n 中一个集合.若对 C 中任意两点 x,y 及任一实数 $\alpha\in[0,1]$,点 $z=\alpha x+(1-\alpha)y$ 仍属于 C,则称 C 是 E^n 中的凸集. 又称 z 是 x 和 y 的凸组合.

这个定义有明显的几何意义:一个集合为凸的充要条件是连接该集合中任意两点的线段全落在该集合中(图 1-1).

我们规定空集是凸集.



凸集　　　　非凸集

图 1-1

凸集具有下列一些基本性质:

性质 1.1 设 C 是凸集,λ 为实数,则集合 $\lambda C=\{x\mid x=\lambda y,y\in C\}$ 也为凸集.

性质 1.2 两凸集的和集仍为凸集.即:若 C,D 都为凸集,则集合 $C+D=\{x\mid x=p+q,p\in C,q\in D\}$ 仍为凸集.

性质 1.3 任何一组凸集的交集为凸集.

这三条性质可从下列几个例子直接看出,其证明可从定义直接给出,作为习题留给读者.

例 1.1 记凸集 $C=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant1\}$,则 $2C=\{(x,y)\mid(x-2)^2+(y-$

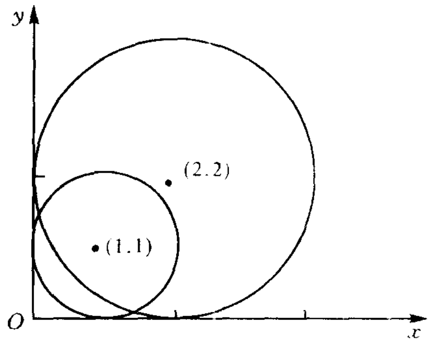


图 1-2

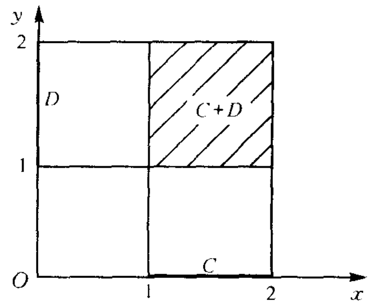


图 1-3

$2)^2\leqslant 4\}$显然为凸集(图 1-2).

例 1.2　记凸集 $C=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2, y=0\}$, $D=\{(x,y)\mid x=0, 1\leqslant y\leqslant 2\}$，则 $C+D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 2\}$仍为凸集(图 1-3).

例 1.3　图 1-4 的阴影部分显然是一个凸集.

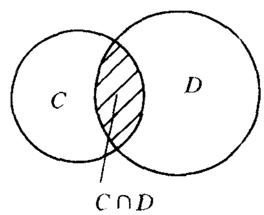


图 1-4

性质 1.4　设 C 为凸集，则有：(1)C 的闭包 $\bar{C}$ 为凸集；

(2)C 的所有内点组成的集合 int$C$ 为凸集.

这一性质从直观上理解就是凸集加上(或减去)它的边界点，不改变其凸的性质.

定义 1.2　设 S 是 E^n 的一个子集. 所有包含 S 的凸集的交集称为 S 的凸包，记作cov(S)，并把 cov(S)的闭包称作 S 的闭凸包.

S 的凸包可理解为 E^n 中包含 S 的最小的凸集. 显然，当 S 是凸集时，cov(S)即为 S 本身.

§1.2　超平面

本节将介绍一类重要的凸集——超平面. 它是三维空间中平面概念的推广.

定义1.3　设a 是非零 n 维行向量，b 为一实数，则集合 $H=\{x\in E^n\mid \mathrm{a}x=b\}$称作 E^n 中的一张超平面.

易证超平面 H 为凸集，下面我们在 H 的基础上构造一些重要的凸集.

定义1.4　设有超平面　$H=\{x\in E^n\mid \mathrm{a}x=b\}$，则分别称下面的集合

$$H_+=\{x\in E^n\mid \mathrm{a}x\geqslant b\},\quad H_-=\{x\in E^n\mid \mathrm{a}x\leqslant b\},$$

$$\mathring{H}_+=\{x\in E^n\mid \mathrm{a}x>b\},\quad \mathring{H}_-=\{x\in E^n\mid \mathrm{a}x<b\}$$

为由 H 形成的正闭半空间、负闭半空间、正开半空间和负开半空间. 显然它们都是凸集.

定义1.5　有限个闭半空间的交集称为多胞形.

多胞形实际上是有限个不等式组 $\mathrm{a}^i x\leqslant b^i (i=1,2,\cdots,m)$的解的集合，多胞形显然也是凸集. 它可能为有界集、无界集或空集，我们特别感兴趣的是有界非空的多胞形.

定义1.6　有界非空的多胞形称为多面体.

定理 1.5 设 C 为凸集，y 是 C 的闭包外的一点，则必存在行向量 a，使得 $\mathrm{a}y<\inf_{x\in C}\mathrm{a}x$，亦即存在一个超平面 H，使点 y 和集 C 分别包含在 $\mathring{H}_-$ 和 $\mathring{H}_+$ 之中，称这样的超平面 H 为分离(y 和 C 的)超平面.

证明 令 $\delta=\inf_{x\in C}\|x-y\|$，则在闭包 $\overline{C}$ 中必存在一点 x^0，使得 $\|x^0-y\|=\delta>0$. 这是因为函数 $f(x)=\|x-y\|$ 为连续函数，考虑 C 的闭包与以 y 为中心、2δ 为半径的球的交集（显然为有界闭集），则 $f(x)$ 必在该交集中某一点 x^0 处达到最小值 δ. 下面证明 x^0-y 就是定理中所要求的向量 a^T.

对任一 $x\in C$ 及 $\alpha\in[0,1]$，都有 $x^0+\alpha(x-x^0)\in C$，因而 $\|x^0+\alpha(x-x^0)-y\|^2\geqslant\|x^0-y\|^2$，展开即得 $2\alpha(x^0-y)^T(x-x^0)+\alpha^2\|x-x^0\|^2\geqslant 0$，对该式两边除以 α，再令 $\alpha\to 0^+$，有 $(x^0-y)^T(x-x^0)\geqslant 0$，即

$$(x^0-y)^Tx\geqslant(x^0-y)^Tx^0=(x^0-y)^T[(x^0-y)+y]=\|x^0-y\|^2+(x^0-y)^Ty$$
$$=\delta^2+(x^0-y)^Ty>(x^0-y)^Ty.$$

令 $\mathrm{a}^T=x^0-y$，定理得证.

定理 1.6 设 C 是一凸集，y 是 C 的一个边界点，则必存在一非零向量 a，使对任一 $x\in C$ 均有 $\mathrm{a}y\leqslant\mathrm{a}x$ 成立. 亦即存在一张通过 y 的超平面，将 C 包含在它的一个闭半空间中.

证明 由 C 的凸性易证在边界点 y 的任一邻域中必有异于 y 且不属于 $\overline{C}$ 的点，因而必存在 $\overline{C}$ 外收敛于 y 的点列 $\{y_k\}$. 对每一 y_k，由定理 1.5 知必存在一个非零向量 a_k，使 $\mathrm{a}_ky_k<\inf_{x\in C}\mathrm{a}_kx$，进一步可不妨设 $\|\mathrm{a}_k\|=1$. 为此得到一个向量序列 $\{\mathrm{a}_k\}$，它是有界的，故必有收敛子列 $\{\mathrm{a}_k\}_K$ 满足：当 $k\xrightarrow[K]{}\infty$ 时，$\mathrm{a}_k\xrightarrow[K]{}\mathrm{a}$. 对这一非零向量 a，我们有

$$\mathrm{a}y=\lim_{k\in K}\mathrm{a}_ky_k\leqslant\lim_{k\in K}\mathrm{a}_kx=\mathrm{a}x$$

对任一 $x\in C$ 成立. 定理证毕.

从定理 1.6 知，经过凸集的任一边界点，存在一个超平面，使得凸集全都落在该超平面所形成的某一闭半空间中，我们称此超平面为支撑超平面.

§1.3 凸集的极点

定义 1.7 设 x^0 是凸集 C 中的一点，如果不存在 C 中的相异两点 x,y 及某一实数 $\alpha\in(0,1)$，使得 $x^0=\alpha x+(1-\alpha)y$，则称 x^0 是 C 的一个极点.

例如凸多边形中的每个顶点都为极点，圆周上的点都是圆的极点.

定义 1.7 告诉我们，若 x^0 不是凸集 C 的极点时，它必能表示为 C 中某相异两点的凸组合，即存在 C 中两点 x,y 和 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $x^0=\alpha x+(1-\alpha)y$.

定理 1.7 有界闭凸集中每一非极点，必是其极点的凸组合.

证明略.

习　题

1. 试证 S 为凸集的充要条件是：对任意自然数 $k>2$，任取 $x^1,\cdots,x^k\in S$ 及 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k\in[0,1]$，且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1$，必有 $\lambda_1x^1+\cdots+\lambda_kx^k\in S$.

2. 设有凸四边形 $x^1x^2x^3x^4$，在其内部任取一点 x，证明 x 可表示为 x^1,x^2,x^3,x^4 的凸组合.

3. S_1,S_2 为闭凸集，且 $S_1\cap S_2=\varnothing$，试证明存在一列向量 p 使 $p^Tx^1>p^Tx^2$，其中 $x^1\in S_1$，$x^2\in S_2$.

4. 证明集合 $S=\{d\in E^n\mid Ad=0,d\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n}d_i=1\}$ 是一个凸集.

5. 举例说明两个凸集的并不一定为凸集.

6. 求集合 $S=\{(x_1,x_2)\in E^2\mid x_1-x_2^2\geqslant 0,x_2\geqslant x_1\}$ 的极点.

7. 请分别给出满足下列条件的凸集的例子：(1)没有极点；(2)只有一个极点；(3)有无穷个极点.

8. 证明性质 1.1—1.4.

第二章

线性规划的基本性质

线性规划是数学规划的一个重要分支，数学规划的一般模型如下：

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t. } h_i(x)=0, i=1,\cdots,m \\ &\qquad g_p(x)\geqslant 0, p=1,\cdots,t \end{aligned} \tag{2.1}$$

这里 $f(x)$，$h_i(x)(i=1,\cdots,m)$，$g_p(x)(p=1,\cdots,t)$均是定义在 E^n 上的实函数，问题(2.1)即是求函数 $f(x)$在等式约束条件 $h_i(x)=0(i=1,\cdots,m)$和不等式约束条件 $g_p(x)\geqslant 0(p=1,\cdots,t)$之下的极小值．我们称 $f(x)$为目标函数，称 $h_i(x)(i=1,\cdots,m)$，$g_p(x)(p=1,\cdots,t)$为约束函数．当(2.1)中的目标函数与约束函数均为线性函数时，就称之为线性规划，简记为 LP(Linear Programming)．

在现实生活及生产实践中，我们可以遇到大量的线性规划问题，下面举几个例子．

例 2.1 （饮食问题）假定在市场上可以买到 n 种不同的食品，第 j 种食品的单位售价是 c_j．另外，有 m 种营养成分，假设第 j 种食品的每一个单位中含有 a_{ij}个单位的第 i 种营养成分．为保证健康，每人每天至少应摄取 b_i 个单位的第 i 种营养．问：如何确定每人每天食用第 j 种食品的数量，才能既保证基本的营养要求又使价格最便宜？

若用 x_j 表示每人每天食用第 j 种食品的数量(即 x_j 个单位)，则此问题即是求出 $x_j(j=1,\cdots,n)$，使它在满足营养要求 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i(i=1,2,\cdots,m)$的条件下，求价格 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 的最小值，显然这里每一个 x_j 还应是非负的($x_j\geqslant 0, j=1,\cdots,n$)，写成线性规划问题即是：

$$\begin{aligned} \min\ & c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\ \text{s.t. } & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1 \\ & a_{21}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant b_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant b_m \\ & x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

例 2.2 某工厂生产甲、乙、丙、丁四种型号的产品，生产四种产品所需的原材料、机器台时等指标，以及每千克产品的预测利润如下表：

	台时	材料 1	材料 2	材料 3	每千克产品预测利润
甲	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{41}	c_1
乙	a_{12}	a_{22}	a_{32}	a_{42}	c_2
丙	a_{13}	a_{23}	a_{33}	a_{43}	c_3
丁	a_{14}	a_{24}	a_{34}	a_{44}	c_4
资源限制	b_1	b_2	b_3	b_4	

求使预测利润最大的生产方案.

设甲、乙、丙、丁四种产品的产量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4，则上面的问题可表示成线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\max\ & c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4 \\
\text{s.t.}\ & a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4\leqslant b_1 \\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4\leqslant b_2 \\
& a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4\leqslant b_3 \\
& a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4\leqslant b_4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

§2.1 线性规划问题的标准型

对于各种不同的问题，线性规划具有的形式可能是不同的，但是任何一种线性规划问题都可以等价地转化为下面的标准形式：

$$
\begin{aligned}
\min\ & c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\
\text{s.t.}\ & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\
& x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, \cdots, x_n\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

其中 c_j, b_i, a_{ij} 均为实常数，x_j 是要确定的实变量. 不失一般性，我们总可假定每一个 $b_i\geqslant 0$，否则在第 i 个等式约束两边乘以 -1 便可化为此种情况. 我们称 $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=b_i$ 为约束方程或等式约束，称 $x_j\geqslant 0$ 为非负约束.

若我们引入向量及矩阵记号，即 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为一 n 维列向量，$c=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 为一 n 维行向量，

$$
A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

为一 $m\times n$ 矩阵，$b=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$ 为一 m 维列向量， 则问题(2.4)可改写为下面的矩阵形式：

$$\begin{aligned} \min\ & cx \\ \text{s.t.}\ & Ax=b \\ & x\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

下面我们对几种主要的非标准形式线性规划问题给出转化为标准形式的方法.

(1)若(2.4)式中有某一个等式约束代之以"≤"型不等式约束:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i \tag{2.6}$$

则我们用添加非负变量的方法将(2.6)化成等式约束:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+y_i=b_i \tag{2.7}$$

这里 $y_i\geqslant 0$,称之为松弛变量. 一般地,若(2.4)中有 k 个"≤"型的不等式约束,则需添加 k 个松弛变量,特别,当所有约束均是"≤"型时,问题(2.5)就变为:

$$\begin{aligned} \min\ & cx \\ \text{s.t.}\ & Ax\leqslant b \\ & x\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

此时,添加 m 维向量 $y=(y_1,\cdots,y_m)^T$,它的每一分量都是松弛变量,使(2.8)化为:

$$\begin{aligned} \min\ & cx \\ \text{s.t.}\ & Ax+y=b \\ & x,y\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

或写成:

$$\begin{aligned} \min\ & (c,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{s.t.}\ & (A,I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=b \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

(2.9)或(2.10)是具有 $m+n$ 个变量的标准型的(LP)问题. 它与(2.8)是等价的. 这里等价性是指:当(2.8)有最优解 x^* 时,(2.9)就有相应的最优解 $\begin{pmatrix} x^* \\ b-Ax^* \end{pmatrix}$;反之,当(2.9)有解 $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ 时,x^* 也就是(2.8)的解.

同样,当(2.4)式中出现了"≥"型不等式约束时,我们用减去松弛变量的方法将其化成等式约束. 特别地,对下面问题:

$$\begin{aligned} \min\ & cx \\ \text{s.t.}\ & Ax\geqslant b \\ & x\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

可以化成等价的问题:

$$\begin{aligned} \min\ & cx \\ \text{s.t.}\ & Ax-y=b \\ & x,y\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

或