

共轭曲面原理基础

陈志新 著

科学出版社

内 容 简 介

共轭曲面原理是揭示成对几何图形与成对运动间的内在联系和相互转换规律的一门新兴的技术科学。它是顺应现代机械工程发展的需要和现代电算技术所提供的条件而发展起来的。本书系统地介绍了它的基本概念、基本原理和基本方法,是作者近三十年来的研究成果。本书分为向量的回转,工程微分几何学,共轭运动学和共轭图形几何学等四篇,共十九章。本书可供从事各类机械生产行业的设计、加工等工作的工程技术人员参考使用,也可供有关专业的研究生及高等院校师生参考。

共轭曲面原理基础

陈 志 新 著

责任编辑 杜小杨

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985 年 11 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

1985 年 11 月第一次印刷 印张: 17

印数: 0001—3,200 字数: 384,000

统一书号: 13031·3031

本社书号: 4210·13-1

定价: 4.00 元

序

共轭曲面原理是研究在机械加工和机械传动条件下,成对几何图形与成对运动间的内在联系和相互转换规律的一种理论。它是一门跨越运动学、微分几何学、机构学三门学科的基础性的新兴技术科学。

对几何图形与运动间联系关系的研究,历史上可追溯至十八世纪的 Euler (欧拉)。平面机构学中的 Euler-Savary (欧拉-萨伐利)公式就是对此种联系关系研究的一项重大成果。由于任何形式的机械加工(包括数控加工)都是具有一定几何外形的工具,通过工具和工件的特定运动,形成所要求的工件几何外形,而任何形式的机械传动(包括机械手、机器人)都是输入构件的运动,通过传动机构中诸对相互接触的构件的特定周界几何图形的制约,转化成为所要求的输出构件的运动,即都是成对几何图形与成对运动间的相互转换。所以,进入二十世纪以来,随着现代机械加工和机械传动的兴起和日趋精密化、大型化和自动化,这方面的研究工作获得迅猛发展。初期,主要是为了解决齿轮设计和制造中的有关技术问题,所讨论的运动方式局限于两固定轴间的等速比传动,因此,据此提出的理论仅适用于分析普通齿曲面,称为“齿形理论”,又称“齿轮啮合原理”。随着所讨论的运动方式的普遍化,出现了共轭曲面原理。它是首先由我国提出建立的。1956年的《机械工程学报》4卷2期上,发表了作者撰写的“连续滑动接触共轭曲面原理及其应用”一文,提出了创建共轭曲面原理这项任务。1978年以来,随着我国的国际学术交流活动的加强,作者先后在有关国际学术会议上发表了六篇有关共轭曲面原理的论文,获得国际有关学术界的承认和好评,并引起重视。

共轭曲面原理又是一门具有众多应用领域的技术科学。它对各种机械加工和各类机械传动都具有普遍的指导意义,并借助现代电算技术,可应用于解决广泛的实际工程问题。它可应用于解决复杂齿形曲面和空间凸轮曲面的设计与加工,加工工具的几何轮廓设计,复杂空间机构(包括机械手和机器人)的运动分析、综合和设计,切削加工中切屑几何形状和表面光洁度形态分析,多坐标数控加工和图形显示的程序编制,各种误差引起的精密复杂曲面间的接触状况和传动精度的变化的分析,精密复杂曲面的测量等等。正在开拓中的一个新的应用领域是仿生机械学中的骨骼关节曲面的位置和形状与可实现的运动间的相互关系的分析。

早在1964年,作者曾撰写完成《共轭曲面原理》(上册)书稿。原计划于1966年由科学出版社出版,后因“文化大革命”干扰,拖延了八年,直至1974年才由科学出版社出版。(中册)书稿完成于1974年,一直到打倒“四人帮”后,于1977年才由科学出版社出版。这两部书稿的基本内容均系“文化大革命”前所写。近十年来,共轭曲面原理有很大发展。从简单共轭曲面发展到广义共轭曲面,由单自由度、简单双自由度发展到广义双自由度和多自由度,由线接触、单自由度点接触发展至有控点接触和多自由度点接触,等等。为适应这些发展,自1978年以来,作者曾在洛阳、太原、西安、上海、武汉、北京等地举办过六期“共轭曲面原理基础”讲学班,并根据讲稿,于1981年撰写完成《共轭曲面原理基础

(一)——向量的回转与工程微分几何学》油印书稿,于1982年撰写完成《共轭曲面原理基础(二)——共轭运动学与共轭图形几何学》胶印书稿。现将这两部书稿合并成本书出版,可作为有关专业研究生研读“共轭曲面原理基础”课程用的教材,也可供从事各类机械生产行业的设计、工艺等方面工作的高等学校教师、高年级学生、工程技术人员以及从事应用力学、应用数学、计算数学等方面工作的科研和教学人员参考使用。本书分为向量的回转,工程微分几何学,共轭运动学,共轭图形几何学等四篇,共计十九章。在初次阅读时,带*号的章节可暂不阅读。

陈志新

1983年2月于上海

目 录

第一篇 向量的回转

第一章 绕单轴回转	1
§ 1-1 向量回转的表达式	1
§ 1-2 三个独立关系式	1
§ 1-3 向量回转的展开式	1
§ 1-4 展开式的几何推证	2
§ 1-5 向量回转的一些特性	3
§ 1-6 向量回转在坐标变换中的应用	5
§ 1-7 向量回转在推导曲线和曲面的参数方程式中的应用	6
§ 1-8 向量回转在机构运动分析中的应用	12
§ 1-9 向量回转在几何量计算中的应用	14
第二章 绕多根轴回转	17
§ 2-1 向量的双次螺旋运动	17
§ 2-2 绕通过同一点的两根不同方位的转轴的回转合并成为绕通过相同点的单根转轴的回转	18
§ 2-3 绕通过同一点的多根不同方位的转轴的回转合并成为绕通过相同点的单根转轴的回转	22
§ 2-4 绕通过同一点的两根转轴的回转的等价次序颠倒	25
§ 2-5 绕通过同一点的多根转轴的回转的等价次序颠倒	26
§ 2-6 绕通过一点的单根回转轴的回转分解成为交替绕通过同一点的两根垂直轴之一的三次回转	27
第三章 向量回转的微分	31
§ 3-1 转角变化引起的微分量	31
§ 3-2 转轴方位变化引起的微分量	31
§ 3-3 转角和转轴方位均有变化引起的微分量	32
§ 3-4 绕多根转轴回转的微分量	32
§ 3-5 交替绕两转轴先均正向回转微量转角,后均反向回转同等的微量转角,共四次微回转所引起的微分量	33

第二篇 工程微分几何学

第一章 一些基本概念	36
§ 1-1 几何性与时间性参量的区别	36
§ 1-2 虚几何图形和几何性运动	36
§ 1-3 有界几何图形	36
§ 1-4 有界占体	36

§ 1-5 体、面、线、点体系·····	37
第二章 周界曲面 ·····	38
§ 2-1 周界曲面·····	38
§ 2-2 周界曲面的表达方程式·····	38
§ 2-3 曲面上任一点处的单位法线向量 N ·····	38
§ 2-4 曲面上任一点处的切平面·····	39
§ 2-5 曲面上任一点处的单位切向量 τ ·····	39
§ 2-6 曲面的曲率·····	39
§ 2-7 法曲率·····	40
§ 2-8 挠曲率·····	41
§ 2-9 曲面的几何角速度·····	42
§ 2-10 沿两相互垂直切向方向的挠曲率间的关系·····	42
§ 2-11 沿不同切向方向的法曲率和挠曲率间的关系·····	43
§ 2-12 法曲率和挠曲率的方向变化率·····	44
§ 2-13 曲面的曲率圆·····	45
§ 2-14 曲面曲率的协调方程式·····	46
§ 2-15 主曲率方向和主曲率值·····	48
§ 2-16 脐点·····	49
§ 2-17 全曲率(高斯曲率)·····	49
§ 2-18 平均曲率·····	51
§ 2-19 四种共轭切向方向·····	52
§ 2-20 五种特征切向方向·····	55
§ 2-21 几何共轭方向·····	58
§ 2-22 可展曲面·····	59
§ 2-23 脊线, 顶尖点, 脊点和界限脊线·····	60
§ 2-24 共轭法曲率和共轭挠曲率·····	62
§ 2-25 诱导曲率与诱导法曲率和诱导挠曲率·····	63
§ 2-26 诱导曲率圆·····	64
§ 2-27 两周界曲面能相互相切的条件·····	65
§ 2-28 线共轭诱导曲率·····	66
§ 2-29 相对曲率和相对曲率圆·····	67
§ 2-30 相对共轭法曲率和相对共轭挠曲率及相对共轭曲率圆·····	70
第三章 汇交曲线 ·····	73
§ 3-1 汇交曲线·····	73
§ 3-2 汇交曲线的表达方程式·····	73
§ 3-3 汇交曲线上任一点处的单位切线向量·····	74
§ 3-4 汇交曲线上任一点处的单位法线向量和有效法线区·····	74
§ 3-5 汇交曲线上任一点处的单位主法线向量和曲线的曲率·····	75
§ 3-6 汇交曲线上任一点处的单位副法线向量·····	77
§ 3-7 汇交曲线上任一点处的曲线挠率·····	77
§ 3-8 ω, ξ, β 变化率的展开式·····	79
§ 3-9 汇交曲线的曲率轴·····	79
§ 3-10 汇交曲线法线组成的曲面成为可展曲面的条件·····	80

§3-11	汇交曲线的几何角速度	81
§3-12	汇交曲线相对于周界曲面的相对几何角速度	82
§3-13	汇交曲线相对于周界曲面的相对曲率和相对挠率	82
§3-14	短程曲线	83
§3-15*	沿曲面上一曲线的几何角位移微分方程式	84
§3-16*	向量沿曲面上一曲线的平行移动	85
§3-17*	向量沿曲面上一曲线的移位	86
§3-18*	平行移动与移位间的联系关系	87
§3-19*	向量沿曲面上一微小平行四边形平移一整周后的方位变化	88
§3-20*	向量沿曲面上一无自相交点的封闭曲线平移一整周后的方位变化	90
§3-21*	向量沿曲面上一无自相交点的封闭曲线的整周移位	92
§3-22*	具有自相交点的封闭曲线分解成多个无自相交点的封闭曲线	96
§3-23*	向量沿曲面上曲线的绝对微分与绝对微导	96
§3-24*	曲面曲率沿切向方向的微导与绝对微导	97
§3-25*	曲面曲率沿曲面曲线的微导与绝对微导	101
第四章	汇交点	105
§4-1	汇交点	105
§4-2	凸、凹汇交点的坐标位置	105
§4-3	汇交点处的单位有效法线向量	106

第三篇 共轭运动学

第一章	刚体运动与共轭运动	107
§1-1	刚体运动的自由度	107
§1-2	受周界几何图形制约的刚体运动,即共轭运动	107
§1-3	共轭运动的典型形式	108
§1-4	共轭运动的自由度与共轭副	108
§1-5	共轭运动的种类	109
§1-6	当量共轭运动及其自由度	110
第二章	单自由度简单共轭运动	112
§2-1	简单共轭运动的典型形式	112
§2-2	简单共轭运动的双重坐标系	113
§2-3	简单共轭运动的自由度	113
§2-4	单自由度简单共轭运动时,刚体上点的变位	114
§2-5	单自由度简单共轭运动时,点的线速度	115
§2-6	单自由度简单共轭运动的角速度	117
§2-7	单自由度简单共轭运动的节面及其存在的条件	118
§2-8	单自由度简单共轭运动的螺旋轴曲面	120
§2-9	单自由度简单共轭运动时,点的四种相对线加速度	122
§2-10	惯性相对线加速度	122
§2-11	共轭相对线加速度	124
第三章*	单自由度广义共轭运动	127

§ 3-1	直角坐标系与独立参变量	127
§ 3-2	单自由度广义共轭运动时,刚体上点的变位	127
§ 3-3	单自由度广义共轭运动时,点的线速度	128
§ 3-4	单自由度广义共轭运动的角速度	129
§ 3-5	单自由度广义共轭运动的节面及其存在的条件	130
§ 3-6	单自由度广义共轭运动的螺旋轴曲面	131
§ 3-7	单自由度广义共轭运动时,点的惯性相对线加速度	132
§ 3-8	单自由度广义共轭运动时,点的共轭相对线加速度	134
第四章*	多自由度共轭运动	137
§ 4-1	独立参变量与点的变位	137
§ 4-2	多自由度共轭运动时,点的线速度	138
§ 4-3	比相对运动线速度共面的条件	139
§ 4-4	多自由度共轭运动的角速度	140
§ 4-5	多自由度共轭运动时,点的共轭相对线加速度	143
§ 4-6	分比共轭相对线加速度 J_{ji} 和 J_{ij} 间的关系式	147

第四篇 共轭图形几何学

第一章	共轭图形	150
§ 1-1	共轭图形、拟共轭图形和共轭曲面	150
§ 1-2	共轭图形的类别	150
§ 1-3	共轭图形间的接触状况	150
§ 1-4	共轭接触点和共轭点	156
§ 1-5	瞬时接触线和接触曲线	156
§ 1-6	啮合轨迹图形	156
§ 1-7	五类共轭曲面(曲率)问题	156
第二章	线接触单自由度简单共轭曲面的整体几何学	158
§ 2-1	线接触单自由度简单共轭曲面的类型	158
§ 2-2	第一类共轭曲面问题的求解程序	158
§ 2-3	第二类共轭曲面问题的求解方法	162
§ 2-4	第三类共轭曲面问题的求解要点	168
§ 2-5	第四类共轭曲面问题的求解原理	170
§ 2-6	第五类共轭曲面问题的求解原理	171
§ 2-7	具有双支叶的线接触单自由度简单共轭曲面	171
第三章	线接触单自由度简单共轭曲面的微分邻域几何学	174
§ 3-1	三个基本微分量间的三个共轭关系式	174
§ 3-2	转角增量率	175
§ 3-3	共轭角速度及其当量投影分量	176
§ 3-4	一些特殊切向方向	177
§ 3-5	线共轭诱导曲率值的计算式	179
§ 3-6	一些共轭参量值的计算式	181
§ 3-7	啮合轨迹曲面的一些参量值的计算式	184

§ 3-8	第二共轭曲面曲率的求解程序(第一类共轭曲率问题)	186
§ 3-9	第二共轭曲面为汇交曲线时,第一共轭曲面法线与曲率的计算式	188
§ 3-10	Euler-Savary 方程式	189
§ 3-11	第二类共轭曲率问题的求解程序	191
§ 3-12	第三类共轭曲率问题的求解程序	193
§ 3-13	第四类共轭曲率问题的求解程序	194
§ 3-14	第五类共轭曲率问题的求解程序	195
第四章	线接触单自由度简单共轭曲面上的界限曲线与奇异型点	197
§ 4-1	线接触共轭曲面上的共轭停驻曲线,共轭界限曲线与共轭变曲曲线	197
§ 4-2	在特殊简单共轭运动条件下,求解共轭界限曲线的解析方法	199
§ 4-3	线接触共轭曲面上的曲率干涉界限曲线	202
§ 4-4	线接触共轭曲面上的五种奇异型点	204
§ 4-5	奇异型点间以及与界限曲线的联系关系	206
§ 4-6	共轭界限曲线,双支叶共轭曲面与第一类补充共轭曲面	207
§ 4-7	第二类补充共轭曲面	208
§ 4-8	曲面的共轭性分析	209
第五章	点接触单自由度简单共轭曲面	210
§ 5-1	点接触单自由度简单共轭曲面的类型	210
§ 5-2	第三类共轭曲面问题的求解程序	210
§ 5-3	变态第三类共轭曲面问题的求解程序	211
§ 5-4	第五类共轭曲面问题的求解程序	212
§ 5-5	第三类共轭曲率问题的求解程序	212
§ 5-6	第五类共轭曲率问题的求解程序	215
§ 5-7	两曲面间点接触单自由度传动时的接触斑痕与传动品质分析程序	217
§ 5-8	有控点接触共轭曲面与 PK, JK 制齿形	220
第六章*	线接触单自由度广义共轭曲面及其互换簇	222
§ 6-1	线接触单自由度广义共轭曲面	222
§ 6-2	第一类共轭曲面问题的求解程序	222
§ 6-3	一些微分参量值的计算式	223
§ 6-4	第一类共轭曲率问题的求解程序	226
§ 6-5	线接触单自由度广义共轭曲面的互换簇	228
第七章*	双自由度共轭曲面	231
§ 7-1	概述	231
§ 7-2	第一类共轭曲面问题的求解程序	231
§ 7-3	当 $\frac{d\theta_2}{dt} = m \frac{d\theta_1}{dt}$ 时,一些运动参量值的计算式	232
§ 7-4	当 $\frac{d\theta_2}{dt} = m \frac{d\theta_1}{dt}$ 时,一些微分参量值的计算式	236
§ 7-5	共轭曲面 A 上的接触迹方向 τ'_m	238
§ 7-6	诱导几何角速度与诱导曲率	239
§ 7-7	时间增量率与第一共轭曲面 A 上的接触迹方向	241
§ 7-8	啮合迹方向,啮合弧长率与啮合曲面法线	243
§ 7-9	第一类共轭曲率问题的求解程序	244

第八章* 多自由度极限共轭曲面	246
§ 8-1 概述	246
§ 8-2 第一类共轭曲面问题的求解程序	246
§ 8-3 $\frac{\partial \theta_j}{\partial u}, \frac{\partial \theta_j}{\partial v}$ 的线性方程组	247
§ 8-4 当 $\frac{dv}{dt} = m \frac{du}{dt}$ 时, 一些运动参量值的计算式	248
§ 8-5 当 $\frac{dv}{dt} = m \frac{du}{dt}$ 时, 一些微分参量值的计算式	250
§ 8-6 极限共轭曲面 A 上与 m 值对应的接触迹方向 τ'_m	251
§ 8-7 诱导几何角速度与诱导曲率	252
§ 8-8 时间增量率与曲面 A 上的接触迹方向	253
§ 8-9 极限啮合迹方向, 极限啮合弧长率与极限啮合曲面法线	255
§ 8-10 第一类共轭曲率问题的求解程序	256
参考文献	259

第一篇 向量的回转

第一章 绕单轴回转

§1-1 向量回转的表达式. 设 $\mathbf{A}$ 为任一点向量, $\boldsymbol{\omega}$ 为任一单位向量. 令 $\mathbf{A}$ 绕 $\boldsymbol{\omega}$ 轴回转 ε 角 (按右旋规则决定 ε 值的正负), 则可获得一新的点向量 $\mathbf{a}$, 如图 1-1 所示 ($\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ 具有相同的原点). 此种点向量的转换方式称为“向量的回转”. 现引入一个新的向量运算符“ $\otimes$ ”, 称为“向量的回转”运算符, 则新点向量 $\mathbf{a}$ 可按下式表达:

$$\mathbf{a} = (\varepsilon \boldsymbol{\omega}) \otimes \mathbf{A}. \quad (1.1.1)$$

(1.1.1) 式称为向量回转的表达式.

§1-2 三个独立关系式. 回转前后的两向量 $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ 间存在着下列三个独立关系式.

1. 由于向量回转时向量的大小没有变动, 于是, 得

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}. \quad (1.1.2)$$

2. 由于向量回转是绕 $\boldsymbol{\omega}$ 轴进行的, 向量 $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ 与向量 $\boldsymbol{\omega}$ 间的夹角保持不变, 于是, 得

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (1.1.3)$$

3. 由于向量 $\mathbf{a}$ 是向量 $\mathbf{A}$ 绕 $\boldsymbol{\omega}$ 轴转动 ε 转角后的结果, 于是 $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A})$ 与 $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a})$ 两向量间的夹角必须等于 ε , 即

$$\frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a})}{\sqrt{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A})} \sqrt{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a})}} = \cos \varepsilon.$$

利用向量的复混合积公式以及 (1.1.2) 和 (1.1.3) 两关系式, 并注意到 $\boldsymbol{\omega}$ 为单位向量, 上式可简化为

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \cos \varepsilon + (1 - \cos \varepsilon)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A})^2. \quad (1.1.4)$$

§1-3 向量回转的展开式. 在一般情况下, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \neq 0$, 从而 $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$ 三个向量一般不共面 (在 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} = 0$ 的特殊情况下, $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\mathbf{A}$ 重合, $\mathbf{a}$ 将恒等于 $\mathbf{A}$ 而与 ε 值无关), 因此, 在三维空间内, 可将 $\mathbf{a}$ 展开成如下形式

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{A} + a_2 \boldsymbol{\omega} + a_3 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}). \quad (1.1.5)$$

式中的 a_1 , a_2 , a_3 为三个待定的系数. 利用 (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4) 三个独立关系式, 可以确定 a_1 , a_2 , a_3 值如下.

将 (1.1.5) 式代入 (1.1.3) 式, 并考虑到 $\boldsymbol{\omega}$ 为单位向量, 得

$$\begin{aligned} a_1 (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}) + a_2 &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}, \\ a_2 &= (1 - a_1)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}). \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

将 (1.1.5), (1.1.6) 两式代入 (1.1.4) 式, 得

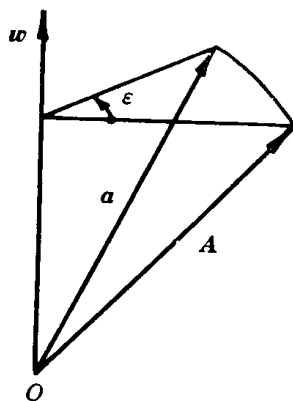


图 1-1 向量的回转

$$a_1(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) + (1 - a_1)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A})^2 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \cos \varepsilon + (1 - \cos \varepsilon)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A})^2. \quad (1.1.7)$$

上式化简后得

$$a_1 = \cos \varepsilon.$$

将(1.1.7)式代入(1.1.6)式,得

$$a_2 = (1 - \cos \varepsilon)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}) \quad (1.1.8)$$

将(1.1.5), (1.1.7), (1.1.8)三式代入(1.1.2)式,得

$$\cos^2 \varepsilon (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) + 2 \cos \varepsilon (1 - \cos \varepsilon) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A})^2 + (1 - \cos \varepsilon)^2 (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A})^2 + a_3^2 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}.$$

上式化简后得

$$a_3^2 [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A})^2] = \sin^2 \varepsilon [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A})^2].$$

由于 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \neq 0$, 即 $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A})^2] \neq 0$, 于是,得

$$a_3^2 = \sin^2 \varepsilon,$$

即

$$a_3 = \pm \sin \varepsilon.$$

由于规定按右旋规则确定 ε 值的符号,于是得

$$a_3 = \sin \varepsilon. \quad (1.1.9)$$

将(1.1.7), (1.1.8), (1.1.9)三式代入(1.1.5)式,并利用表达式(1.1.1)式,得向量回转的展开式为

$$(\varepsilon \boldsymbol{\omega}) \otimes \mathbf{A} = \cos \varepsilon \mathbf{A} + (1 - \cos \varepsilon)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A})\boldsymbol{\omega} + \sin \varepsilon (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}). \quad (1.1.10)$$

§ 1-4 展开式的几何推证. 由图 1-2, 可得

$$\boldsymbol{\alpha} = (\varepsilon \boldsymbol{\omega}) \otimes \mathbf{A} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB}.$$

并且可得

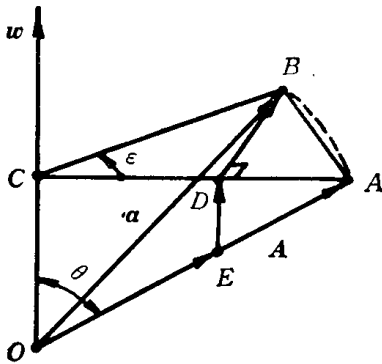


图 1-2 展开式的几何推证

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \frac{|\overrightarrow{OE}|}{|\overrightarrow{OA}|} \overrightarrow{OA} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{CA}|} \mathbf{A} \\ &= \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{CB}|} \mathbf{A} = \cos \varepsilon \mathbf{A}, \\ \overrightarrow{ED} &= \frac{|\overrightarrow{ED}|}{|\overrightarrow{OC}|} |\overrightarrow{OC}| \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{|\overrightarrow{DA}|}{|\overrightarrow{CA}|} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}) \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{CA}|} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}) \boldsymbol{\omega} = \left(1 - \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{CB}|}\right) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}) \boldsymbol{\omega} \\ &= (1 - \cos \varepsilon) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}) \boldsymbol{\omega}, \\ \overrightarrow{DB} &= |\overrightarrow{DB}| \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}}{|(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A})|} = |\overrightarrow{CB}| \sin \varepsilon \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}}{|\overrightarrow{OA}| \sin \theta} \\ &= |\overrightarrow{CA}| \sin \varepsilon \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}}{|\overrightarrow{CA}|} = \sin \varepsilon (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}). \end{aligned}$$

于是得

于是,得

$$\alpha = (\varepsilon\omega) \otimes A = \cos \varepsilon A + (1 - \cos \varepsilon)(\omega \cdot A)\omega + \sin \varepsilon \omega \times A.$$

§ 1-5 向量回转的一些特性.

1. 特性 I.

$$(\varepsilon\omega) \otimes \omega = \omega. \quad (1.1.11)$$

(1.1.11)式表明:任一点向量绕其自身(作为旋转轴)回转时,不论转角 ε 多大,最后所得的新点向量仍是该向量本身.此种情况就是 $\omega \times A = 0$ 的特殊情况.

2. 特性 II.

$$(\varepsilon\omega) \otimes (CA) = C[(\varepsilon\omega) \otimes A]. \quad (1.1.12)$$

利用(1.1.10)式,将(1.1.12)式两边展开,然后逐项对比,即可获证.

特性 II 的几何意义是:任一点向量先放大 C 倍后再回转,与先回转再放大 C 倍,两者的结果是等同的.

必须注意:

$$(C\varepsilon\omega) \otimes A \neq C[(\varepsilon\omega) \otimes A],$$

即回转角度放大 C 倍,不等于将向量放大 C 倍;此点必须不与特性 II 相互混淆.

3. 特性 III.

$$(\varepsilon\omega) \otimes (A \pm B) = (\varepsilon\omega) \otimes A \pm (\varepsilon\omega) \otimes B. \quad (1.1.13)$$

利用(1.1.10)式将(1.1.13)式两边展开,然后逐项对比,即可获证.

特性 III 的几何意义是:两向量加减后再回转与两向量回转后再加减,两者的结果是等同的.

4. 特性 IV.

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1\omega) \otimes [(\varepsilon_2\omega) \otimes A] &= (\varepsilon_2\omega) \otimes [(\varepsilon_1\omega) \otimes A] \\ &= [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\omega] \otimes A. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

利用(1.1.10)式将(1.1.14)式两边展开,然后逐项对比,即可获证.

特性 IV 的几何意义是:一点向量绕同一转轴(注意是同一转轴,不是不同转轴)先后回转几个转角,只要总转角不变,所得结果与先回转哪个转角,后回转哪个转角无关,与分几次完成总转角无关.

必须注意:当先后绕不同转轴回转时,特性 IV 不能成立,即

$$(\varepsilon_1\omega_1) \otimes [(\varepsilon_2\omega_2) \otimes A] \neq (\varepsilon_2\omega_2) \otimes [(\varepsilon_1\omega_1) \otimes A].$$

5. 特性 V.

$$(d\varepsilon\omega) \otimes A = \omega \times A d\varepsilon + A, \quad (1.1.15)$$

式中的 $d\varepsilon$ 为一微分量.

利用(1.1.10)式将(1.1.15)式左边的项展开,并考虑到 $\cos d\varepsilon \approx 1$, $\sin d\varepsilon \approx d\varepsilon$,即忽略二阶及二阶以上微分量,就可获证.

特性 V 的几何意义是:当回转角很小时,可以将新旧点向量 α , A 间的增量简单地等于 $\omega \times A d\varepsilon$,而沿 ω 及 A 均无增量.

6. 特性 VI.

$$\omega \times [(\varepsilon\omega) \otimes A] = (\varepsilon\omega) \otimes (\omega \times A). \quad (1.1.16)$$

利用(1.1.10)式将(1.1.16)式两边展开,得

$$\begin{aligned}
& \omega \times [(\varepsilon\omega) \otimes A] \\
&= \omega \times [\cos \varepsilon A + (1 - \cos \varepsilon)(\omega \cdot A)\omega + \sin \varepsilon(\omega \times A)] \\
&= \cos \varepsilon(\omega \times A) + \sin \varepsilon \omega \times (\omega \times A),
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\omega) \otimes (\omega \times A) \\
&= \cos \varepsilon(\omega \times A) + (1 - \cos \varepsilon)[\omega \cdot (\omega \times A)]\omega + \sin \varepsilon \omega \times (\omega \times A) \\
&= \cos \varepsilon(\omega \times A) + \sin \varepsilon \omega \times (\omega \times A).
\end{aligned}$$

于是, (1.1.16)式获证.

特性 VI 的几何意义是: 一点向量绕一转轴先回转 ε 角, 然后与转轴向量作向量积, 与该点向量先与转轴向量作向量积, 然后再绕转轴回转 ε 角, 两者所得的结果是等同的.

7. 特性 VII.

$$[(\varepsilon\omega) \otimes A] \cdot [(\varepsilon\omega) \otimes B] = A \cdot B. \quad (1.1.17)$$

利用(1.1.10)式将(1.1.17)式左边各项展开, 得

$$\begin{aligned}
& [(\varepsilon\omega) \otimes A] \cdot [(\varepsilon\omega) \otimes B] \\
&= [\cos \varepsilon A + (1 - \cos \varepsilon)(\omega \cdot A)\omega + \sin \varepsilon(\omega \times A)] \cdot [\cos \varepsilon B \\
&\quad + (1 - \cos \varepsilon)(\omega \cdot B)\omega + \sin \varepsilon(\omega \times B)] \\
&= \cos^2 \varepsilon A \cdot B + 2 \cos \varepsilon (1 - \cos \varepsilon)(\omega \cdot A)(\omega \cdot B) \\
&\quad + (1 - \cos \varepsilon)^2 (\omega \cdot A)(\omega \cdot B) + \sin \varepsilon \cos \varepsilon [A \cdot (\omega \times B) \\
&\quad + (\omega \times A) \cdot B] + \sin^2 \varepsilon (\omega \times A) \cdot (\omega \times B) = \cos^2 \varepsilon A \cdot B \\
&\quad + \sin^2 \varepsilon A \cdot B = A \cdot B.
\end{aligned}$$

于是, (1.1.17)式获证.

特性 VII 的几何意义是: 两向量绕同一转轴回转相同转角后再作数量积, 与此两向量不绕轴回转, 直接作数量积, 两者所得的数值结果是相等的.

8. 特性 VIII.

$$[(\varepsilon\omega) \otimes A] \times [(\varepsilon\omega) \otimes B] = (\varepsilon\omega) \otimes (A \times B). \quad (1.1.18)$$

利用(1.1.10)式将(1.1.18)式两边展开, 归并化简后逐项对比, 即可获证.

特性 VIII 的几何意义是: 两向量绕同一转轴转相同转角后再作向量积, 与此两向量先作向量积, 再绕相同转轴转相同转角, 两者所得的结果是等同的.

9. 特性 IX.

$$\{[(\varepsilon\omega) \otimes A] \times [(\varepsilon\omega) \otimes B]\} \cdot [(\varepsilon\omega) \otimes C] = (A \times B) \cdot C. \quad (1.1.19)$$

利用特性 VIII 和特性 VII 将(1.1.19)式左边的项化简, 即可获证.

特性 IX 的几何意义是: 三向量绕同一转轴转相同转角后再作混合积, 与此三向量不绕轴回转, 直接作混合积, 两者所得的数值结果是相等的.

10. 特性 X.

$$\begin{aligned}
& [(\varepsilon\omega) \otimes A] \times \{[(\varepsilon\omega) \otimes B] \times [(\varepsilon\omega) \otimes C]\} \\
&= (\varepsilon\omega) \otimes [A \times (B \times C)].
\end{aligned} \quad (1.1.20)$$

利用特性 VIII 将(1.1.20)式左边的项化简, 即可获证.

特性 X 的几何意义是: 三向量绕同一转轴转相同转角后再作复向量积, 与此三向量先作复向量积, 再绕相同转轴转相同转角, 两者所得的结果是等同的.

11. 特性 XI.

$$\{[(\varepsilon\omega)\otimes A] \times [(\varepsilon\omega)\otimes B]\} \cdot \{[(\varepsilon\omega)\otimes C] \times [(\varepsilon\omega)\otimes D]\} \\ = (A \times B) \cdot (C \times D). \quad (1.1.21)$$

利用特性 VIII 和特性 VII 将(1.1.21)式左边的项化简,即可获证.

特性 XI 的几何意义是: 四向量绕同一转轴转相同转角后再作复混合积, 与此四向量不绕轴回转, 直接作复混合积, 两者所得的数值结果是相等的.

习 题

1. 证明特性 I 至特性 V.
2. 证明特性 VIII.
3. 证明特性 IX 至特性 XI.

§ 1-6 向量回转在坐标变换中的应用.

1. 直角坐标转换矩阵的九个元素. 设 $O-i, j, k$ 与 $O-i', j', k'$ 为两直角坐标系, 如图 1-3 所示. 显然, 单位向量 i', j', k' 中的每一个都可按 i, j, k 三方向上的分量展开, 即

$$\left. \begin{aligned} i' &= a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k, \\ j' &= a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k, \\ k' &= a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.22)$$

(1.1.22) 式中的 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ 共九个系数称为两直角坐标转换矩阵的九个元素. 由于 i', j', k' 为单位向量, 并且相互垂直, 因此, 这九个元素并不彼此独立, 相互间满足下列六个独立关系式, 即

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0, \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.23)$$

亦即 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ 九个元素中独立参量仅三个.

2. 坐标转换与欧拉角. 两直角坐标系间的转换, 可以用三个独立的欧拉角来表述, 如图 1-4 所示. 首先, 坐标系 $O-i, j, k$ 绕 k 轴回转 ϕ 角, 使 i 转至新位置 i'' ; 然后, 绕 i'' 轴回转 θ 角, 使 k 转至新位置 k' ; 最后, 绕 k' 轴回转 ϕ 角, 获得新坐标系 $O-i', j', k'$.

3. 坐标转换矩阵九元素的欧拉角表达式. 利用“向量的回转”运算符, 由图 1-4 可得

$$\left. \begin{aligned} i'' &= (\phi k) \otimes i, \\ k' &= (\theta i'') \otimes k, \\ i' &= (\phi k') \otimes i''. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.24)$$

利用(1.1.10)式, 由(1.1.24)式可推求得

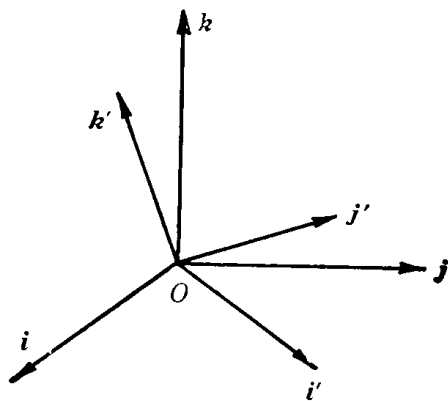


图 1-3 直角坐标系的转换

$$\mathbf{i}'' = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}, \quad (1.1.25)$$

$$\mathbf{k}' = \sin \phi \sin \theta \mathbf{i} - \cos \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \quad (1.1.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= \cos \phi \mathbf{i}'' + (1 - \cos \phi)(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}'')\mathbf{k}' + \sin \phi(\mathbf{k}' \times \mathbf{i}'') \\ &= (\cos \phi \cos \phi - \sin \phi \sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \phi \cos \phi + \cos \phi \sin \phi \cos \theta)\mathbf{j} \\ &\quad + \sin \phi \sin \theta \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

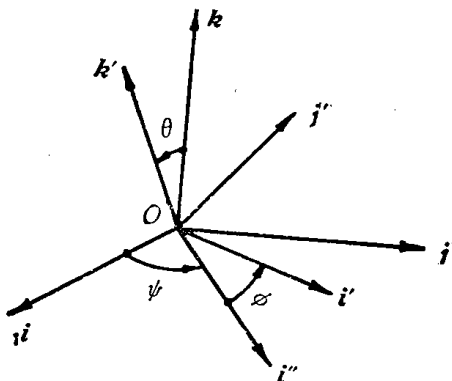


图 1-4 坐标转换与欧拉角

于是,得

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' &= \mathbf{k}' \times \mathbf{i}' = -(\cos \phi \sin \phi + \sin \phi \cos \phi \cos \theta)\mathbf{i} \\ &\quad + (\cos \phi \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \phi)\mathbf{j} + \cos \phi \sin \theta \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

将(1.1.26),(1.1.27),(1.1.28)三式与(1.1.22)式对比,得坐标转换矩阵九元素的欧拉角表达式为

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \cos \phi \cos \phi - \sin \phi \sin \phi \cos \theta, \\ a_{12} &= \sin \phi \cos \phi + \cos \phi \sin \phi \cos \theta, \\ a_{13} &= \sin \phi \sin \theta, \\ a_{21} &= -(\cos \phi \sin \phi + \sin \phi \cos \phi \cos \theta), \\ a_{22} &= \cos \phi \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \phi, \\ a_{23} &= \cos \phi \sin \theta, \\ a_{31} &= \sin \phi \sin \theta, \\ a_{32} &= -\cos \phi \sin \theta, \\ a_{33} &= \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.29)$$

§ 1-7 向量回转在推导曲线和曲面的参数方程式中的应用.

1. 圆锥螺旋曲线的参数方程式. 如图 1-5 所示,设有一点向量 $\mathbf{R}_0$, 其原点在 O' , 且 $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{L}$; 并设过 O' 点有一单位向量 $\boldsymbol{\omega}$. 点向量 $\mathbf{R}_0$ 绕 $\boldsymbol{\omega}$ 轴回转 θ 转角, 得新点向量 $(\theta\boldsymbol{\omega}) \otimes \mathbf{R}_0$; 然后沿此新向量方向增长一与 θ 成正比的增向量 $b\theta[(\theta\boldsymbol{\omega}) \otimes \mathbf{R}_0]$; 这样得一以 O' 为原点的点向量为

$$(\theta\boldsymbol{\omega}) \otimes \mathbf{R}_0 + b\theta[(\theta\boldsymbol{\omega}) \otimes \mathbf{R}_0] = (1 + b\theta)[(\theta\boldsymbol{\omega}) \otimes \mathbf{R}_0],$$

其中 b 为一常参量(螺旋导程参量). 此点向量的终点是圆锥螺旋曲线上的一个点. 令 θ 取不同值, 可获得一系列的点, 构成圆锥螺旋曲线. 于是, 圆锥螺旋曲线的参数方程式可表达成

$$\mathbf{R} = \mathbf{L} + (1 + b\theta)[(\theta\boldsymbol{\omega}) \otimes \mathbf{R}_0], \quad (1.1.30)$$

式中 θ 为参变量.

设 O' (即锥顶) 的坐标为 (l_1, l_2, l_3) , 即

$$\mathbf{L} = l_1 \mathbf{i} + l_2 \mathbf{j} + l_3 \mathbf{k},$$

及 P_0 点的坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 即

$$\mathbf{L} + \mathbf{R}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k},$$

则 $\mathbf{R}_0 = (x_0 - l_1)\mathbf{i} + (y_0 - l_2)\mathbf{j} + (z_0 - l_3)\mathbf{k}$, 并设 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}$, 代入 (1.1.30) 式, 并利用 (1.1.10) 式展开, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ &= l_1 \mathbf{i} + l_2 \mathbf{j} + l_3 \mathbf{k} + (1 + b\theta) \{ \cos\theta [(x_0 - l_1)\mathbf{i} + (y_0 - l_2)\mathbf{j} \\ &\quad + (z_0 - l_3)\mathbf{k}] + (1 - \cos\theta)(z_0 - l_3)\mathbf{k} + \sin\theta \\ &\quad \times [(x_0 - l_1)\mathbf{j} - (y_0 - l_2)\mathbf{i}] \}, \end{aligned}$$

即

$$\left. \begin{aligned} x &= l_1 + (1 + b\theta)[(x_0 - l_1)\cos\theta - (y_0 - l_2)\sin\theta], \\ y &= l_2 + (1 + b\theta)[(y_0 - l_2)\cos\theta + (x_0 - l_1)\sin\theta], \\ z &= l_3 + (1 + b\theta)(z_0 - l_3). \end{aligned} \right\} \quad (1.1.31)$$

(1.1.31) 式为圆锥螺旋曲线 (图 1-6) 的常用参数方程式, 其中参变量为 θ (θ 为动点 P 所在的径向截面与基准径向截面间的夹角).

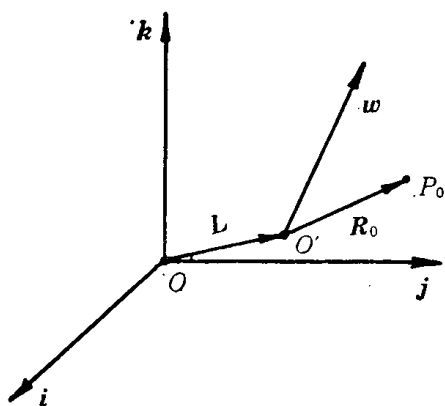


图 1-5 圆锥螺旋曲线的初始条件

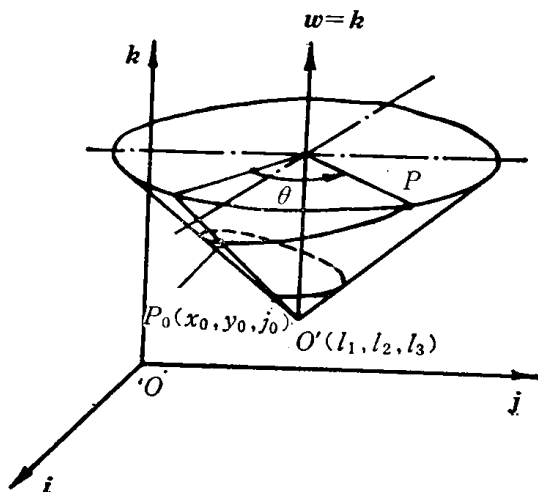


图 1-6 圆锥螺旋曲线

2. 圆锥曲面的参数方程式. 如图 1-7 所示, 设 P_0 为圆锥曲面上的初始点, $\boldsymbol{\omega}$ 为沿圆锥曲面轴线的单位向量. P_0 点在 $\boldsymbol{\omega}$ 上的投影点为 O' , 即 $\overrightarrow{O'P_0} = \mathbf{R}_0$ 垂直于 $\boldsymbol{\omega}$. 过 P_0 点作沿圆锥曲面初始母线的单位向量 $\mathbf{s}_0$, 则 $\mathbf{s}_0$ 必落在 $\mathbf{R}_0, \boldsymbol{\omega}$ 所组成的平面内, 并与 $\boldsymbol{\omega}$ 轴成一锥顶角, 设为 ϕ , 即

$$\mathbf{s}_0 = \cos\phi \boldsymbol{\omega} + \sin\phi \frac{\mathbf{R}_0}{|\mathbf{R}_0|}.$$

初始母线上任一点相对于 O' 的点向量为 $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_0 + s\mathbf{s}_0$, 其中 s 为参变量, 代表沿母线方向离 P_0 点的距离. $\mathbf{R}_p$ 绕 $\boldsymbol{\omega}$ 轴回转 θ 转角, 可抵达圆锥曲面上的任一点. 因此, 可写出圆锥曲面的参数方程式为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{L} + (\theta\boldsymbol{\omega}) \otimes \mathbf{R}_p \\ &= \mathbf{L} + (\theta\boldsymbol{\omega}) \otimes \left[\mathbf{R}_0 + s \left(\cos\phi \boldsymbol{\omega} + \sin\phi \frac{\mathbf{R}_0}{|\mathbf{R}_0|} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.1.32)$$