共轭曲面原理基础

陈志新 著

科学出版社

内 容 简 介

共轭曲面原理是揭示成对几何图形与成对运动间的内在联系和相互转换规律的一门新兴的技术科学．它是顺应现代机械工程发展的需要和现代电算技术所提供的条件而发展起来的． 本书系统地介绍了它的基本概念、基本原理和基本方法，是作者近三十年来的研究成果．本书分为向量的回转，工程微分几何学，共轭运动学和共轭图形几何学等四篇，共十九章．本书可供从事各类机械生产行业的设计、加工等工作的工程技术人员参考使用，也可供有关专业的研究生及高等院校师生参考．

共轭曲面原理基础

陈志新 著

责任编辑 杜小杨

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年11月第一版 开本：787×1092 1/16

1985年11月第一次印刷 印张：17

印数：0001—3,200 字数：384,000

统一书号：13031·3031

本社书号：4210·13—1

定价： 4.00 元

序

共轭曲面原理是研究在机械加工和机械传动条件下，成对几何图形与成对运动间的内在联系和相互转换规律的一种理论．它是一门跨越运动学、微分几何学、机构学三门学科的基础性的新兴技术科学．

对几何图形与运动间联系关系的研究，历史上可追溯至十八世纪的 Euler（欧拉）．平面机构学中的 Euler-Savary（欧拉-萨伐利）公式就是对此种联系关系研究的一项重大成果．由于任何形式的机械加工（包括数控加工）都是具有一定几何外形的工具，通过工具和工件的特定运动，形成所要求的工件几何外形，而任何形式的机械传动（包括机械手、机器人）都是输入构件的运动，通过传动机构中诸对相互接触的构件的特定周界几何图形的制约，转化成为所要求的输出构件的运动，即都是成对几何图形与成对运动间的相互转换．所以，进入二十世纪以来，随着现代机械加工和机械传动的兴起和日趋精密化、大型化和自动化，这方面的研究工作获得迅猛发展．初期，主要是为了解决齿轮设计和制造中的有关技术问题，所讨论的运动方式局限于两固定轴间的等速比传动，因此，据此提出的理论仅适用于分析普通齿曲面，称为“齿形理论”，又称“齿轮啮合原理”．随着所讨论的运动方式的普遍化，出现了共轭曲面原理．它是首先由我国提出建立的．1956 年的《机械工程学报》4 卷 2 期上，发表了作者撰写的“连续滑动接触共轭曲面原理及其应用”一文，提出了创建共轭曲面原理这项任务．1978 年以来，随着我国的国际学术交流活动的加强，作者先后在有关国际学术会议上发表了六篇有关共轭曲面原理的论文，获得国际有关学术界的承认和好评，并引起重视．

共轭曲面原理又是一门具有众多应用领域的技术科学．它对各种机械加工和各类机械传动都具有普遍的指导意义，并借助现代电算技术，可应用于解决广泛的实际工程问题．它可应用于解决复杂齿形曲面和空间凸轮曲面的设计与加工，加工工具的几何轮廓设计，复杂空间机构（包括机械手和机器人）的运动分析、综合和设计，切削加工中切屑几何形状和表面光洁度形态分析，多坐标数控加工和图形显示的程序编制，各种误差引起的精密复杂曲面间的接触状况和传动精度的变化的分析，精密复杂曲面的测量等等．正在开拓中的一个新的应用领域是仿生机械学中的骨骼关节曲面的位置和形状与可实现的运动间的相互关系的分析．

早在 1964 年，作者曾撰写完成《共轭曲面原理》（上册）书稿．原计划于 1966 年由科学出版社出版，后因“文化大革命”干扰，拖延了八年，直至 1974 年才由科学出版社出版．（中册）书稿完成于 1974 年，一直到打倒“四人帮”后，于 1977 年才由科学出版社出版．这两部书稿的基本内容均系“文化大革命”前所写．近十年来，共轭曲面原理有很大发展．从简单共轭曲面发展到广义共轭曲面，由单自由度、简单双自由度发展到广义双自由度和多自由度，由线接触、单自由度点接触发展至有控点接触和多自由度点接触，等等．为适应这些发展，自1978年以来，作者曾在洛阳、太原、西安、上海、武汉、北京等地举办过六期“共轭曲面原理基础”讲学班，并根据讲稿，于 1981 年撰写完成《共轭曲面原理基础

(一)——向量的回转与工程微分几何学》油印书稿，于1982年撰写完成《共轭曲面原理基础(二)——共轭运动学与共轭图形几何学》胶印书稿．现将这两部书稿合并成本书出版，可作为有关专业研究生研读“共轭曲面原理基础”课程用的教材，也可供从事各类机械生产行业的设计、工艺等方面工作的高等学校教师、高年级学生、工程技术人员以及从事应用力学、应用数学、计算数学等方面工作的科研和教学人员参考使用．本书分为向量的回转，工程微分几何学，共轭运动学，共轭图形几何学等四篇，共计十九章．在初次阅读时，带＊号的章节可暂不阅读．

陈志新

1983年2月于上海

目　　录

第一篇　向量的回转

第二篇　工程微分几何学

第三篇 共轭运动学

第四篇 共轭图形几何学

第一篇　向量的回转

第一章　绕单轴回转

§1-1　向量回转的表达式. 设 $\boldsymbol{A}$ 为任一点向量，$\boldsymbol{\omega}$ 为任一单位向量. 令$\boldsymbol{A}$绕 $\boldsymbol{\omega}$ 轴回转 ε 角（按右旋规则决定 ε 值的正负），则可获得一新的点向量 $\boldsymbol{a}$，如图 1-1 所示（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{a}$ 具有相同的原点）. 此种点向量的转换方式称为"向量的回转". 现引入一个新的向量运算符"$\otimes$"，称为"向量的回转"运算符，则新点向量 $\boldsymbol{a}$ 可按下式表达：

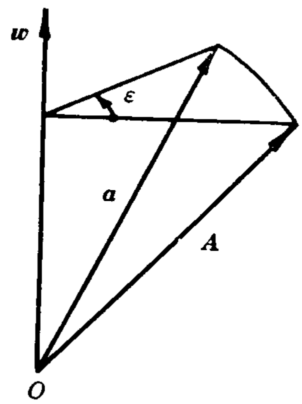

图 1-1　向量的回转

$$\boldsymbol{a} = (\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}. \tag{1.1.1}$$

(1.1.1)式称为向量回转的表达式.

§1-2　三个独立关系式. 回转前后的两向量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{a}$ 间存在着下列三个独立关系式.

1. 由于向量回转时向量的大小没有变动，于是，得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}. \tag{1.1.2}$$

2. 由于向量回转是绕 $\boldsymbol{\omega}$ 轴进行的，向量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{a}$ 与向量$\boldsymbol{\omega}$ 间的夹角保持不变，于是，得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{1.1.3}$$

3. 由于向量 $\boldsymbol{a}$ 是向量 $\boldsymbol{A}$ 绕 $\boldsymbol{\omega}$ 轴转动 ε 转角后的结果，于是 $(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})$ 与 $(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a})$ 两向量间的夹角必须等于 ε，即

$$\frac{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a})}{\sqrt{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})}\sqrt{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a})}} = \cos\varepsilon.$$

利用向量的复混合积公式以及(1.1.2)和(1.1.3)两关系式，并注意到 $\boldsymbol{\omega}$ 为单位向量，上式可简化为

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\cos\varepsilon + (1-\cos\varepsilon)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})^2. \tag{1.1.4}$$

§1-3　向量回转的展开式. 在一般情况下，$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}\neq 0$，从而 $\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}$ 三个向量一般不共面（在 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}=0$ 的特殊情况下，$\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 重合，$\boldsymbol{a}$ 将恒等于 $\boldsymbol{A}$ 而与 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 值无关），因此，在三维空间内，可将 $\boldsymbol{a}$ 展开成如下形式

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{A} + a_2\boldsymbol{\omega} + a_3(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}). \tag{1.1.5}$$

式中的 a_1，a_2，a_3 为三个待定的系数. 利用(1.1.2)，(1.1.3)，(1.1.4)三个独立关系式，可以确定 a_1，a_2，a_3 值如下.

将(1.1.5)式代入(1.1.3)式，并考虑到 $\boldsymbol{\omega}$ 为单位向量，得

$$a_1(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A}) + a_2 = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A},$$

即

$$a_2 = (1-a_1)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A}). \tag{1.1.6}$$

将(1.1.5)，(1.1.6)两式代入(1.1.4)式，得

$$a_1(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})+(1-a_1)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})^2=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\cos\varepsilon$$
$$+(1-\cos\varepsilon)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})^2. \tag{1.1.7}$$

上式化简后得

$$a_1=\cos\varepsilon.$$

将(1.1.7)式代入(1.1.6)式,得

$$a_2=(1-\cos\varepsilon)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A}) \tag{1.1.8}$$

将(1.1.5),(1.1.7),(1.1.8)三式代入(1.1.2)式,得

$$\cos^2\varepsilon(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})+2\cos\varepsilon(1-\cos\varepsilon)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})^2+(1-\cos\varepsilon)^2(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})^2$$
$$+a_3^2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}.$$

上式化简后得

$$a_3^2[(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})^2]=\sin^2\varepsilon[(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})^2].$$

由于 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}\neq 0$, 即 $(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}).(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})=[(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})^2]\neq 0$,
于是,得

$$a_3^2=\sin^2\varepsilon,$$

即

$$a_3=\pm\sin\varepsilon.$$

由于规定按右旋规则确定 ε 值的符号,于是得

$$a_3=\sin\varepsilon. \tag{1.1.9}$$

将(1.1.7),(1.1.8),(1.1.9)三式代入(1.1.5)式,并利用表达式(1.1.1)式,得向量回转的展开式为

$$(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}=\cos\varepsilon\boldsymbol{A}+(1-\cos\varepsilon)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A}))\boldsymbol{\omega}+\sin\varepsilon(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}). \tag{1.1.10}$$

§1-4 展开式的几何推证. 由图 1-2, 可得

$$\boldsymbol{a}=(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}.$$

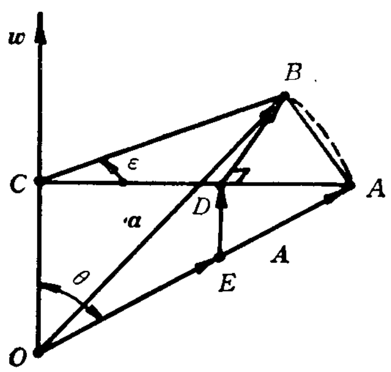

图 1-2 展开式的几何推证

并且可得

$$\overrightarrow{OE}=\frac{|\overline{OE}|}{|\overline{OA}|}\overrightarrow{OA}=\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{CA}|}\boldsymbol{A}$$
$$=\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{CB}|}\boldsymbol{A}=\cos\varepsilon\boldsymbol{A},$$
$$\overrightarrow{ED}=\frac{|\overline{ED}|}{|\overline{OC}|}|\overline{OC}|\boldsymbol{\omega}$$
$$=\frac{|\overline{DA}|}{|\overline{CA}|}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{\omega}$$
$$=\frac{|(\overline{CA}-\overline{CD})|}{|\overline{CA}|}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{\omega}=\left(1-\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{CB}|}\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{\omega}$$
$$=(1-\cos\varepsilon)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{\omega},$$
$$\overrightarrow{DB}=|\overline{DB}|\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}}{|(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})|}=|\overline{CB}|\sin\varepsilon\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}}{|\overline{OA}|\sin\theta}$$
$$=|\overline{CA}|\sin\varepsilon\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}}{|\overline{CA}|}=\sin\varepsilon(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}).$$

于是得

于是，得 $$\boldsymbol{a}=(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}=\cos\varepsilon\boldsymbol{A}+(1-\cos\varepsilon)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{\omega}+\sin\varepsilon\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}.$$

§1-5 向量回转的一些特性.

1. 特性 I.

$$(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}.\tag{1.1.11}$$

(1.1.11)式表明：任一点向量绕其自身(作为旋转轴)回转时，不论转角 ε 多大，最后所得的新点向量仍是该向量本身。此种情况就是 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}=0$ 的特殊情况.

2. 特性 II.

$$(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes(C\boldsymbol{A})=C[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}].\tag{1.1.12}$$

利用(1.1.10)式，将(1.1.12)式两边展开，然后逐项对比，即可获证.

特性 II 的几何意义是：任一点向量先放大 C 倍后再回转，与先回转再放大 C 倍，两者的结果是等同的.

必须注意：

$$(C\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}\neq C[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}],$$

即回转角度放大 C 倍，不等于将向量放大 C 倍；此点必须不与特性II相互混淆.

3. 特性 III.

$$(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}\pm(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{B}.\tag{1.1.13}$$

利用(1.1.10)式将(1.1.13)式两边展开，然后逐项对比，即可获证.

特性 III 的几何意义是：两向量加减后再回转与两向量回转后再加减，两者的结果是等同的.

4. 特性 IV.

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1\boldsymbol{\omega})\otimes[(\varepsilon_2\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}]&=(\varepsilon_2\boldsymbol{\omega})\otimes[(\varepsilon_1\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}]\\&=[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\boldsymbol{\omega}]\otimes\boldsymbol{A}.\end{aligned}\tag{1.1.14}$$

利用(1.1.10)式将(1.1.14)式两边展开，然后逐项对比，即可获证.

特性 IV 的几何意义是：一点向量绕同一转轴（注意是同一转轴，不是不同转轴）先后回转几个转角，只要总转角不变，所得结果与先回转哪个转角，后回转哪个转角无关，与分几次完成总转角无关.

必须注意：当先后绕不同转轴回转时，特性 IV 不能成立，即

$$(\varepsilon_1\boldsymbol{\omega}_1)\otimes[(\varepsilon_2\boldsymbol{\omega}_2)\otimes\boldsymbol{A}]\neq(\varepsilon_2\boldsymbol{\omega}_2)\otimes[(\varepsilon_1\boldsymbol{\omega}_1)\otimes\boldsymbol{A}].$$

5. 特性 V.

$$(d\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}d\varepsilon+\boldsymbol{A},\tag{1.1.15}$$

式中 的 $d\varepsilon$ 为一微分量.

利用(1.1.10)式将(1.1.15)式左边的项展开，并考虑到 $\cos d\varepsilon\approx 1$，$\sin d\varepsilon\approx d\varepsilon$，即忽略二阶及二阶以上微分量，就可获证.

特性V的几何意义是：当回转角很小时，可以将新旧点向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{A}$ 间的增量简单地等于 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}d\varepsilon$，而沿 $\boldsymbol{\omega}$ 及 $\boldsymbol{A}$ 均无增量.

6. 特性 VI.

$$\boldsymbol{\omega}\times[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}]=(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}).\tag{1.1.16}$$

利用(1.1.10)式将(1.1.16)式两边展开，得

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\omega} \times [(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes \boldsymbol{A}] \\
&\quad = \boldsymbol{\omega} \times [\cos\varepsilon \boldsymbol{A} + (1-\cos\varepsilon)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{\omega} + \sin\varepsilon(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})] \\
&\quad = \cos\varepsilon(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}) + \sin\varepsilon\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}),
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon\bar{\omega})\otimes(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}) \\
&\quad = \cos\varepsilon(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}) + (1-\cos\varepsilon)[\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})]\boldsymbol{\omega} + \sin\varepsilon\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}) \\
&\quad = \cos\varepsilon(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}) + \sin\varepsilon\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}).
\end{aligned}
$$

于是,(1.1.16)式获证.

特性 VI 的几何意义是：一点向量绕一转轴先回转 ε 角,然后与转轴向量作向量积,与该点向量先与转轴向量作向量积,然后再绕转轴回转 ε 角,两者所得的结果是等同的.

7. 特性 VII.

$$
[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}]\cdot[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{B}] = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{1.1.17}
$$

利用(1.1.10)式将(1.1.17)式左边各项展开,得

$$
\begin{aligned}
&[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}]\cdot[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{B}] \\
&= [\cos\varepsilon\boldsymbol{A} + (1-\cos\varepsilon)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{\omega} + \sin\varepsilon(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})]\cdot[\cos\varepsilon\boldsymbol{B} \\
&\qquad + (1-\cos\varepsilon)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{\omega} + \sin\varepsilon(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{B})] \\
&= \cos^2\varepsilon\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + 2\cos\varepsilon(1-\cos\varepsilon)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{B}) \\
&\qquad + (1-\cos\varepsilon)^2(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{B}) + \sin\varepsilon\cos\varepsilon[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{B}) \\
&\qquad + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}] + \sin^2\varepsilon(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{B}) = \cos^2\varepsilon\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \\
&\qquad + \sin^2\varepsilon\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}.
\end{aligned}
$$

于是,(1.1.17)式获证.

特性 VII 的几何意义是：两向量绕同一转轴回转相同转角后再作数量积,与此两向量不绕轴回转,直接作数量积,两者所得的数值结果是相等的.

8. 特性 VIII.

$$
[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}]\times[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{B}] = (\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}). \tag{1.1.18}
$$

利用(1.1.10)式将(1.1.18)式两边展开,归并化简后逐项对比,即可获证.

特性 VIII 的几何意义是：两向量绕同一转轴转相同转角后再作向量积,与此两向量先作向量积,再绕相同转轴转相同转角,两者所得的结果是等同的.

9. 特性 IX.

$$
\{[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}]\times[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{B}]\}\cdot[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{C}] = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}. \tag{1.1.19}
$$

利用特性 VIII 和特性 VII 将(1.1.19)式左边的项化简,即可获证.

特性 IX 的几何意义是：三向量绕同一转轴转相同转角后再作混合积，与此三向量不绕轴回转,直接作混合积,两者所得的数值结果是相等的.

10. 特性 X.

$$
\begin{aligned}
&[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}]\times\{[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{B}]\times[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{C}]\} \\
&\quad = (\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})].
\end{aligned} \tag{1.1.20}
$$

利用特性 VIII 将(1.1.20)式左边的项化简,即可获证.

特性X的几何意义是：三向量绕同一转轴转相同转角后再作复向量积，与此三向量先作复向量积,再绕相同转轴转相同转角,两者所得的结果是等同的.

11. 特性 XI.

$$\{[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{A}]\times[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{B}]\}\cdot\{[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{C}]\times[(\varepsilon\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{D}]\}$$
$$=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}). \qquad (1.1.21)$$

利用特性 VIII 和特性 VII 将(1.1.21)式左边的项化简,即可获证.

特性 XI 的几何意义是：四向量绕同一转轴转相同转角后再作复混合积，与此四向量不绕轴回转,直接作复混合积,两者所得的数值结果是相等的.

习　　题

1. 证明特性 I 至特性 V.
2. 证明特性 VIII.
3. 证明特性 IX 至特性 XI.

§1-6　向量回转在坐标变换中的应用.

1. 直角坐标转换矩阵的九个元素. 设O—$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 与O— $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 为两直角坐标系,如图 1-3 所示. 显然,单位向量 $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 中的每一个都可按 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 三方向上的分量展开,即

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{i}'&=a_{11}\boldsymbol{i}+a_{12}\boldsymbol{j}+a_{13}\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{j}'&=a_{21}\boldsymbol{i}+a_{22}\boldsymbol{j}+a_{23}\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{k}'&=a_{31}\boldsymbol{i}+a_{32}\boldsymbol{j}+a_{33}\boldsymbol{k}.\end{aligned}\right\} \qquad (1.1.22)$$

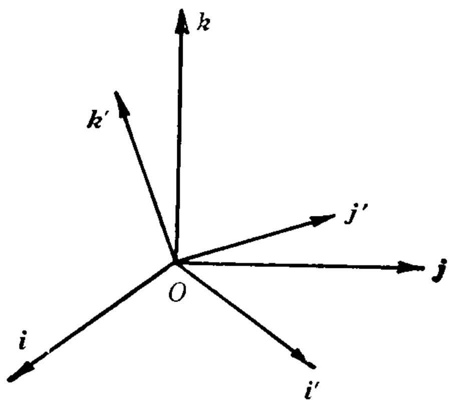

图 1-3　直角坐标系的转换

(1.1.22) 式中的 a_{11}, a_{12}, $\cdots$, a_{33} 共九个系数称为两直角坐标转换矩阵的九个元素. 由于$\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 为单位向量,并且相互垂直,因此,这九个元素并不彼此独立,相互间满足下列六个独立关系式,即

$$\left.\begin{aligned}a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2&=1,\\ a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2&=1,\\ a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2&=1,\\ a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}&=0,\\ a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}&=0,\\ a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13}&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (1.1.23)$$

亦即 a_{11}, a_{12}, $\cdots\cdots$, a_{33} 九个元素中独立参量仅三个.

2. 坐标转换与欧拉角. 两直角坐标系间的转换,可以用三个独立的欧拉角来表述,如图 1-4 所示. 首先,坐标系 O—$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 绕 $\boldsymbol{k}$ 轴回转 ψ 角,使 $\boldsymbol{i}$ 转至新位置 $\boldsymbol{i}''$; 然后,绕 $\boldsymbol{i}''$ 轴回转 θ 角,使 $\boldsymbol{k}$ 转至新位置 $\boldsymbol{k}'$; 最后,绕 $\boldsymbol{k}'$ 轴回转 ϕ 角，获得新坐标系O— $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$.

3. 坐标转换矩阵九元素的欧拉角表达式. 利用"向量的回转"运算符，由图 1-4 可得

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{i}''&=(\psi\boldsymbol{k})\otimes\boldsymbol{i},\\ \boldsymbol{k}'&=(\theta\boldsymbol{i}'')\otimes\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{i}'&=(\phi\boldsymbol{k}')\otimes\boldsymbol{i}''.\end{aligned}\right\} \qquad (1.1.24)$$

利用(1.1.10)式,由(1.1.24)式可推求得

$$\boldsymbol{i}'' = \cos\psi\boldsymbol{i} + \sin\psi\boldsymbol{j}, \tag{1.1.25}$$

$$\boldsymbol{k}' = \sin\psi\sin\theta\boldsymbol{i} - \cos\psi\sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}, \tag{1.1.26}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}' &= \cos\phi\boldsymbol{i}'' + (1-\cos\phi)(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{i}'')\boldsymbol{k}' + \sin\phi(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{i}'') \\ &= (\cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\psi\cos\phi + \cos\psi\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{j} \\ &\quad + \sin\phi\sin\theta\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{1.1.27}$$

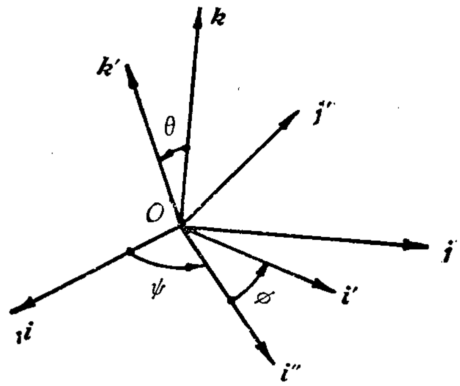

图 1-4　坐标转换与欧拉角

于是,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{i}' &= -(\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\phi\cos\theta)\boldsymbol{i} \\ &\quad + (\cos\psi\cos\phi\cos\theta - \sin\psi\sin\phi)\boldsymbol{j} + \cos\phi\sin\theta\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{1.1.28}$$

将(1.1.26),(1.1.27),(1.1.28)三式与 (1.1.22) 式对比,得坐标转换矩阵九元素的欧拉角表达式为

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi\cos\theta, \\ a_{12} &= \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\sin\phi\cos\theta, \\ a_{13} &= \sin\phi\sin\theta, \\ a_{21} &= -(\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\phi\cos\theta), \\ a_{22} &= \cos\psi\cos\phi\cos\theta - \sin\psi\sin\phi, \\ a_{23} &= \cos\phi\sin\theta, \\ a_{31} &= \sin\psi\sin\theta, \\ a_{32} &= -\cos\psi\sin\theta, \\ a_{33} &= \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.29}$$

§ 1-7　向量回转在推导曲线和曲面的参数方程式中的应用.

1. 圆锥螺旋曲线的参数方程式. 如图 1-5 所示,设有一点向量 $\boldsymbol{R}_0$,其原点在 O',且 $\overrightarrow{OO'} = \boldsymbol{L}$;并设过 O' 点有一单位向量 $\boldsymbol{\omega}$. 点向量 $\boldsymbol{R}_0$ 绕 $\boldsymbol{\omega}$ 轴回转 θ 转角,得新点向量 $(\theta\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{R}_0$;然后沿此新向量方向增长一与 θ 成正比的增向量 $b\theta[(\theta\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{R}_0]$;这样得一以 O' 为原点的点向量为

$$(\theta\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{R}_0 + b\theta[(\theta\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{R}_0] = (1+b\theta)[(\theta\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{R}_0],$$

其中 b 为一常参量(螺旋导程参量). 此点向量的终点是圆锥螺旋曲线上的一个点. 令 θ 取不同值,可获得一系列的点,构成圆锥螺旋曲线. 于是,圆锥螺旋曲线的参数方程式可表达成

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{L} + (1+b\theta)[(\theta\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{R}_0], \tag{1.1.30}$$

式中 θ 为参变量.

设 O'（即锥顶)的坐标为 (l_1,l_2,l_3),即

$$\boldsymbol{L} = l_1\boldsymbol{i} + l_2\boldsymbol{j} + l_3\boldsymbol{k},$$

及 P_0 点的坐标为 (x_0, y_0, z_0)，即

$$\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R}_0 = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k},$$

则 $\boldsymbol{R}_0 = (x_0 - l_1)\boldsymbol{i} + (y_0 - l_2)\boldsymbol{j} + (z_0 - l_3)\boldsymbol{k}$，并设 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{k}$，代入(1.1.30)式，并利用(1.1.10)式展开,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\ &= l_1\boldsymbol{i} + l_2\boldsymbol{j} + l_3\boldsymbol{k} + (1 + b\theta)\{\cos\theta[(x_0 - l_1)\boldsymbol{i} + (y_0 - l_2)\boldsymbol{j} \\ &\quad + (z_0 - l_3)\boldsymbol{k}] + (1 - \cos\theta)(z_0 - l_3)\boldsymbol{k} + \sin\theta \\ &\quad \times [(x_0 - l_1)\boldsymbol{j} - (y_0 - l_2)\boldsymbol{i}]\},\end{aligned}$$

即

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1 + (1 + b\theta)[(x_0 - l_1)\cos\theta - (y_0 - l_2)\sin\theta], \\ y &= l_2 + (1 + b\theta)[(y_0 - l_2)\cos\theta + (x_0 - l_1)\sin\theta], \\ z &= l_3 + (1 + b\theta)(z_0 - l_3). \end{aligned}\right\} \tag{1.1.31}$$

(1.1.31)式为圆锥螺旋曲线(图 1-6)的常用参数方程式，其中参变量为 θ（θ 为动点 P 所在的径向截面与基准径向截面间的夹角)。

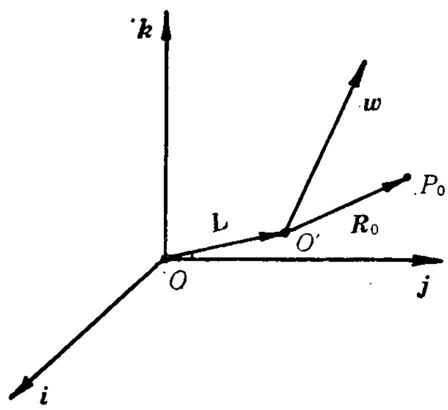

图1-5　圆锥螺旋曲线的初始条件

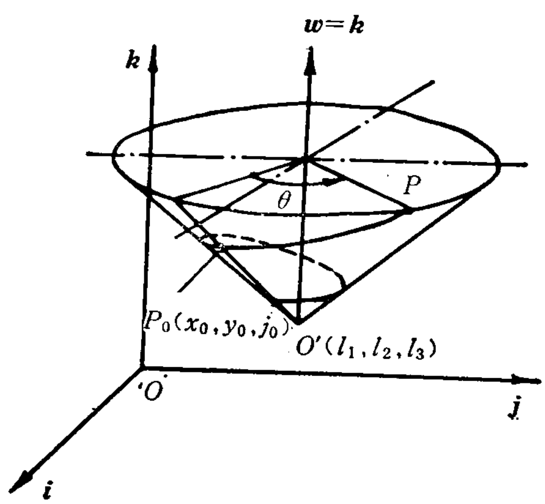

图 1-6　圆锥螺旋曲线

2. 圆锥曲面的参数方程式. 如图 1-7 所示,设 P_0 为圆锥曲面上的初始点，$\boldsymbol{\omega}$ 为沿圆锥曲面轴线的单位向量. P_0 点在 $\boldsymbol{\omega}$ 上的投影点为 O'，即 $\overrightarrow{O'P_0} = \boldsymbol{R}_0$ 垂直于 $\boldsymbol{\omega}$. 过 P_0 点作沿圆锥曲面初始母线的单位向量 $\boldsymbol{s}_0$,则 $\boldsymbol{s}_0$ 必落在 $\boldsymbol{R}_0$，$\boldsymbol{\omega}$ 所组成的平面内,并与 $\boldsymbol{\omega}$ 轴成一锥顶角,设为 ϕ，即

$$\boldsymbol{s}_0 = \cos\phi\boldsymbol{\omega} + \sin\phi\frac{\boldsymbol{R}_0}{|\boldsymbol{R}_0|}.$$

初始母线上任一点相对于 O' 的点向量为 $\boldsymbol{R}_p = \boldsymbol{R}_0 + s\boldsymbol{s}_0$，其中 s 为参变量,代表沿母线方向离 P_0 点的距离. $\boldsymbol{R}_p$ 绕 $\boldsymbol{\omega}$ 轴回转 θ 转角,可抵达圆锥曲面上的任一点. 因此,可写出圆锥曲面的参数方程式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{L} + (\theta\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{R}_p \\ &= \boldsymbol{L} + (\theta\boldsymbol{\omega})\otimes\left[\boldsymbol{R}_0 + s\left(\cos\phi\boldsymbol{\omega} + \sin\varphi\frac{\boldsymbol{R}_0}{|\boldsymbol{R}_0|}\right)\right],\end{aligned} \tag{1.1.32}$$