数理逻辑的思想和方法

昂　扬　编著

复旦大学出版社

数理逻辑的思想和方法

昂 扬 编著

复旦大学出版社

内 容 简 介

本书系统地阐述了命题逻辑和量词逻辑的基本内容，介绍了形式化的逻辑和形式化的思维，同时也论述了非形式化的逻辑和直观逻辑思维；说明了系统内定理的推导原则和技巧，并力图阐明元定理的基本思想；构造了重言式公理系统，也构造了自然推理系统，并证明了两者的等价性。此外，本书对数理逻辑的方法作了尝试性的探索和研究，有些内容贯穿于全书之中，有些则列章专述。

本书避免使用过于烦杂的数学符号和推导，适合具有高中以上文化水平的人阅读，也可作为大学文科的数理逻辑教材。

沪新登字202号

责任编辑 周仲良

数理逻辑的思想和方法
昂 扬 编著
复旦大学出版社出版
（上海国权路579号）
新华书店上海发行所发行 复旦大学印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张7.375 字数217,000
1991年9月第1版 1991年9月第1次印刷
印数 1—4000
ISBN7—309—00668—2/O·93
定价：2.50元

序

数理逻辑是一门符号化、形式化的学科。在非形式化的学科中，一个由单词排列成的语句是否有意义，一个有意义的语句是否为本学科的真理，都由语词或语句的含义来确定。在形式化的学科中，没有自然语言，只有人工符号和符号的排列，人们不必过问符号的含义，仅凭少数操作规则就能确认一个符号排列是否为有意义的语句，以及一个有意义的语句是否为本学科的真理。这种用操作规则来实现语义思考的形式化特征，激起了人们浓厚的兴趣。

然而这种兴趣也使一部分人产生了过于偏爱单纯形式演算的倾向。这种倾向在我国当今数理逻辑的教学中明显地存在着。其表现是：只讲操作规则，不讲操作规则所包含的生动活泼的直观思想；忽视数理逻辑的起因、目的和应用；数理逻辑在一部分人的心目中成了无意义的符号游戏，规则就是一切，不能对规则问一个为什么。这种观点和倾向不利于人们领悟数理逻辑的本质和全貌。

克服这种不良倾向的途径是，不受流行习惯的束缚，选择最能揭示数理逻辑本质的方式，既讲形式化的数理逻辑，又讲逻辑是怎样形式化的；既讲数理逻辑的内容，又讲表现这些内容的方法；既讲基本理论又讲应用。像一名导游，领着大家纵情徜徉于这些秀山丽水的无限风光之中。本书将沿着这个方向作一番探索和努力。

本书在叙述和证明中，避免使用过于烦杂的数学符号和推导，力图勾画出其中的基本思想，适合具有高中以上文化水平的读者阅读。这是一本普及读物，但并不妨碍它成为课堂上使用的教材；主要为文科师生编写，但并不妨碍它成为理工科师生的朋友。

目　录

第一章　数理逻辑与人工语言

数理逻辑之所以引人入胜，主要在于它采用了一整套人工符号，也正因为这个缘故，它又名符号逻辑。人工符号在化学、音乐等领域曾将其身影投射于化学方程式和五线谱，并以其飘逸的身姿获得了人们的青睐。另一方面，正是在数理逻辑这一广阔的天地里人工符号得以大显身手，同时也赋予数理逻辑以强大的生命力。几个不显眼的逻辑符号经过不同排列组合就能表达人类的各种思维规律，进而将人类思维规律囊括在一个系统中。这无疑是人类智力发展史上带有总结性的重大成果。无怪乎，“用人工符号来书写逻辑法则”的设想刚公诸于众时，立即就引起了无数有才干人物的兴趣，激励着不少天才人物为之奋斗终生。而今这个大业终于完成，可是人们对于数理逻辑中的人工语言的好奇心与兴趣仍未了结。人工语言在数理逻辑的发展中起了什么作用？人工语言是否尽善尽美地表达了人类的思维规律？如此等等，这些问题从不同方面说明我们对数理逻辑中的人工语言仍有一个了解和学习的过程。本章将说明数理逻辑怎样随人工语言的完善而完善，以及人工语言赋予数理逻辑什么样的性质。

（一）

现成的一阶谓词演算系统由人工语言和演绎系统两部分组成。人工语言的构造只占很小的篇幅，大量的则是演绎系统的构造，但是这一套简洁精悍的语言经历了漫长的完善过程，在数理逻辑的建立和完善中起了关键作用。

莱布尼兹被尊称为数理逻辑第一创始人。他有一个伟大的设想，就是把思维计算化。“思维”犹如走路，需要遵循某一条路线从出发点

一步一步走向目的地。按照这个设想，科学的发展，争论的解决依赖于思维的正确或刻板的计算。为了实现这个想法，他认为必须设计出一套特殊的语言来表达思维。这套语言类似于数学符号，精确一义，世界洏用，适合计算。莱布尼兹没有最后建成人工语言，但他走过的足迹给后人以重要启示。首先，他从数学中看到了新语言的前景。在数学中有代数式、方程式、方程变形，在逻辑中有概念、判断、推理。莱布尼兹看到了两者本质上的类似。由简单符号 $x,y,2,3$ 通过运算构成代数式"2×3"相当于由简单概念构成复杂概念。若用"2"表示"理性的",用"3"表示"动物"，则 $2\times3=6$，"6"即表示"理性的动物"。由公式构成方程式，相当于由概念构成判断。在"$3x=9$"中，如把"="看成"是"的作用，它就变成"3x是9"这个判断了。最后，解方程过程相当于三段论，如

$$\begin{array}{c} x+y=10 \\ \underline{\quad y=4 \quad} \\ \therefore x=6 \end{array}$$

莱布尼兹这一深刻见解，无疑说明了这样一点：即用自然语言表达的三段论与用符号表达的数学，本质上不过是同一种思维活动。由此他设想建立更普遍的语言，从语法上刻划各种真理。其次，他提出了普遍语言的原则是先设计出思想字母，通过字母运算构成复杂概念的符号，复杂概念的符号本身不是概念，但同相应事物保持类似的结构；最后用字母、等式排成一串作为句子符号，句子符号本身不是句子，但两个符号串之间应具有两个句子之间的某种关系。这些见解和原则是逻辑史上的宝贵遗产、一直照耀着后人前进的方向。如果说莱布尼兹没有获得成功的主要原因在于他没有创造出具体的运算符号，那么布尔则越过了这一大关。

布尔被称为数理逻辑的第二创始人。亚里士多德为他准备了三段论逻辑，莱布尼兹为他拟定了人工语言的方案，布尔的研究目标十分明确，即用人工语言改写三段论逻辑，使之成为演算系统。他成功了，建立了逻辑史上第一个逻辑演算系统，布尔的名字也和布尔代数这一学科一起永存不朽。布尔的工作可以分解成下列几个要点。

1. 用 x,y 表示事物类，特别用“1”表示全类，“0”表示空类。

2. 创造出 $\cap$（交）、$\cup$（并）、$'$（补）三种运算符号。它们分别由算术中 $\times$（乘）、$+$（加）、$-$（减）移植而来。莱布尼兹等人虽然明确意识到思维运算不外乎加减两种，但终究没有创造出符号实现这一想法，布尔把这些算子先作用在类上，事情也就容易得多了。

有了这两种符号，亚里士多德命题（全称肯定命题 A，全称否定 E，特称肯定 I，特称否定 O）可以清楚地表示如下：

全称肯定命题 A：$x(1-y)=0$（所有 x 是 y）；

全称否定命题 E：$xy=0$　　（所有 x 不是 y）；

特称肯定命题 I：$xy\neq 0$　　（有 x 是 y）；

特称否定命题 O：$x(1-y)\neq 0$　（有 x 不是 y）。

3. 为并交补运算子制定使用规则，如：

$$xy=yx, x\cup y=y\cup x, \quad z(x\cup y)=zx\cup zy, xx=x^2=x。$$

由 $x^2=x$，可得 $x(1-x)=0$，它清晰地表示了类的不矛盾律，即不存在既在 x 中又不在 x 中的元素。

4. 创造了布尔方程。由 $y(1-z)=0$ 及 $x(1-y)=0$ 可以消去 y，解得 $x(1-z)=0$。即用演算的方法从“所有 y 是 z”并且“所有 x 是 y”得出“所有 x 是 z”。

5. 布尔还对自己的系统作了命题、概率等方面的解释。

从人工语言方面看，布尔比莱布尼兹究竟前进了多少？任何一种语言都有语法和语义两个方面。自然语言似乎偏重语义，代数公式则偏重语法。但是自然语言有语法方面，代数公式有语义方面，每一个孤立方面都不是语言，只有两者结合才构成语言的概念。莱布尼兹高明之处在于从语法方面看到代数符号和自然语言之间的类似，从而提出普遍语言的设想；布尔却从语法和语义两个方面看问题，他看到语法规则受语义内容的制约，若修改了语法规则也就改变了语义内容。这样，代数语言便可以移植为逻辑语言，只需适当修改语法规则即可。

布尔先把代数学看成语法学，这时候他比以往数学家更抽象。在以往数学家眼里，$x+y=y+x$ 表示第一个数量与第二个数量之和等

同于第二个数量与第一个数量之和。但是在布尔眼里，x,y 不再是数，“+”不再是求和的运算，$x+y=y+x$ 仅仅表示“+”这个算子所服从的语法规则。换言之，$x+y=y+x$ 在布尔眼里只是一串符号 $p\circ q=q\circ p$。其中 x,y，“+”并没有什么意义，意义是人们另外加上去的。它可以解释成数量之和的规则，也可以解释成“属于 x 或者属于 y 等同于属于 y 或者属于 x”。

其次，布尔又从语义上观察代数学。他认识到语法规则是由语义内容来决定的。为什么我们规定 $x\circ y=y\circ x$，这是因为当初我们心目中把“$\circ$”看成数量和的运算。为什么规定 $x\circ x=x^2$？这是因为我们心目中把“$\circ$”看成乘法运算，因此，如果我们想把“$\circ$”看成求类的共同元素之运算，则我们有权规定 $x\bigcirc x=x^2=x$。

正因为布尔从两方面看问题，使之具有人工语言的完善因素，所以他才能把代数学上的运算“+”，“-”，“×”成功地移植到逻辑上，接着又对自己的逻辑演算作了多种不同的解释。事实表明，逻辑成就与人工语言的造诣有着密切关系。布尔的语言有很大的局限性，它只对应自然语言中主谓式的一类，在语义上以概念外延关系为依据，因而在逻辑上属亚里士多德学派。它不能书写“马是动物，所以马头是动物的头”，“每个人都有自己的双亲”等逻辑命题。从布尔时代跨入弗雷格时代，人们还需要努力攀登。

弗雷格以构成历史上第一个严格的一阶谓词演算系统而被称为数理逻辑的第三创始人。数学内容有两部分，一部分是数学定理，另一部分是建立数学定理的逻辑原则。弗雷格的研究方向是创造一种人工语言，将这两部分同时表达出来，将隐藏的逻辑法则明显地表现出来，将数学定理作为逻辑的延伸构造出来。弗雷格获得了全面的成功。他在人工语言方面主要有三大贡献。

弗雷格一改莱布尼兹、布尔等人以概念的外延为基础构造主谓命题、改写三段论的老套，而以命题为单位，构造更复杂的命题。两个命题就真假情况而言不外四种：

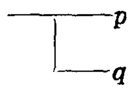
p 真　　q 真

p 真　　q 假

p 假　　q 真

p 假　　q 假

任何由 p,q 组成的复合命题都可以从这四种情况出发得到研究。他用



表示第三种情况不发生(即 $q\to p$)。他用

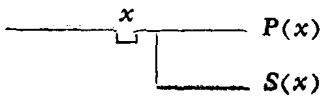
表示与 p 相反(即 $\neg p$)。这样，弗雷格首创真值函项理论，并把联结词节省到最小完备系统。在逻辑史上存在着亚里士多德三段论和麦加拉派的命题逻辑，人们一直重视前者而忽视后者，可是一旦要把一切演绎推理规则组织在一个系统之中时，后者就显得比前者重要得多，弗雷格创造这两个符号，为他构造统一的大系统奠定了语言基础。

弗雷格另一个重大贡献是命题函项理论。这是把数学上“函数”概念应用到逻辑上的结果。一元函项 $F(x)$ 相当于“x 是 F”类型的性质命题，两元函项 $G(x,y)$ 相当于“x 与 y 具有 G 关系”类型的关系命题，因而函项是性质和关系的概括，是突破传统的主谓式语句的有力工具。命题函项的基本思想是把真值函项命题中的主谓词分离开来，两种符号汇合在一起预示着命题逻辑和三段论将溶化在一个更大的系统中。

最后，弗雷格创造了约束变项，这无疑是逻辑史上一个里程碑。他用

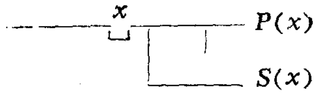
表示所有 x 是 F。有了这个符号，量词的运算才有可能。两个真值函项符号和这个全称量词符号，可将一切数学命题加以翻译。为了使用的方便，后人将弗雷格的两维平面符号改成一维符号。例如亚里士多德命题可以表示如下：

所有 S 是 P



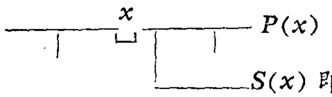
即 $(x)(S(x)\to P(x))$

所有 S 不是 P



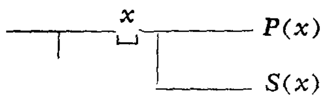
即 $(x)(S(x)\to\neg P(x))$

有 S 是 P



即 $\neg(x)(S(x)\to\neg P(x))$

有 S 不是 P



即 $\neg(x)(S(x)\to P(x))$

人工语言的构造，到弗雷格的阶段已经大功告成。三个逻辑符号却具有极强的表达能力。自然语言之丰富多样却可以归之于几个符号的不同排列；逻辑规律之深刻却可以用这几个符号将其清晰地外露。正是这样强大的工具帮助了数理逻辑学家完成了逻辑改革，创立了第一个严格的一阶谓词系统。每一门科学的诞生都有其特殊的经历，欧几里德几何学是在已经具有大量几何定理基础上系统化而成的，罗巴契夫斯基几何学是在五条公理之下演绎而得的。有趣的是数理逻辑是在建立一套适合自己的语言过程中逐步形成的。

（二）

莱布尼兹致力于思维计算化，布尔专攻三段论的代数化，弗雷格则集数学与逻辑为一身。任务不同，手段相同，即建立人工语言。现在，我们来讨论人工语言赋予数理逻辑什么样的性质。

每一门科学的性质并不是绝对客观的。它与所研究的对象、手段、使用的语言都有关系。在数理逻辑中扮演主角的逻辑符号不能不给予这门学科以影响。

让我们从一个具体的推理说起。

如果所有的阔叶植物都是落叶的，
并且所有的葡萄树都是阔叶植物，　　　（1）
那么所有的葡萄树都是落叶的。

这是人人共晓的推理。可是要说明这个推理为什么正确，也即说明我们在进行推理时所依据的原则是什么，却十分困难。也许可以从因果律方面看，这个推理说明了葡萄树所以是落叶的原因；也许可以从内在必然性方面看，这个推理说明了葡萄树是落叶的必然性。但是，逻辑学不回答这样的问题。在逻辑学上没有“葡萄树”、“落叶的”、“阔叶的”等具体词项。逻辑关注普遍性的东西，要最大限度推广其有效性。首先，这个推理的有效性与“葡萄树”无关，“葡萄树”可用 S 来代替，即

如果所有阔叶植物都是落叶的，

并且所有 S 都是阔叶植物，

那么所有 S 都是落叶的。

其次，这个推理的有效性与“阔叶植物”无关，它可用 M 来代替，即

如果所有 M 是落叶的，

并且所有 S 是 M，

那么所有 S 是落叶的。

最后，这个推理的有效性与“落叶的”无关，它可用 P 来代替即

如果所有 M 是 P，

并且所有 S 是 M，　　(2)

那么所有 S 是 P。

至此，由于追求普遍性，我们由（1）进入（2），由具体进入形式。在三段论中，这个推理依据于五条基本规则而有效。我们不知道 S,M,P 的具体内容，但这个形式符合五条规则，故而有效。

但是弗雷格认为，“所有 S 是 P”仅仅是“所有葡萄树是落叶的”语法形式，不是它的逻辑形式。从语法上看，单称和全称是同一语法结构，但是单称可用观察的办法来证实，全称一般则不可用观察的办法来证实，全称涉及到不完整的函项，单称则是完整的命题。因此必须用人工语言加以重新表示：

如果 $(x)(M(x)\rightarrow P(x))$，

并且 $(x)(S(x)\rightarrow M(x))$，　　(3)

那么 $(x)(S(x)\rightarrow P(x))$。

(3) 的有效性并不是五条规则，而是由两个前提通过量词演算达到结论（先消去全称量词，再引入全称量词）。这样，我们由（2）进到（3），由形式进到形式化，由规则进到演算。

（3）比（2）更普遍。“所有 S 是 P”仅仅是“所有葡萄树是落叶的”的语法形式，其中 S 只在“葡萄树”这个范围内生效。倘若世上没有葡萄树，（2）无意义，倘若不在葡萄树范围内讲话，则（2）也无意义。而 $(x)(S(x)\to P(x))$ 不仅仅在葡萄树范围内有意义，在一切范围内都适用。我用手指着桌子上钢笔说“如果它是葡萄树，那么它是落叶的”（这里“如果，则”是人工语言“$\longrightarrow$”的含义）。这句话是有意义的，而且取值为“真”。

（3）比（2）更精确。（2）没有脱离（1）这个原型，它是许许多多（1）的共同语法形式，（3）已经完全离开了（1），它由人工语言本身的性质来决定其有效性。正因为（3）远离（1），因而就产生（3）是否正确反映（1）的问题。笔者同意这样的观点：（3）不是（1），（3）不能代替（1）。（3）是数理逻辑内容，（2）和（1）不是。因此数理逻辑的一个重要性质即是形式化。它因追求普遍性和精确性而产生，最后因采用人工语言而铸成。我们不能说推理本身是形式的、形式化的，但我们可以说数理逻辑是形式化的。

数理逻辑另一个重要性质是外延性。为了达到形式化，我们必须彻底地外延化。对于“所有葡萄树是落叶的”，逻辑学早就不将它看成葡萄树具有落叶性质，而是看成“葡萄树”这个“种”包含在“落叶”这个属之中。量化以后，这个特点更加明显：任何个体，如果它在葡萄类中，则在落叶类之中。弗雷格将外延理论引伸到判断理论。他认为判断的含义是内涵的，判断的真假值则是外延的。任何由两个判断组成的复合判断都可以由真真、真假、假真、假假四种情况得到研究。这样的研究使人工语言脱离了自然语言，使数理逻辑外延化。让我们再选一个例子来说明。

如果书包的影子在，那么书包在。　　（4）

用自然语言的语法结构来表示：

如果 A，那么 B。　　（5）

用人工语言来表示：

$$p\rightarrow q \qquad (6)$$

(4) 为真的理由是什么？是经验，或是科学原理。(5) 是(4)的语法形式，是一类可由前件“推知”后件的条件句的共同形式。(6)则按外延来确定其真假。例如，当我根本看不到影子的时候，或者回过头来已经看到书包的时候，我可以说：“如果书包的影子在，那么书包在。”总之，在前件假或后件真时，认定一个实质蕴涵命题为真。据此，有人说 (6) 不是 (4)，数理逻辑中的 (6) 是对自然语言 (4) 的歪曲。这种批判性的意见从一方面说明了数理逻辑是外延的。

人工语言赋予数理逻辑以形式化、外延化的特征，因此在数理逻辑中不出现特殊的词项，代之以真值函项、命题函项，而我们却可以根据语言的句法断言某个真值函项永真，某个命题函项普遍有效。从这个意义上来看，数理逻辑不是关于思维规律的科学，而是关于人工语言用法规则的科学。然而数理逻辑不是象棋游戏，人们并不指望从象棋游戏中得到生活方面的教益，却对数理逻辑寄予厚望。正如我国数理逻辑学家莫绍揆先生说，一切科学不外连续和离散两种，离散的都与数理逻辑结下了不解之缘。关键问题是怎样认识和使用人工语言。

由于数理逻辑的产生，可供我们享用的就有两种语言：各民族专用的自然语言和人类共同使用的人工语言。这是两种不同的语言，但并不是英语和汉语之间的不同，一切自然语言都可以通过互相翻译“等值替换”，而自然语言与人工语言之间的不同是两种层次间的差别。前者是陈述事实的表层语言，后者是揭示逻辑结构的深层语言。为了陈述事实，必须有具体的词项，或者说具体的人、时间、具体的事，希望通过对“书包影子”存在的思考达及对“书包”存在的思考。而人工语言为了揭示不同自然语言的共同逻辑结构，则必须使用变项。词项消失了，具体内容消失了，代之而起的是逻辑常项和变项。逻辑常项的语义正是一类自然语言逻辑结构的象征。例如，我们用“$p\rightarrow q$”这个符号来表示“前件假或后件真”这类语句的逻辑结构。因此上文中(6)式与(4)式不是两种可以一一对应的关系，而是一对多的对应。

看不清这个根本特点就会在（6）式与（4）式差别面前感到疑惑和诧异，并且会失言道：（6）式是（4）式的歪曲反映。（6）式不是（4）式，并且一般地，人工语言中的变项与常项都不是自然语言中相应物的替代，而是某种表示。（6）式抛弃了（4）式的具体内容，保留了它的逻辑结构。（6）式与（4）式从两个不同的层次描述了同一个世界。孤立地比较（6）式与（4）式意义不大。假设我们面前有三个自然语言，因而也就有了三个人工符号：

如果书包的影子在，那么书包在 $p \to q$；

书包的影子在 p，

书包在 q。

显然，左面三句话之间的某种关系在右面三个符号之间被保留下来了。就每一个符号看，它们都是“歪曲地反映”了相应物，然而总体上人工语言正确地揭示了三个自然语言之间的某种关系。由此可见，简单的人工语言符号“$\longrightarrow$”只不过是中介物，它们的作用要从一串符号中得到实现，如果不是这样看问题而拘泥于(6)与(4)的比较，我们就太机械了。正因为人工语言具有揭示逻辑结构的特殊功能，它才能将正确推理外露化。例如：“我不读报，所以我读的不是报”是一个正确推理，但总觉得这个推理不够清楚。如果翻译成人工语言，那就确信无疑了。因为下式的有效性是十分直观的：

$$(x)(x\text{是报纸} \to \neg R(i,x)) \to (x)(R(i,x) \to x\text{不是报纸})。$$

有些真理的逻辑结构已经外露，那么翻译后便是逻辑真理，这时候它更加明显；有些真理的逻辑结构尚未外露而深藏在内涵之中，只要把结构从涵义中解放出来，也可显示逻辑真理。例如“每个人都有自己的双亲”，这就需要把“双亲”的内涵展开，然后再作翻译，其逻辑真理面貌可见。即便是一些深藏不露的内涵真理，只要将内涵充分展开，也可以用人工语言表示并得到检验。例如，当你断言“如果书包的影子在，那么书包在”时，你一定有所依据和论证，例如，由 A 可推 B_1，由 B_1 可推 B_2，…，由 B_n 可推 B，这样，$((p \to q_1) \wedge (q_1 \to q_2) \wedge \cdots \wedge (q_n \to q)) \to (p \to q)$ 就是逻辑真理。

数理逻辑从一开始启用人工语言时，似乎就犯下了“概括过宽”

的错误。它想用“$p \to q$”来表示一切充分条件假言判断，其结果是某些“前件假或后件真”的实质蕴涵表达式却不是相应的充分条件假言判断；它想用重言式来表示一切有效推理，其结果是某些重言式却没有资格对应为有效推理，一句话，为了“穷尽”、“完全”，我们的理论过宽了些。为此我们才辩护道，$p \to q$ 只是中介物，只有重言式才是有效的；为此希尔伯特才论证道，系统里的重言式有些只是理想元素，整个理论体系才是有意义的；为此哥德尔才证明，系统里的重言式确实多了些，但却不自相矛盾，系统内部是协调的。这个错误究竟有多大？我国逻辑学者看法不一，并且展开了有益的讨论。这里有三条界限。第一，认清人工语言有效性的范围，但这不是束缚住人工语言的手脚，而是为了更加自如地运用它。第二，可以为数理逻辑提供一个哲学基础和方法论说明，但这不意味着宣判数理逻辑是错误理论，而是为了推广这些方法。第三，允许一些人构造新的逻辑，以期百花齐放，但这并不表明数理逻辑已经过时。

第二章 真值函项

20世纪之前，数理逻辑学家一直围绕着一个中心在积极活动：这就是如何使直观思维变成演算性质的科学。数学已经将关于数与量的思维变成了演算科学，但是数学上这一成就并没有构成日常思维与计算化之间的通道。相反，它成了隔绝日常思维与计算化的一堵高墙，一切思维对象被截然地分成两种不同的性质：数量的与非数量的。布尔推翻了这堵高墙的一部分，成功地将三段论这个本不属于数量的日常思维改写成计算性质的数学系统。但由于这系统仅仅适用于主谓结构的日常思维，因此局限性较大。如何在更大的范围内将非数学对象转化为数学对象？弗雷格摘取了这个大课题的桂冠。他创造了真值函项理论，从而把相当宽广的日常语言变成了可演算的数学语言，在更大范围内实现了日常思维计算化的目的。本章任务是阐述真值函项理论并简评其优劣。

(一)

与真值函项理论有关的逻辑思想是外延理论。外延理论给予逻辑学家重大帮助，这在逻辑史上并不鲜见。布尔依靠外延理论才完成了他的演算系统，弗雷格也是在发展了外延理论的基础上才创造了真值函项理论。他认为主项不同而谓项相同的两个句子，仅当这两个主项外延相同时，其真假不变。如果“晨星是恒星”是真的，那么“昏星是恒星”也是真的。因为这里的两个主项的含义虽不同，但其外延相同。弗雷格进一步把外延理论由概念推广到判断。他认为一个判断有许多含义，但从外延上看只有真、假两种。这个看法并没有为后人接受，因为“真”句子所对应的事实不相同，真句子的结构也是大不相