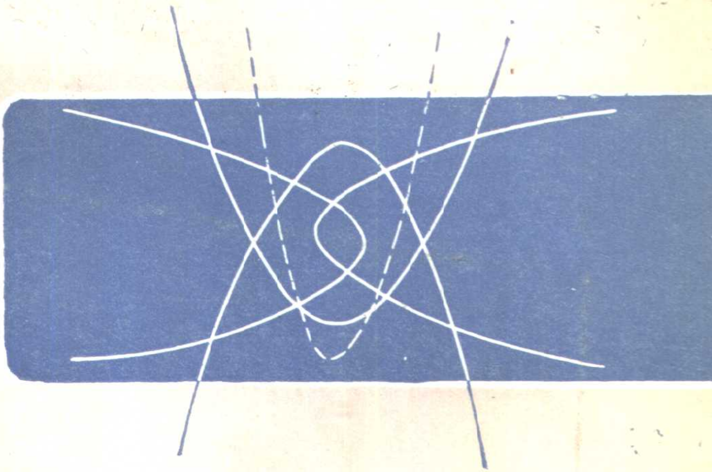
高中数学总结辅导

主编 翟 连 林



数学自学丛书

中国农业机械出版社

数学自学丛书

高中数学总结辅导

主编　翟连林

编者　郝雨淋　岳荫巍　艾友光
翟录红　甄颖华

中国农业机械出版社

内容简介

本书是"数学自学丛书"之一.

本书是主编翟连林同志把近年来在北京电视台数学讲座中播讲的讲稿及辅导高中毕业生进行总复习的讲稿经过整理、加工、补充而写成的. 内容包括：深刻理解数学概念；牢固记忆定理、公式和法则；熟练掌握重要数学方法；灵活运用数学基础知识；提高解数学综合题的能力. 第六部分为综合训练题（共十五组并附答案或提示），供读者检查自己掌握高中数学的实际水平. 为使读者特别是广大自学青年了解大学（包括电视大学等）招生对数学的要求，在书末还附有1980～1983年高考（包括电视大学）招生的数学试题（附解答或提示）.

本书可供自学青年、职工、高中学生和中学数学教师参考.

高中数学总结辅导

主编　翟连林

*

中国农业机械出版社出版

北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

*

787×1092 1/32 开 22 印张 488 千字

1984年3月北京第一版 · 1984年3月北京第一次印刷

印数：000,001—283,000 定价：2.05元

统一书号：7216 · 64

前　言

为了使我们伟大的社会主义祖国，尽早地实现四个现代化的宏伟目标，需要培养和造就大批又红又专的各种人才．诚然，通过各级各类学校是培养人才的主要渠道；但是，通过自学也是培养人才的一个不可忽视的重要途径．

为了帮助广大自学青年学好中学数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们参照现行普通中学数学教材、工农业余中学数学教材，结合自学的特点，编写了这套“数学自学丛书”．

这套丛书包括：《初中代数双基训练》、《高中代数双基训练》、《平面几何双基训练》、《立体几何双基训练》、《平面三角双基训练》、《平面解析几何双基训练》、《概率统计与逻辑代数双基训练》、《一元微积分双基训练》、《初中数学总结辅导》和《高中数学总结辅导》共十本．

自学没有教师指导，缺乏“双基”训练．针对这种情况，我们在这套丛书的各册中，首先帮助读者系统地归纳和总结数学基础知识；其次是通过对典型例题的分析、解答和评注，帮助读者巩固概念，熟悉定理、公式和法则，提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及运用数学来分析和解决实际问题的能力．为了便于自学，对于书中的练习题都给出了答案或提示．

这套丛书是由北京、福建、江苏、河北、河南、吉林等省、市的二十多位在大学讲授基础课的教授、讲师，在中学

具有多年教学经验的数学教师和教研室的教研人员共同编写而成的.

这本《高中数学总结辅导》是主编翟连林同志把近年来在北京电视台播讲的数学讲座稿以及辅导高中毕业生进行数学总复习的讲稿（该讲稿曾在《长春科技报》连载）经过整理、加工、补充而成的. 编写本书所遵循的基本原则是：强调基础，重视方法，突出能力. 在编写过程中，作者参阅了大量书籍、杂志，选用了全国许多地方的综合练习题，在此对有关作者表示衷心的感谢. 在本书的编写过程中，北京密云县北庄中学刘尚宽，上海黄浦区教师进修学院余颂萱、浙江嘉善县教育局教研室余新耀、湖北天门县教育局教研室郭章华、江苏淮阴市教育局教研室李思文以及陈伟侯、段云鑫、刘千章等同志提供丰富的资料，进行认真的审阅，付出了辛勤的劳动，在此一并表示衷心的感谢.

由于我们的水平有限，编写的时间也仓促，书中的缺点、错误在所难免，敬请广大读者批评指正.

编者

1983年7月

目　　录

引　言

大家结束了高中数学课程的学习，为了使所学的知识进一步巩固和提高，使之条理化和系统化，需要通过复习进行全面地总结．我感到在复习中应注意以下六个问题：

一、深刻理解数学概念．

二、牢固记忆重要定理和公式．

三、熟练掌握重要数学方法．

四、灵活运用数学基础知识．

五、努力提高分析和解决综合题的能力．

六、有目的地进行综合训练。

下面就按这个顺序谈谈我个人的一些不成熟的意见，供大家在复习中参考．

一、深刻理解数学概念

我们知道，数学概念是现实世界中空间形式和数量关系及其特有属性（或本质属性）在思维中的反映．正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提，是学好定理、公式、法则和数学方法以及提高解题能力的基础．但是，不少同学无论是在平日的学习，还是在复习中，对深刻理解数学概念的重要性认识不足，因此，在作业中出现各种各样概念性错

误.

比如，若 $a<0$，化简 $|a-\sqrt{a^2}|$.

不少学生得0．反映出他们对算术根和绝对值的概念都是模糊的．有的学生算术根概念清楚，绝对值概念不清楚会得到 $2a$ 的结果．只有算术根和绝对值的概念都清楚，才能得到正确的结果 $-2a$．具体化简过程如下：

$$\begin{aligned}|a-\sqrt{a^2}| &= |a-(-a)| \text{（算术根概念）}\\ &= |2a|\\ &= -2a \text{（绝对值概念）}\end{aligned}$$

又如，解方程：$|x|+x=1+3i$（$x\in$ 复数集 C）．

有的学生得 $x=-4+3i$，有的学生得 $x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，哪个对？还是都不对？我们说，前者对，后者错．错的原因是把实数范围成立的等式：$|x|^2=x^2$，搬到复数范围造成的．后者求解的过程是：

移项，两边平方得

$$x^2=(1+3i)^2-2(1+3i)x+x^2$$
$$\Rightarrow 2(1+3i)x=(1+3i)^2$$
$$\Rightarrow 2x=1+3i.$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i.$$

正确解法是：

设 $x=a+bi$，原方程变为

$$\sqrt{a^2+b^2}+a+bi=1+3i.$$

根据复数相等的条件，得

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}+a=1,\\ b=3.\end{cases}$$

解之，得 $a=-4$，$b=3$，

$$\therefore \qquad x=-4+3i.$$

这种错误在高考试卷中反映得更突出．比如1983年高考出了一道考查异面直线概念的试题：

两条异面直线，就是指

（A）在空间内不相交的两条直线．

（B）分别位于两个不同平面内的两条直线．

（C）某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线．

（D）不在同一平面内的两条直线．

要求考生作出正确的选择．有的考生由于抓不住异面直线概念的实质，把“在空间内不相交的两条直线”误认为是异面直线．

又如，在1982年的考生中，不少人对于“求使函数 $y=\sqrt{-x^2}$ 有意义的 x 的实数范围”这样简单的概念题都不会作答．有的考生竟答成“没有使 y 有意义的 x 值”．说明这些考生对算术根、完全平方数的概念根本没有掌握，错误地认为“$-x^2$”只能是负数，而忘记了还可能得0．有的考生尽管也知道 $-x^2\geqslant 0\Rightarrow x^2\leqslant 0\Rightarrow |x|\leqslant 0$，但由于绝对值的概念不清楚，不知道这里的“$<$”号不成立．因此，得不出 $x=0$ 的结论．有的考生得出了正确结论，他想用集合的符号表示，但又由于对空集的概念不清楚，把 $x=\{0\}$ 错写成 $x=\{\phi\}$．从这里又使我联想到1981年高考出了这样一道试题：

设 $A=\{$有理数$\}$，$B=\{$无理数$\}$，试写出 $A\cap B$．

由于一些同学平时对有理数、无理数这些基本概念重视不足，竟把 $A\cap B=\phi$ 写成 $A\cap B=A$，$A\cap B=B$．

有些考生尽管有理数、无理数的概念清楚，但由于对集

合的概念和表示符号不清楚，又出现$A\cap B=0$，$A\cap B=\{\phi\}$，$A\cap B=\{0\}$等错误．这反映出不少考生对于数学符号“ϕ”、$\{0\}$、“0”是含混不清的．

我们知道，“0”是数，不是集合，它只能是某一集合中的元素．$\{0\}$和ϕ都是集合，但ϕ是不含任何元素的集合，而$\{0\}$则是含有一个元素的集合，而且这个元素是0．它们之间的关系是：$0\in\{0\}$，$0\notin\phi$，$\phi\subset\{0\}$．

再如，1980年高考，出了这样一道考题：

将多项式x^5y-9xy^5分别在下列范围内分解因式：

（1）有理数范围；（2）实数范围；（3）复数范围．

许多考生由于对多项式因式分解这个概念，以及对有理数、实数、复数的概念不清而出现各种各样的错误．有的考生在有理数范围内分解成：

$$x^5y-9xy^5=xy(x^4-9y^4).$$

在实数范围内分解成：

$$\begin{aligned}x^5y-9xy^5&=xy(x^4-9y^4)\\&=xy(x^2+3y^2)(x^2-3y^2).\end{aligned}$$

在复数范围内分解成：

$$\begin{aligned}x^5y-9xy^5&=xy(x^2+3y^2)(x^2-3y^2)\\&=xy(x+3yi)(x-3yi)(x^2-3y^2).\end{aligned}$$

有的考生只会在复数范围内分解，对于在有理数和实数范围只字未写，让三个数的范围给吓住了．更有的考生在卷面上竟然写道：在复数范围内，可以无止境地分下去．可见，这些考生对因式分解的概念以及数的概念糊涂到何等程度！

我还记得，在1979年，高考出了一道应用百分浓度概念求解的试题．不少考生由于平日不把这些简单概念放在眼

里，作题时就由已知纯酒精与水重量之比为 $m:n$，推出混合后溶液的浓度为 $\frac{m}{n}$. 一念之差，使全题一错到底.

我们知道，数学概念是数学思维的细胞，只有概念清楚，才有可能形成运算的技能和技巧，也才有可能提高解题的能力. 否则，概念不清，必然造成思维混乱，错误百出. 拿1981年高考理工农医类第八题来讲，许多考生不会做，有人说这是由于综合性强，难度大，对空间想象能力要求高造成的. 我认为最根本的原因还是由于概念不清造成的. 这道试题是：

在 120° 的二面角 $P-a-Q$ 的两个面 P 和 Q 内，分别有点 A 和点 B. 已知点 A 和点 B 到棱的距离分别为 2 和 4，且线段 $AB=10$（如图 1）.

（1）求直线 AB 和棱 a 所成的角；

（2）求直线 AB 和平面 Q 所成的角.

解答这个题目，首先碰到的是异面直线的概念、异面直线所成角的概念以及直线和平面、平面和平面所成角的概念. 如果这些概念不清楚，其他无从谈起. 从考生的答卷来看，对于（1）小题，许多考生由于对异面直线的概念不清楚，把 AB 和 a 看成在同一平面内，结果以 AB 与 a 相交所

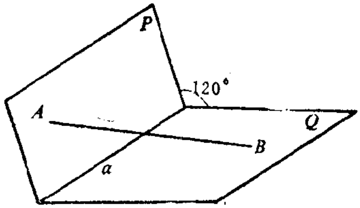


图 1

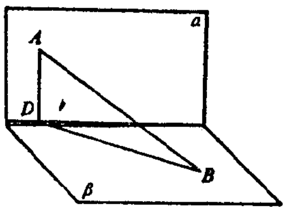


图 2

成的角作为异面直线 AB 与 a 所成的角. 由于这一概念错误，以下的推理、计算都是“白做工”.

（2）小题是求直线与平面 β（即 Q，下同）所成的角. 许多考生尽管知道 AB 与平面 β 所成的角是 AB 与它在平面 β 内的射影所夹的角，但在作图过程中，由于过平面外一点作平面的垂线的概念没有掌握，把从 A 点作棱 a 的垂线 AD 错误地认为是平面 β 的垂线（如图 2），把 $\angle ABD$ 当成了 AB 与平面 β 所成的角. 由于这一概念性错误，以下的推理、计算也都是“白做工”. 由此可见，“概念不清，寸步难行.”即使继续推演下去，也是在作无用之功.

通过上面的分析我们看到，掌握数学概念是非常重要的. 因此，同学们在复习中一定要把深刻理解数学概念放在重要地位.

在中学数学中，我们学过哪些重要的数学概念呢？概括起来有：

数轴、绝对值、算术根的概念；复数、实数和虚数，有理数和无理数的概念；方程和恒等式的概念；函数和反函数的概念；指数与对数的概念；排列、组合以及加法原理和乘法原理；导数与微分的概念；积分的概念；任意角三角函数的概念；弧度的概念；对称图形的概念；四种命题的概念；空间直线的位置，二面角及其平面角的概念；线线、线面所成角和公垂线的概念；射影的概念；直线的倾斜角和斜率的概念以及椭圆、双曲线、抛物线的定义等等.

为了深刻理解这些重要的数学概念，大家在复习中要认真阅读教材，领会概念的含意，并通过做一定数量的练习题，加强对概念的理解，澄清对一些概念的糊涂认识.

1. 算术根、绝对值

算术根和绝对值在数学的各部分中都有所涉及，可以说是具有“全局性”的重要基本概念．因此，通过复习要做到深刻理解、正确运用，并认识$\sqrt{a^2}$与$|a|$的一致性．

例1 化简：

（1）$\sqrt{\lg^2 5-2\lg 5+1}$；

（2）$\sqrt{\lg^2 x-2\lg x+1}$；

（3）$\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right|$ （$0^\circ<\alpha<90^\circ$）；

（4）$\sqrt{1-\sin 10}$．

解：（1）原式$=\sqrt{(\lg 5-1)^2}$

$=-(\lg 5-1)$ （$\because \lg 5-1<0$）

$=1-\lg 5$

$=\lg 2$．

（2）原式$=\sqrt{(\lg x-1)^2}$

$=|\lg x-1|$

$$=\begin{cases}\lg x-1 & (x\geqslant 10),\\ 1-\lg x & (0<x<10).\end{cases}$$

（3）$\because 0^\circ<\alpha<90^\circ$，

则 $0^\circ<\frac{\alpha}{2}<45^\circ$．

$\therefore$ $\cos\frac{\alpha}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，于是

$\cos^2\frac{\alpha}{2}>\frac{1}{2}$，

$\therefore$ $\frac{1}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}<0$．

根据绝对值定义，得

$$\left|\frac{1}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right|=-\left(\frac{1}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}.$$

故　原式 $=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}$

$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$

$$=\cos\alpha.$$

（4）有的考生由于对弧度的概念不清楚，在做此题时把 $\sin10$ 误为 $\sin10^\circ$ 而造成错误.

一般考生把原式化为

$$\sqrt{\sin^2 5+\cos^2 5-2\sin5\cos5}=\sqrt{(\sin5-\cos5)^2}$$

是不困难的，但若对算术根的概念不清楚，顺手写出 $\sqrt{(\sin5-\cos5)^2}=\sin5-\cos5$，则是错误的. 即使能正确地写出 $\sqrt{(\sin5-\cos5)^2}=|\sin5-\cos5|$，若弧度的概念不清楚，仍得不出最后结果，只有知道 5 是第四象限角，则 $\cos5>0$，$\sin5<0$，进而知道 $\sin5-\cos5<0$，才能得出 $|\sin5-\cos5|=\cos5-\sin5$ 的正确结果.

例2　（1）求使 $\sqrt{(x-5)^2}+|x-1|=(5-x)+(x-1)$ 成立的 x 的取值范围.

（2）若 $|-9+x|=13$，求 x.

（3）若实数 x 满足条件 $2\sin\theta+\log_2 x=3$，求 $|x-32|+|x-2|$ 的值.

解：（1）根据算术根与绝对值的定义，欲使等式成立，必须

$$x-5\leqslant 0,\quad x-1\geqslant 0,$$

$\therefore$ $$1\leqslant x\leqslant 5.$$

（2）$\because$ $|\pm 13|=13$，则由

$$-9+x=\pm 13$$

$\Rightarrow x=22$或-4.

（3）由已知条件，得

$$\log_2 x=3-2\sin\theta.$$

$\therefore$ $$-1\leqslant\sin\theta\leqslant 1,$$

则 $$2\geqslant -2\sin\theta\geqslant -2,$$

即 $$-2\leqslant -2\sin\theta\leqslant 2.$$

$\therefore$ $$3-2\leqslant 3-2\sin\theta\leqslant 3+2$$

$$\Rightarrow 1\leqslant 3-2\sin\theta\leqslant 5$$

于是 $$1\leqslant\log_2 x\leqslant 5,$$

即 $$\log_2 2\leqslant\log_2 x\leqslant\log_2 2^5.$$

$\because$ 底数 $2>1$，

$\therefore$ $2\leqslant x\leqslant 2^5$，即

$$2\leqslant x\leqslant 32.$$

故 $$|x-32|+|x-2|$$

$$=-(x-32)+x-2$$

$$=-x+32+x-2$$

$$=30.$$

例3 解方程：

（1）$\sqrt{2x^2+19}=-(x^2+1)$；

（2）$|x-1|+|x-2|=1$.

对于（1），由算术根的概念立即可知无解.

对于（2），首先采用“零点分段讨论法”把绝对值符号去掉.

零点：即找出使绝对值为0的点.

分段：用零点从小到大把数轴分成几段.

讨论：在分成的各段分别考虑正、负号，以去掉绝对值符号.

零点是 $x_1=1$，$x_2=2$．将数轴分成三段：

$$(-\infty,\ 1]、(1,\ 2]、(2,\ +\infty).$$

当 $x\leqslant 1$ 时，原方程为

$$-(x-1)+[-(x-2)]=1,$$

解之，得 $x=1$．

当 $1<x\leqslant 2$ 时，原方程为

$$(x-1)-(x-2)=1,$$

即 $1=1$，这是恒等式.

它的解集为 $\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$.

当 $x>2$ 时，原方程为

$$(x-1)+(x-2)=1,$$

解之，得 $x=2$．这与假设 $x>2$ 矛盾.

故当 $x>2$ 时方程无解.

∴ 原方程的解集为

$$\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}.$$

例4 （1） 已知

$$x=\sqrt{t} \qquad ①$$

$$y=\sqrt{1-t} \qquad ②$$

求 x、y 间的关系，并作图；

（2）讨论并画出方程 $y=\sqrt{|1-x^2|}$ 的草图.

解：由①，$t\geqslant 0$，则 $x\geqslant 0$．

由②，$1-t\geqslant 0$，则 $t\leqslant 1$，因而 $y\geqslant 0$．

综上可知，$0\leqslant t\leqslant 1$，

∴ $$0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$0 \leqslant y \leqslant 1.$$

把①代入②，得

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1. \ (0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1)$$

图象是在第一象限内的圆弧(图3)。

（2）零点为 $x_1 = -1$，$x_2 = 1$。

把数轴由小到大分成几段：

$$(-\infty, -1), [-1, 1], (1, +\infty).$$

① 当 $x < -1$ 时，$1 - x^2 < 0$，

$$\therefore \quad |1 - x^2| = x^2 - 1.$$

这时原方程化为

$$y = \sqrt{x^2 - 1}.$$

它所表示的图象是双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的左支在 x 轴以上的部分（$x < -1$，$y > 0$），如图4。

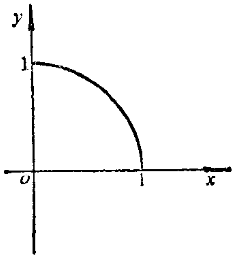


图 3

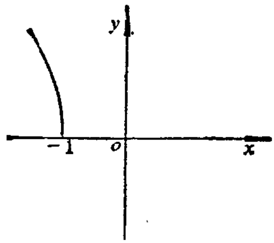


图 4

② 当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$1 - x^2 \geqslant 0$，

$$\therefore \quad |1 - x^2| = 1 - x^2.$$

这时原方程化为 $y = \sqrt{1 - x^2}$。

它所表示的图象是圆

$$x^2 + y^2 = 1$$