

中华人民共和国第一机械工业部统编

中等专业学校教材

数 学

科学普及出版社

前 言

为了更好地落实中共中央、国务院《关于加强职工教育工作的决定》，对工人特别是青壮年工人进行系统的技术理论培训，以适应四化建设的需要，现确定按初级、中级、高级三个培训阶段，逐步地建立工人培训体系，使工人培训走向制度化、正规化的轨道，以期进一步改善和提高机械工人队伍的素质。为此，我们组织了四川省、江苏省、上海市机械厅（局）和第一汽车厂、太原重型机器厂、沈阳鼓风机厂、湘潭电机厂，编写了三十个通用工种的初级、中级的工人技术培训教学计划、教学大纲及其教材，作为这些工种工人技术理论培训的统一教学内容。

编写教学计划、教学大纲及其教材的依据，是一机部颁发的《工人技术等级标准》和当前机械工人队伍的构成、文化状况及培训的重点。初级技术理论以二、三级工“应知”部分为依据，是建立在初中文化基础上的。它的任务是为在职的初级工人提供必备的基础技术知识，指导他们正确地使用设备、工夹具、量具，按图纸和工艺要求进行正常生产。中级以四、五、六级工“应知”部分为依据，并开设相应的高中文化课，在学完了初级技术理论并具有一定实践经验的工人中进行。它的任务是加强基础理论教学，使学员在设备、工夹具、量具、结构原理、工艺理论、解决实际问题 and 从事技术创新的能力上有所提高（高级以七、八级工“应知”部分为依据，这次未编）。编写的教材计有：车工、铣工、刨工、磨工、齿轮工、镗工、钳工、工具钳工、修理钳工、造型工、化工工、热处理工、锻工、模锻工、木模工、内外线电工、维修电工、电机修理工、电焊工、气焊工、起重工、煤气工、工业化学分析工、热工仪表工、锅炉工、电镀工、油漆工、冲压工、天车工、铆工等工艺学教材和热加工的六门基础理论教材：数学、化学、金属材料及其加工工艺、机械制图、机械基础、电工基础。

在编写过程中，注意了工人培训的特点，坚持了“少而精”的原则。既要理论联系实际，学以致用，又要有理论的高度和深度；既要少而精，又要注意知识的科学性、系统性、完整性；既要短期速成，又要循序渐进。在教学计划中对每个工种的培养目标，各门课程的授课目的，都提出了明确的要求，贯彻了以技术培训为主的原则。文化课和技术基础课的安排，从专业需要出发，适当地考虑到今后发展和提高的要求，相近工种的基础课尽量统一。

这套教材的出版，得到了有关省、市机械厅（局）、企业、学校、研究单位和科学普及出版社的大力支持，在此特致以衷心的感谢。

编写在职工人培训的统一教材，是建国三十年来第一次。由于时间仓促，加上编写经验不足，教材中还难免存在缺点和错误。我们恳切地希望同志们在试行中提出批评和指正，以便进一步修改、完善。

第一机械工业部工人技术培训教材编审领导小组

一九八一年十二月

对广大工人进行比较系统的技术培训教育，是智力开发方面的一件大事，是一项战略性的任务。有计划地展开这项工作，教材是个关键，有了教材才能统一培训目标，统一教学内容，才能逐步建立起比较正规的工人技术教育制度。

教材既是关键，编写教材就是一件功德无量的事。在教材行将出版之际，谨向为编写这套教材付出辛勤劳动的同志们致以敬意！

第一机械工业部第一副部长 杨 振

一九八二年元月

目 录

第一章 集合与函数

第一节 集合	1
一、集合	1
二、子集、交集、并集、补集	2
第二节 函数	5
一、单值对应	5
二、函数	6
三、反函数、互为反函数图象间的关系	8
内容小结	10
复习题一	10

第二章 幂函数、指数函数、对数函数

第一节 幂函数	12
一、幂函数	12
二、幂函数的定义域和值域	12
三、幂函数的图象和性质	12
四、单调函数、奇函数和偶函数	15
第二节 指数函数	16
一、指数的复习	16
二、指数函数	17
三、指数函数的图象和性质	17
第三节 对数函数	18
一、对数的复习	19
二、对数函数	21
三、对数函数的图象和性质	21
内容小结	23
复习题二	23

第三章 三角函数

第一节 角的概念的推广、弧度制	25
一、角的概念的推广	25
二、弧度制	27
第二节 任意角三角函数的定义	29
一、任意角三角函数的定义	29
二、三角函数值的符号	30
第三节 同角三角函数间的基本关系式	32
第四节 诱导公式	34
一、单位圆和函数线	34
二、 $0^\circ \sim 360^\circ$ 角的三角函数值的变化	35
三、诱导公式	36

第五节 三角函数的图象和性质	42
一、正弦函数 $y = \sin x$ 的图象和性质	42
二、余弦函数 $y = \cos x$ 的图象和性质	43
三、正切函数 $y = \tan x$ 的图象和性质	45
四、正弦函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象和性质	45
第六节 反三角函数及其图象	49
一、反三角函数的概念	49
二、反三角函数的图象	52
第七节 两角和、两角差的三角函数	53
一、两角和、两角差的正弦、余弦与正切	53
二、倍角与半角的三角函数	56
*第八节 和差化积与积化和差	59
一、三角函数的积化和差	59
二、三角函数的和差化积	60
*第九节 简单的三角方程	61
一、三角方程	61
二、最简单的三角方程	61
三、简单的三角方程	63
内容小结	64
复习题三	67

第四章 坐标法

第一节 轴和轴上的线段	70
一、直线上点的坐标	70
二、有向线段	70
第二节 平面直角坐标系	72
一、平面上点的坐标	72
二、两点间的距离公式和线段的中点	72
三、坐标变换	76
第三节 极坐标	78
一、极坐标系的概念	78
二、极坐标和直角坐标之间的关系	79
内容小结	80
复习题四	81

第五章 二次曲线

第一节 曲线和方程	83
第二节 圆	84
第三节 椭圆	87

一、椭圆的定义和它的标准方程	87
二、椭圆的几何性质	89
第四节 双曲线	92
一、双曲线的定义和它的标准方程	92
二、双曲线的几何性质	93
第五节 抛物线	96
一、抛物线的定义和标准方程	96
二、抛物线的几何性质	98
*三、抛物线的切线、法线及其应用举例	100
第六节 曲线的极坐标方程	102
*第七节 圆锥曲线的极坐标方程、等速螺旋线及其方程	104
一、圆锥曲线的极坐标方程	104
二、等速螺旋线及其方程	105
内容小结	107
复习题五	108
第六章 空间图形	
第一节 平面	111
一、平面	111
二、平面的基本性质	111
三、平面图形的画法	112
第二节 空间两直线的位置关系	113
一、两条直线的位置关系	113
二、平行直线的性质	114
三、异面直线所成的角	114
第三节 空间直线和平面的位置关系	115
一、直线和平面的位置关系	115
二、直线与平面平行的判定和性质	116
三、直线与平面垂直的判定和性质	117
四、三垂线定理及其逆定理、直线和平面的角	118
第四节 平面和平面的位置关系	120
一、两个平面的位置关系	120
二、平面和平面平行的判定定理和性质	121
三、二面角及其平面角	123
四、平面和平面垂直的判定和性质	124
第五节 棱柱、棱锥、棱台	126
一、棱柱的概念、性质及其面积	126
二、棱锥的概念、性质及其面积	127
三、棱台的概念、性质及其面积	130
第六节 圆柱、圆锥、圆台	132
一、圆柱的概念、性质及其面积	132
二、圆锥的概念、性质及其面积	133
三、圆台的概念、性质及其面积	135
第七节 球	137

一、球的概念、性质	137
二、球的面积	138
三、球冠及其面积	139
第八节 多面体和旋转体的体积	140
一、体积的概念	140
二、棱柱、圆柱的体积	141
三、棱锥、圆锥的体积	142
四、棱台、圆台的体积	144
五、球、球缺的体积	146
内容小结	147
复习题六	148
第七章 排列、组合	
第一节 排列	152
一、两个基本原理	152
二、排列	153
第二节 组合	157
一、组合的概念	157
二、组合数公式	157
三、组合的两个性质	159
内容小结	161
复习题七	162
第八章 概率统计初步	
第一节 统计初步	163
一、总体和样本	163
二、平均数	163
三、方差	166
四、频率分布	172
第二节 概率初步	177
一、随机事件	177
二、事件的概率	181
内容小结	186
复习题八	188
*第九章 电子数字计算机简介	
第一节 二进制计数法	189
一、十进制计数法的特点	189
二、二进制	190
三、数制的转换	192
第二节 电子数字计算机简介	195
一、电子数字计算机的主要部件	195
二、电子数字计算机的解题过程	196
内容小结	197
复习题九	198
附录一 复习资料	
第一节 三角形的解法	199

一、三角函数.....	199
二、三角形的解法.....	203
习题一.....	206
第二节 直线的方程.....	208
一、直线方程的概念.....	208
二、两条直线的位置关系.....	214
三、点到直线的距离.....	219
习题二.....	220
复习题答案.....	221

附录二 数学用表

附表一 常用单位和换算用表.....	226
附表二 平方表、平方根表、立方表、 立方根表.....	229
附表三 常用对数表.....	250
附表四 反对数表.....	253
附表五 三角函数表.....	256
附表六 几何形体面积、体积计算公式.....	264

第一章 集合与函数

第一节 集 合

一、集 合

(一) 集合的概念

集合，也简称集，是作为一个整体来看的一些具有某种特性的事物的总体。构成集合的各个事物称为这个集合的元素。例如，正整数的全体是正整数集合，每一个正整数就是这个集合的元素；某工段的全体职工就是这个工段人员的集合，每一个职工就是这个集合的元素。

集合是数学中的一个基本概念。有两点我们必须明确：

1. 在同一个集合中，组成这个集合的所有元素是不同的，且不考虑元素间的顺序。例如，由1、2、3、4所表示的集与由4、3、2、1所表示的集是相同的集。又1、3、3表示的集应表示为1、3所表示的集。
2. 一个事物是不是某集合中的元素，是完全可以根椐这个集合的元素所具有的某种特性加以判定的。例如由自然数1、2、3组成的一个集合，我们容易判明1、2、3是这个集合的元素，而 $\frac{1}{2}$ 、4等数列则不属于这个集合。

(二) 集合中常用的符号

我们通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合，用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素。又用：

$a \in A$ (读作 a 属于 A)，表示 a 是集 A 的元素。

$a \notin A$ (读作 a 不属于 A)，表示 a 不是集 A 的元素。

我们常见的集合有：

1. 自然数集合 (常用 N 表示)；
2. 整数集合 (常用 I 表示，正整数集用 I^+ 表示，负整数集用 I^- 表示)；
3. 有理数集合 (常用 Q 表示)；
4. 实数集合 (常用 R 表示)。

集合中包含的元素有多有少。我们把包含有限个元素的集合称为有限集合；否则称为无限集合。如介于90与100之间的偶数集合是个有限集合，上面的四个集合都是无限集合。一个集合也可以仅包含一个元素，这样的集合称为单元素集合。不包含任何元素的集合称为空集，常用 $\emptyset$ 表示。

为了概念上的清晰，一般用列举法和特征法来描述集合。

列举法 就是把属于某集合的元素全部写出来，并记在 $\{ \}$ 内。例如介于90与100之间的偶数集合写成：

$$A = \{92, 94, 96, 98\}$$

这种方法比较清楚，一看就知道这个集合包含哪些元素。但是，这种方法并不是总能办到的，如自然数集合我们就不可能把所有的自然数都写出来。

特征法 是把集合中所包含的元素的特性，用描述性的短语或数学表达式写在 $\{ \}$ 内，表示出来。如自然数集合可以表示成

$$B = \{n \mid n \in N\}$$

介于90与100之间的偶数集可以写成

$$A = \{2n \mid n \in N, 45 < n < 50\}$$

由单元素 a 所组成的集写成 $C = \{a\}$ ，空集 $\emptyset$ 也可写成 $\emptyset = \{ \}$ 。

练习

1. (口答) 说出下列各集合里的元素。

- (1) $\{ \text{与2相差3的数} \}$;
- (2) $\{ \text{大于3小于11的偶数} \}$;
- (3) $\{ \text{一年中有30天的月份} \}$ 。

2. 把下列各集合用另一种方法表示。

- (1) $P = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;
- (2) $\{ \text{熔制高级铸铁的标准成分} \}$ 。

3. 在 $\underline{\hspace{1cm}}$ 处填上符号 $\in$ 或 $\notin$ ：

$$\begin{array}{llll} 1 \underline{\hspace{1cm}} N, & 0 \underline{\hspace{1cm}} N, & -3 \underline{\hspace{1cm}} N, & \sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} N, \\ 1 \underline{\hspace{1cm}} I, & 0 \underline{\hspace{1cm}} I, & -3 \underline{\hspace{1cm}} I, & \sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} I, \\ 1 \underline{\hspace{1cm}} R, & 0 \underline{\hspace{1cm}} R, & -3 \underline{\hspace{1cm}} R, & \sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} R. \end{array}$$

二、子集、交集、并集、补集

(一) 子集

对于两个集合 A 与 B ，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么，集合 A 就叫做集合 B 的子集，表示为

$$A \subseteq B \quad \text{或} \quad B \supseteq A$$

读作“ A 包含于 B ”，或“ B 包含 A ”。

例如 $A = \{2, 3, 6\}$,

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

则有 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ ，即 A 是 B 的子集。

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A ，那么集合 A 就叫做集合 B 的真子集，表示为

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A.$$

例如， N 是 I^+ 的子集，但不是它的真子集； N 是 R 的子集，也是 R 的真子集。

我们规定空集是任何集合的子集。也就是说，对于任何集合 A ，

$$\emptyset \subseteq A.$$

任何一个集合也是它本身的子集。

例1 写出 $\{a, b\}$ 的所有子集。

解 $\{a, b\}$ 的所有子集是: $\emptyset, \{a\}, \{b\}$ 和 $\{a, b\}$ 。

对于两个集合 A, B , 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 那么, 集合 A 和集合 B 就相等, 表示为

$$A = B$$

读作“集合 A 等于集合 B ”。

例如, A 是方程 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 的根的集合, 即 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 = 0\} = \{-1, -2\}$, $B = \{-1, -2\}$, 则 $A = B$ 。

(二) 交集

对于 A 与 B 两个集合, 把同时属于 A 和 B 的所有元素所组成的集合叫做 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$ (读作“ A 交 B ”) 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。

例如: $A = \{\text{模具工段技术知识考核成绩在70分以上的成员}\}$,

$B = \{\text{模具工段操作技能考核成绩在70分以上的成员}\}$,

$C = \{\text{模具工段技术知识和操作技能考核成绩都在70分以上的成员}\}$,

$D = \{\text{模具工段技术知识或操作技能考核成绩在70分以上的成员}\}$ 中, 集合 A 、 B 、 C 的关系如下:

集合 C 中的成员必定是集合 A 的成员, 同时又是集合 B 的成员, 所以集合 C 是集合 A 与集合 B 的交集, 记作

$$C = A \cap B$$



图 1-1

如图1-1a中阴影部分所示。

由集合定义容易知道, 对于任何集合 A , 有

$$A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$$

一般地, 如果 A 与 B 没有公共元素则 $A \cap B = \emptyset$ 。如图1-1b。

例2 设 $A = \{\text{等腰三角形}\}$,

$B = \{\text{直角三角形}\}$, 求 $A \cap B$ 。

解 $A \cap B = \{\text{等腰三角形}\} \cap \{\text{直角三角形}\}$

$= \{\text{等腰同时有一个角是直角的三角形}\}$

$= \{\text{等腰直角三角形}\}$ 。

(三) 并集

对于 A 与 B 两个集合, 把属于 A 或者属于 B 的所有元素所组成的集合叫做 A 与 B 的并

集, 记作

$$A \cup B \text{ (读作 “} A \text{ 并 } B \text{”) }.$$

现在我们来考察上例中集合 A 、 B 和集合 D 的关系。

容易看出集合 D 是属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合。记作

$$D = A \cup B.$$

如图 1-2 中的阴影部分所示。

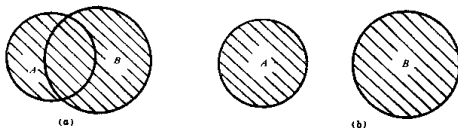


图 1-2

由并集定义容易知道, 对于任何集合 A ,

$$A \cup A = A, \quad A \cup \emptyset = A.$$

例 3 设 $A = \{\text{锐角三角形}\}$,

$B = \{\text{钝角三角形}\}$, 求 $A \cup B$.

解 $A \cup B = \{\text{锐角三角形}\} \cup \{\text{钝角三角形}\}$
 $= \{\text{锐角三角形或钝角三角形}\}$
 $= \{\text{斜三角形}\}.$

(四) 补集

在研究集合与集合之间的关系时, 这些集合常常是某一个给定集合的子集, 这个给定的集合叫做全集。用符号 S 表示。也就是说, 全集包含了我们所研究的各个集合的全部元素。

例如, 全集 $S = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

子集 $A = \{3, 7, 11, 13\}$

那么, 把不属于 A 的元素组成的集合叫做集合 A 的补集, 表示成 $\bar{A}$, 则 $\bar{A} = \{5, 9\}$.

如果用矩形来表示全集 S (图 1-3), 矩形中圆内的部分表示 S 的子集 A , 那么, 矩形中圆外的部分 (阴影部分) 就是集 A 的补集 $\bar{A}$.

例 4 设 $S = \{\text{梯形}\}$, $A = \{\text{等腰梯形}\}$, 求 $\bar{A}$.

解 $\bar{A} = \{\text{不等腰梯形}\}.$

练习

1. 设 $A = \{1, 2, 3; 4, 5\}$,

$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

求 (1) $A \cup B$, $A \cap B$;

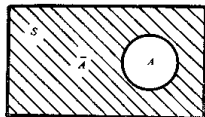


图 1-3

(2) 在__处填上适当的符号 ($\supset$, $\subset$):

$A \cup B \underline{\hspace{1cm}} A$, $A \cup B \underline{\hspace{1cm}} B$, $A \cap B \underline{\hspace{1cm}} A \cup B$.

2. 设 $A = \{\text{直角三角形}\}$, $B = \{\text{斜三角形}\}$, 求 $A \cup B$.

3. 设 $S = R = \{\text{实数}\}$, $A = \{\text{无理数}\}$, 求 $\overline{A}$.

第二节 函 数

一、单 值 对 应

一般地, 已知两个集合 A 、 B , 用某种确定关系, 使集合 A 的每个元素与集合 B 的唯一元素相对应, 这种关系就叫做从集合 A 到集合 B 的一对一的单值对应 (图 1-4)。按确定的关系对应, 通常记为:

$$a \rightarrow b$$

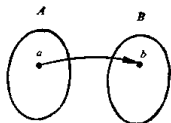


图 1-4

二、函 数

(一) 函数的定义

我们在初中已学过正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$, 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 和二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

现在我们进一步来研究函数的有关问题。

设在某变化过程中有两个变量 x 和 y , 变量 y 的变化依赖于 x 。如果对于 x 的每一个确定的值, 按照某个对应关系, y 都有唯一的值和它对应, y 就叫做 x 的函数, x 的取值范围叫做函数的定义域。和 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值, 函数值的集合叫做函数的值域。

例如, 一次函数 $y = 3x + 2$, 函数的定义域是 R , 值域是 R , 对应关系 $x \rightarrow y = 3x + 2$ 是从 R 到 R 的单值对应。

又如, 二次函数 $y = 2x^2 + 2$ 。函数的定义域是 R , 值域是 $\{y \mid y \geq 2, y \in R\}$, 对应关系 $x \rightarrow y = 2x^2 + 2$ 是从 R 到 $\{y \mid y \geq 2, y \in R\}$ 的单值对应。

“ y 是 x 的函数”可用记号

$$y = f(x)$$

来表示。括号里的 x 表示自变量， f 表示 y 和 x 之间的对应关系。

x 在定义域中取一个确定的值 a 时， $f(a)$ 就表示对应的函数值。

例如，二次函数 $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ，在 $x = 0$ ， $x = 1$ ， $x = 2$ 时的函数值是 $f(0) = -1$ ， $f(1) = 2$ ， $f(2) = 7$ 。

在同时研究两个或多个函数时，就要用不同的记号表示不同的函数，除 $f(x)$ 外还常用 $F(x)$ ， $G(x)$ 等记号。

(二) 区间概念

在研究函数的性质时常常要用到区间的概念。

设 a ， b 是两个实数，而且 $a < b$ 。

1. 满足 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的全体的集合叫做闭区间，记为 $[a, b]$ ；

2. 满足 $a < x < b$ 的实数 x 的全体的集合叫做开区间，记为 (a, b) ；

3. 满足 $a \leq x < b$ 的实数 x 的全体的集合叫做右开区间，记为 $[a, b)$ ；

4. 满足 $a < x \leq b$ 的实数 x 的全体的集合叫做左开区间，记为 $(a, b]$ 。

全体实数的集合 R ，记为 $(-\infty, +\infty)$ ，“ ∞ ”读作无穷大，“ $-\infty$ ”读作负无穷大，“ $+\infty$ ”读作正无穷大。满足 $x \geq a$ ， $x > a$ ， $x \leq b$ ， $x < b$ 的实数 x 的全体的集合，分别记为 $[a, +\infty)$ ， $(a, +\infty)$ ， $(-\infty, b]$ ， $(-\infty, b)$ 。

(三) 函数的图象

一次函数的图象是一条直线，二次函数的图象是一条平滑的曲线，反比例函数的图象是两条平滑的曲线，函数的图象也可以是一些点或几条线段等，它们都可以用描点法作出。见图 1-5。

例，某厂加工汽轮机不锈钢叶片，过去一个叶片用钢 x （不超过 20）公斤，比现在用钢的 9 倍还多 1 公斤，那么现在加工一个叶片用钢量（公斤）是

$$y = f(x) = \frac{x-1}{9}$$

$$x \in (1, 20]$$

这个函数的图象是一条线段，见图 1-6。

例 1 一条钢轨在 0°C

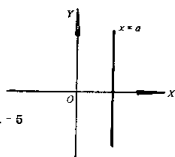
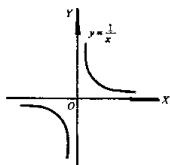
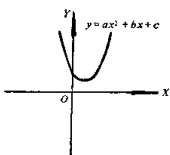
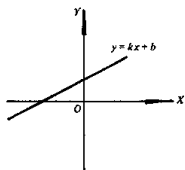


图 1-5

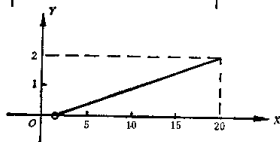


图 1-6

时的长度是12.5米，温度每增高 1°C ，它的长度增加0.14毫米，列出这条钢轨在 0°C 以上时的长度 L （米）和温度 t （摄氏度数）之间的函数关系，并求出其定义域。

解 钢轨 L （米）和温度 t （摄氏度数）之间的关系是

$$L = 0.00014t + 12.5$$

$\because$ 钢的熔点为 1300°C ，

$\therefore$ 函数 L 的定义域是 $\{t \mid 0^{\circ} \leq t < 1300^{\circ}\}$

当我们所研究的函数 $y = f(x)$ 是用一个式子表示时，如果不加说明，函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数 x 的集合。

例2 求函数 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 的定义域。

解 $\because x-2 \neq 0$ 时， $x \neq 2$

$\therefore$ 函数的定义域是 $\{x \mid x \neq 2, x \in R\}$ 。

例3 求函数 $f(x) = \sqrt{3x+2}$ 的定义域。

解 $\because 3x+2 \geq 0$ 时， $x \geq -\frac{2}{3}$ ，

$\therefore$ 函数的定义域是 $[-\frac{2}{3}, +\infty)$ 。

例4 求函数 $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} + 2$ 的定义域。

解 $\because$ 使 $\sqrt{x+1}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x \mid x \geq -1\}$ ，

使 $\sqrt{1-x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x \mid x \leq 1\}$ ，

$\therefore$ 函数的定义域是 $\{x \mid x \geq -1\} \cap \{x \mid x \leq 1\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ 。

练习

1. 已知对应关系： $x \rightarrow y = 4x - 3$ ，

写出 x 所对应的数值。

2. 已知函数 $f(x) = 3x + 5$ ， $x \in R$ ，

求 $f(-3)$ ， $f(-2)$ ， $f(0)$ ， $f(1)$ ， $f(2)$ 和函数的值域。

3. 已知函数 $f(x) = 2x^2$ ， $x \in R$ ，

求 $f(0)$ ， $f(-1)$ ， $f(1)$ ， $f(-2)$ ， $f(2)$ 和函数的值域。

4. 求函数的定义域：

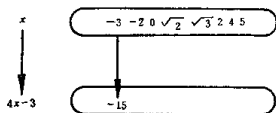
$$(1) f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3} - 1;$$

$$(2) f(x) = \sqrt{4x-1} + \sqrt{(2x+1)^2} + 3;$$

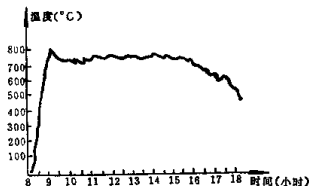
$$(3) f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+1}.$$

5. 右图是一个加热炉内的温度变化的图象，说出：

(1) 8时至9时，9时至9时半，9



第1题图



第5题图

时半至15时半, 15时半至18时, 各段时间内温度变化的趋势;

(2) 8时至18时这段时间内的最高温度、最低温度各是多少?

6. 100克水在不同温度下能溶解的硝酸钾的克数如下:

温度(摄氏度数)	0	20	40	60	80	100
溶解量(克)	13.5	31.5	64	110	169	247

根据上表, 画出硝酸钾的溶解量随温度而变化的图象。

三、反函数、互为反函数图象间的关系

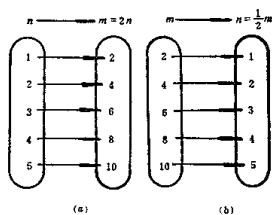


图 1-7

(一) 逆对应

看下面的例子(图1-7),

容易看出, 这两个对应都是从一个集合到另一个集合的一一对应。两图只是在对应的方向上相反, 这种方向相反的对应称为逆对应, 逆对应是相对的, 我们可以把图a的对应称作图b的逆对应, 也可以把图b的对应称作图a的逆对应。只有一对一的单值对应才可研究它的逆对应。

若设 f 是从集合 A 到集合 B 的一一对应, 则对应于 f 的逆对应表示为 f^{-1} 。显然 f 也是 f^{-1} 的逆对应。

例如, $f: n \rightarrow m = 2n + 1$, 由 $m = 2n + 1$ 可得 $n = \frac{m-1}{2}$, 则 $f^{-1}: m \rightarrow n = \frac{m-1}{2}$ 为 $f: n \rightarrow m = 2n + 1$ 的逆对应。

又例如, $f: x \rightarrow y = x^2$, 使 $\{x | x \geq 0\}$ 的元素对应于 $\{y | y \geq 0\}$ 的元素, 这个对应是一一对应。由 $y = x^2$, 在 $\{x | x \geq 0\}$ 时, 可得其逆对应为 $x = \sqrt{y}$ 。则 $f^{-1}: y \rightarrow x = \sqrt{y}$ 是 $y = x^2$ 的逆对应。注意: $\{x | x \in R\}$ 时, $x \rightarrow y = x^2$ 不属于一对一单值对应, 故 $x \rightarrow y = x^2$ 没有逆对应关系。

(二) 反函数

确定函数 $y = 2x + 4$ 的对应关系 $f: x \rightarrow y = 2x + 4$, 是一一对应, 它的逆对应是 $f^{-1}: y \rightarrow x = \frac{1}{2}y - 2$ 。 f^{-1} 所确定的函数 $x = \frac{1}{2}y - 2$ 就叫做函数 $y = 2x + 4$ 的反函数。

一般地, 如果给定函数 $y = f(x)$ 的对应关系 f 是一一对应, 那么 f 的逆对应 f^{-1} 所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数。

习惯上自变量用 x 来表示, 函数用 y 来表示, 因此, 函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 通常表示成 $y = f^{-1}(x)$ 。

在求反函数时, 先由 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$, 再改写为 $y = f^{-1}(x)$ 。

例 求下列函数的反函数:

(1) $y = 3x - 1$;

(2) $y = x^3 + 1$;

(3) $y = \sqrt[3]{x} + 1$;

(4) $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

解 (1) 由 $y = 3x - 1$, 可得 $x = \frac{y+1}{3}$,

$\therefore$ 函数 $y = 3x - 1$ 的反函数是 $y = \frac{x+1}{3}$,

(2) 由 $y = x^3 + 1$, 可得 $x = \sqrt[3]{y-1}$,

$\therefore$ 函数 $y = x^3 + 1$ 的反函数是 $y = \sqrt[3]{x-1}$;

(3) 由 $y = \sqrt[3]{x} + 1$, 可得 $x = (y-1)^3$,

$\therefore$ 函数 $y = \sqrt[3]{x} + 1$ 的反函数是 $y = (x-1)^3$;

(4) 由 $y = \frac{2x+3}{x-1}$, 可得 $x = \frac{y+3}{y-2}$,

$\therefore$ 函数 $y = \frac{2x+3}{x-1}$ 的反函数是 $y = \frac{x+3}{x-2}$.

注意: 没有逆对应关系的函数, 没有反函数。例如 $y = x^2 \{x|x \in R\}$ 没有反函数。

(三) 互为反函数的函数图象间的关系

看下面的例题:

例1 求函数 $y = 3x - 2$ 的反函数, 并且作出原来的函数和它的反函数的图象。

解 从 $y = 3x - 2$, 得 $x = \frac{y+2}{3}$, 因此, 函数 $y = 3x - 2$ 的反函数是 $y = \frac{x+2}{3}$ 。

因为函数与其反函数都是一次函数, 用两点法在坐标平面内分别作出它们的图象, 见图 1-8。

例2 求函数 $y = x^3$ 的反函数, 并且作出原来的函数和它的反函数的图象。

解 从 $y = x^3$, 得 $x = \sqrt[3]{y}$ 。因此, 函数 $y = x^3$ 的反函数是 $y = \sqrt[3]{x}$ 。

用描点法在同一坐标平面内分别作出函数 $y = x^3$ 和它的反函数 $y = \sqrt[3]{x}$ 的图象, 见图 1-9。

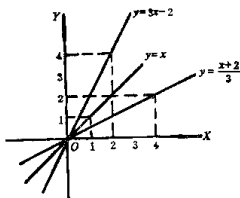


图 1-8

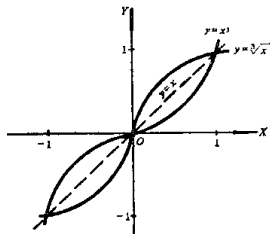


图 1-9

从图 1-8, 图 1-9 可以看出函数及其反函数的图象关于直线 $y = x$ 对称。一般地, 函数 $y = f(x)$ 的图象和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 是对称的。

练习

1. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = -\frac{1}{x} + 3;$$

$$(2) y = \frac{2x}{5x+1}.$$

2. 作出 $f(x) = -\sqrt{x} \quad x \in R, x \geq 0$ 和它的反函数的图象。

内容小结

一、本章主要内容是集合的概念、集合与集合之间的关系、单值对应、函数概念。

二、把一些具有某种特性的事物看作一个整体, 便形成一个集合, 集合里的各个事物叫做集合的元素。元素和集合间的关系是: 属于或不属于。

三、子集、交集、并集、补集等都是从某个方面描述集合与集合之间的关系。集合 A 是集合 B 的子集, 表示 $A \subseteq B$ 。如果 $A \subseteq B$ 而 $B \subseteq A$, 则 $A = B$ 。子集和真子集的概念是不同的。 A 和 B 的交集, 表示为 $A \cap B$, 它是 A 的子集也是 B 的子集。同时, $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ 。

A 和 B 的并集, 表示为 $A \cup B$ 。 A 、 B 与 $A \cap B$ 都是 $A \cup B$ 的子集。同时 $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$ 。补集和全集是不可分离的, 如果 A 是全集 S 的子集, 则补集表示为 $\overline{A}$, $\overline{A}$ 也是 S 的子集。 A 、 $\overline{A}$ 与 S 的关系是 $A \cup \overline{A} = S$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$ 。

四、单值对应可分为一对一和多对一的单值对应, 只有一对一单值对应才有逆对应。逆对应 f^{-1} 依存于一一对应 f , 没有 f 也就没有 f^{-1} 。 f 和 f^{-1} 互为逆对应。

五、函数和对应是密切相关的。自变量 x 和其函数 y 之间的关系, 就是一个对应关系, x 和 y 的对应是单值对应。如果确定函数 $y = f(x)$ 的对应 f 是从函数的定义域到函数值域上的一一对应, f 的逆对应 f^{-1} 所确定的函数 $y = f^{-1}(x)$ 叫做 $y = f(x)$ 的反函数。由 $y = f(x)$ 求 $y = f^{-1}(x)$ 的步骤是: (1) 由 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$; (2) 把 $x = f^{-1}(y)$ 改写为 $y = f^{-1}(x)$ 。函数 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称。

复习题一

1. 写出下列各集合的全部元素:

(1) 太阳系中目前已知的行星集合;

(2) 根据不同要求和目的, 以及在操作过程中不同的加热和冷却速度, 热处理的基本方法的集合;

(3) 根据碳的存在形态, 列出铸铁分类名称的集合;

(4) 常用黑色金属材料的集合。

2. 设 $A = \{\text{菱形}\}$, $B = \{\text{矩形}\}$, 求 $A \cap B$ 。

3. 如果 $A = \{-1, 0, 3, 5, 11\}$,

$$B = \{7, 3, 11, 20\}$$

(1) 写出 $A \cap B$ 和 $A \cup B$ 。交集是并集的子集吗？ A 和 B 是并集的子集吗？

(2) 把 $A \cup B$ 作为全集，写出 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ ，以及 $\overline{A \cap B}$ 。

4. 已知函数 $f(x) = x^2 + 3$

(1) 求 $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $f(a)$, $f(a^2)$, $f(a+1)$;

(2) 证明 $f(-a) = f(a)$ 。

5. 求下列函数的定义域和值域。

(1) $y = \sqrt{4x+3}$;

(2) $y = \sqrt{x^2+3}$;

(3) $y = \sqrt{2-x^2}$;

(4) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ 。

6. 铜球在 0°C 时的体积是 1000 立方厘米。加热后温度每增加 1°C ，体积增加 0.057 立方厘米。列出铜球的体积 V 和所增加的温度 T 之间的函数关系。根据这个关系式，计算加热到 200°C 的时候铜球的体积。

7. 判别下列各函数哪些有反函数？如果有反函数，就写出反函数的解析式和定义域，并画出反函数的图象。

(1) $y = 4x + 3 \quad x \in R$;

(2) $y = x^2 - 4 \quad x \in R$;

(3) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 \quad x \in R, x > 0$;

(4) $y = x^2 - x \quad x \in R$ 。

8. 已知函数的对应值表如下，试画出它的反函数的图象。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	2	3	5	8	13	21	34