概率论及其应用

题解

陈希孺著

重庆师范学院数学系印

目　　录

上　　册

下　　册

第一章 问　　题

1．在1,2,3，4，5五个数字中先任意抽取一个，然后在剩下的四个中再抽取一个．假定这全部20个可能的结果都具有相同的概率，试求有一个奇数在（a）第一次被抽出；（b）在第二次被抽出；（c）二次都被抽到的概率。

2．在例（2.a）的样本空间中，给全部27个点以相同的概率．利用例（4.d）的符号，对事件$A_1=S_1$，$A_2=S_2$来验证公式（7.4），S_1S_2包含多少样本点？

3．考虑符号1234的24种可能的排列，并且对每一个排列都赋以概率$\frac{1}{24}$，令A_i为数字i出现在其自然位置（其中$i=1$，2，3，4）的事件.验证公式（7.4）。

4．扔一个钱币，直到它连续地出现两次相同的结果为止，设扔n次的每一个可能结果都具有相同的概率$\frac{1}{2^n}$。试描述这个样本空间，并求出下列事件的概率：（a）实验在扔第6次之前结束；（b）须要扔偶数次才结束。

5．在例（5.b）的样本空间中，我们对（＊）中恰巧包含k个字母的样本点赋以概率$\frac{1}{2^k}$，（换句话说，aa和bb具有概率$\frac{1}{4}$，acb具有概率$\frac{1}{8}$，等等。）（a）证明（＊）中的样本点概率之和为1，（＊＊）中之两个样本点的概率为0。（b）证明a胜的概率为$\frac{5}{14}$.b胜的概率也是$\frac{5}{14}$，而c胜的概率为$\frac{2}{7}$.（c）

在第k局或在第k局前无法判定谁胜谁负的概率为$\frac{1}{2^{k-1}}$。

6．变更例（5.b），计算每一局中不分胜负的可能性，给出适当的样本空间，你将如何定义概率？

7．在问题3中，证明$A_1A_2A_3\subset A_4$和$A_1A_2A_3'\subset A_4'$。

8．例用例（4.d）的符号证明（a）$S_1S_2D_3=0$；（b）$S_1D_2\subset E_3$；（c）$E_3-D_2S_1\supset S_2D_1$。

9．投掷两颗骰子，令A为点数的和是奇数的事件，B为至少出现一个么点的事件，试描述事件AB，$A\cup B$，AB'。如果假定全部36个样本点都具有相同的概率，试求AB，$A\cup B$，AB'的概率。

10．在例（2.g）中，试叙述下列事件的意义：（a）ABC；（b）$A-AB$；（c）$AB'C$。

11．在例（2.g）中，试验证$AC'\subset B$。

12．在桥牌游戏中，令N_k（$k=1$，2，3，4）为北家至少有k个爱司的事件。以S_k，E_k，W_k分别表示南、东、西各家至少有k个爱司。在事件（a）W_1'；（b）N_2S_2；（c）$N_1'S_1E_1'$；（d）W_2-W_3；（e）$N_1S_1E_1W_1$；（f）N_3W_1；（g）（$N_2\cup S_2$）E_2中，试问西家有几个爱司？

13．在上题中，试验证（a）$S_3\subset S_2$；（b）$S_3W_2=0$；（c）$N_2S_1E_1W_1=0$；（d）$N_2S_2\subset W_1'$；（e）（$N_2\cup S_2$）$W_3=0$；（f）$W_4=N_1'S_1'E_1'$。

14．试验证下列关系式[1]：

（a）$(A\cup B)'=A'B'$；

（b）$(A\cup B)-B=A-AB=AB'$；

（c）$AA=A\cup A=A$；

(d) $(A-AB)\cup B=A\cup B$;

(e) $(A\cup B)-AB=AB'\cup A'B$;

(f) $A'\cup B'=(AB)'$;

(g) $(A\cup B)C=AC\cup BC$

15. 化简：(a) $(A\cup B)(A\cup B')$;

(b) $(A\cup B)(A'\cup B)(A\cup B')$;

(c) $(A\cup B)(B\cup C)$.

16. 试述下列关系中哪些是正确的，哪些是错误的：

(a) $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$

(b) $ABC=AB(C\cup B)$

(c) $A\cup B\cup C=A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$

(d) $A\cup B=(A-AB)\cup B$

(e) $(AB\cup BC\cup CA)\supset ABC$

(f) $(AB\cup BC\cup CA)\subset(A\cup B\cup C)$

(g) $(A\cup B)-A=B$

(h) $AB'C\subset A\cup B$

(i) $(A\cup B\cup C)'=A'B'C'$

(j) $(A\cup B)'C=A'C\cup B'C$

(k) $(A\cup B)'C=A'B'C$

(l) $(A\cup B)'C=C-C(A\cup B)$.

17. 令A,B,C为任意三个事件，试用A、B、C表达下列事件：

(a) 只有A发生；

(b) A和B都发生而C不发生；

(c) 所有这三个事件都发生；

(d) A, B, C中至少有一个事件发生；

(e) 至少有二个事件发生；

(f) 恰有一个事件发生；

(g) 恰有二个事件发生；

(h) 没有一个事件发生；

(i) 不多于二个事件发生。

18. 任意二个事件之并 $A\cup B$ 可表示成二个互不相容的事件之和，例 $A\cup B=A\cup(B-AB)$。试用类似的方式表达三个事件A、B、C之并。

19. 利用问题18的结果证明：

$$P\{A\cup B\cup C\}=P\{A\}+P\{B\}+P\{C\}$$
$$-P(AB)-P\{AC\}-P\{BC\}+P\{ABC\}.$$

〔这是第四章（1.5）的特殊情形〕.

解　　答

1. (a) $\dfrac{3\cdot4}{20}=\dfrac{3}{5}$　　(b) $\dfrac{2\cdot3+3\cdot2}{20}=\dfrac{3}{5}$

　(c) $\dfrac{3\cdot2}{20}=\dfrac{3}{10}$

2. 事件A_1=事件S_1={第一合 放 一个 球}，一共有12种可能情况（10—15，22—27），故$P(A_1)=\dfrac{12}{27}=\dfrac{4}{9}$，同理$P(A_2)=\dfrac{4}{9}$，$P(A_1A_2)=\dfrac{2}{9}$，$P(A_1+A_2)=\dfrac{2}{3}$，而$\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{2}{3}$.

3. 例如：　$P(A_1)=\dfrac{3!}{4!}=\dfrac{1}{4}$，　$P(A_2)=\dfrac{1}{4}$，

$P(A_1A_2)=\dfrac{2!}{4!}=\dfrac{1}{12}$，$P(A_1+A_2)=\dfrac{10}{24}$

（一共有 $\begin{matrix}1234 & 1324 & 1423 & 3214 & 4231\\ 1243 & 1342 & 1432 & 3241 & 4213\end{matrix}$ 等10种），公式（7.4）显然对。

4. 样本空间$\Omega=\{HH, HTT, HTHH, HTHTT, \cdots TT, THH, \cdots\}$

设 $A=$｛事件在第6次投掷以前（不包括第6次）结束｝

$B=$｛事件在偶次投掷时结束｝

则
$$P(A)=P(HH)+P(TT)+P(HTT)+P(THH)+P(HTHH)+P(THTT)+P(HTHTT)+P(THTHH)$$
$$=2\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right]=\frac{30}{32}=\frac{15}{16}$$
$$P(B)=2\left[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right]=\frac{2}{4}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right]=\frac{2}{3}$$

5. (a) $2\left[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right]=\frac{2}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$

(b)
$$P\{a\text{胜}\}=P(aa)+P(acbaa)+P(acbacbaa)+\cdots+P(bcaa)+P(bcabcaa)+\cdots$$
$$=\frac{1}{2^2}\left[1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right]+\frac{1}{2^4}\left[1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right]$$
$$=\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{14}$$

同理 $P(b\text{胜})=\frac{5}{14}$

$$P\{c\text{胜}\} = P(acc) + P(acbacc) + P(acbacbacc) + \cdots + P(bcc) + P(bcabcc) + \cdots$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{7}$$

（c） 此概率为$P(\underbrace{acbacbacb\cdots}_{\text{共}k\text{个}}) + P(\underbrace{bcabcabca\cdots}_{\text{共}k\text{个}})$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

6．若以e记和局，并将“某甲之胜利”定义为连胜两局，或胜一局后接连若干个和局，然后又胜一局（此处约定，在出现和局时，两人继续玩一局），这时样本空间显然为在无和局情况下每一样本点中插入若干个记号e而成，细详言之，即

aa，eaa，aea，$e\cdots eae\cdots ea$；

$e\cdots eae\cdots ece\cdots ebe\cdots eb$

…………………………

$e\cdots eae\cdots ece\cdots ebe\cdots eae\cdots ea$

$e\cdots eae\cdots ece\cdots ebe\cdots eae\cdots ece\cdots ebe\cdots eae\cdots ea$

…………………………

bb，ebb，beb，$e\cdots ebe\cdots eb$；

$e\cdots ebe\cdots ece\cdots eae\cdots ea$

……………………………………

$e\cdots ebe\cdots ece\cdots eae\cdots ebe\cdots eb$，

$e\cdots ebe\cdots ece\cdots eqe\cdots ebe\cdots ece\cdots eae\cdots ebe\cdots eb$

…………………………

$e\cdots eae\cdots ece\cdots ec$，

$e\cdots eae\cdots ece\cdots ebe\cdots eae\cdots ece\cdots ec$

$e\cdots eae\cdots ece\cdots ebe\cdots eae\cdots ece\cdots ebe\cdots eae\cdots ece\cdots ec$

………………………………………………………………

$e\cdots ebe\cdots ece\cdots ec$

$e\cdots ebe\cdots ece\cdots eae\cdots ebe\cdots ece\cdots ec$

$e\cdots ebe\cdots ece\cdots eae\cdots ebe\cdots ece\cdots eae\cdots ebe\cdots ece\cdots ec$

………………………………………………………………

最方便的赋概方法是，设在每两人对局时，和局的概率为q，而特定的一人胜另一人的$pr.$为p。 $2p+q=1$，这时每一样本点

$ae\cdots ece\cdots b\cdots$

的$pr.$为$q^{e\text{之个数}}p^{a、b、c、\text{之个数}}$

在这种赋概方式下，则有a先胜的$pr.$为

$$\left\{\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} p^2 q^{i_1} q^{i_2} + \sum_{i_1,\cdots i_5=0}^{\infty} p^5 q^{i_1}\cdots q^{i_5} + \sum_{i_1,\cdots i_8=0}^{\infty} p q^{i_1}\cdots q^{i_8}\right\}$$

$$+\left\{\sum_{i_1,\cdots,i_4=0}^{\infty} p^4 q^{i_1}\cdots q^{i_4} + \sum_{i_1,\cdots i_7=0}^{\infty} p^7 q^{i_1}\cdots q^{i_7}\right.$$

$$\left.+\sum_{i_1\cdots i_{10}=0}^{\infty} p^{10} q^{i_1}\cdots q^{i_{10}}\right\}$$

$$=\frac{p^2}{(1-q)^2}\left[1+\left(\frac{p}{1-q}\right)^3+\left(\frac{p}{1-q}\right)^6+\cdots\cdots\right]$$

$$+\frac{p^4}{(1-q)^4}\left[1+\frac{p^3}{(1-q)^3}+\left(\frac{p}{1-q}\right)^6+\cdots\cdots\right]$$

$$=\frac{(1-q)^3}{(1-q)^3-p^3}\left[\frac{p^2}{(1-q)^2}+\frac{p^4}{(1-q)^4}\right]$$

$$=\frac{5}{14}\text{（以}q=1-2p\text{代入）}$$

同法算出b、c得胜的pr. 分别为$\frac{5}{14}$、$\frac{2}{7}$即与无和局的情况同。

7. 当$A_1A_2A_3$都发生时，第1、2、3位分别为1，2，3，故第4位必为4，即A_4必发生，因此$A_1A_2A_3 \subset A_4$，又若A_1A_2发生，A_3不发生，则第1、2、3位分别为1，2，4，而第4位为3，故A_4不发生，即$A_1A_2A_3' \subset A_4'$。

8. (a) $S_1S_2D_3$表示第1，2合皆只一个，而第3合两个，一共有四个，不可能。

(b) S_1D_2表示第一合1个，第二合2个，故第三合必为空，即$S_1D_2 \subset E_3$。

(c) $E_3 - D_2S_1$表示第三合为空，但并非第一合1球，第二合2球，而S_2D_1表示第二合1球，第一合2球，显然后者为前者之特例，即$E_3 - D_2S_1 \supset S_2D_1$。

9. $AB = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (6, 1), (4, 1), (2, 1)\}$

$A \cup B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (5, 2), (3, 4), (3, 6)(4, 3), (6, 3), (4, 5)(5, 4) (5, 6), (6, 5)\}$

$AB' = \{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5)\}$

在等可能性具备时，$P(AB) = \frac{1}{6}$，

$P(A\cup B)=\frac{23}{36}$，$P(AB')=\frac{1}{3}$.

10．ABC 表示夫妻年龄皆大于 40，且丈夫年龄更大于妻子.$A-AB$表示丈夫年龄大于40，但不超过妻子的年龄.$AB'C$表示夫妻年龄皆大于40，且丈夫年龄不比妻子大.

11．AC'表示丈夫年龄>40，妻子年龄<40，故丈夫年龄比妻子大，即B对.

12．(*a*) 0 (*b*) 0 (*c*) 4 (*d*) 2 (*e*) 1 (*f*) 1 (*g*) 0.

13—19略

第二章　问　　题

注意：第11，12两节包着不同性质的问题以及课文的各种补充。

10　练习和例子

注意：在每一种情形都假定所有的排列具有相同概率。

1．若每一个人的名字[1]：(*a*)恰巧有2个字；(*b*)至多有两个字；(*c*)至多有3个字；试问姓名不相同的人共有多少？

2．不同颜色的2个城形棋子（国际象棋），在棋盘上能彼此吃掉的放法有多少？

3．电码中，普通的字是以“长划”和“点”二种记号容许重复应用来表示的，问不超过10个记号可以表示的字有多少？

4．每块骨牌刻上2个数，骨牌是对称的，所以同一块牌上的数对是没有次序的．如果用1，2，…n等数，问能刻出多少不同的牌来？

5．数1，2，…n依任意顺序排列，试求数列中：(*a*)1与2；(*b*)1，2和3，以(*a*)，(*b*)为序相继出现的概率．

6．(*a*)在三个随机数码中，一个数码重复发生2次，1次或0次的概率为何？(*b*)对四个随机数码的情形，把上述问题再作一遍．

7．试求在r个随机数码的样本中，没有二个数码相同的概率P_r，并用吏特令公式，估计P_{10}的数值．

8．在K个随机数码中：(*a*)0不出现；(*b*)1不出现；

（c）0与1都不出现；（d）0和1二数至少出现一个的概率为何？令A和B分别表示事件（a）和（b），试用A和B把其余的事件也表示出来。

9. n个球随机放入n个盒中，问恰有一盒空着的概率为何？

10. 一个停车场有12个位置列成一行。某人发现有8个位置停了车，而有4个接连（构成一个连贯）的位置空着。这种发现令人惊奇（是非随机性的表示）吗？

11. 一个人有n个钥匙，其中只有一把能开开他的门。他逐个地用它们去试开（抽样是无放回的）这可能要1次，2次…，n次才能把门开开，证明这n种不同的结果的概率都是$\frac{1}{n}$。

12. 假定n支手杖的每一支都折断成一长一短的二个小段，把这$2n$个小段任意排成n对，组成新手杖。试求：（a）这些小段都连接成原来的样子的概率；（b）所有长的小段都与短的小段配对的概率[2]。

13. 统计假设的检验。某工作人员在某一个星期里，曾经接见访问12次，所有这12次的访问恰巧都是在星期二或星期四。试求该事件的概率。（是否可以断定他只在星期二和星期四接见访问者？）

14. （续前）这12次访问没有一次是星期天，是否可以断言星期日他根本不会客？

15. 一个匣子里，有90只好的螺丝钉，10只坏的螺丝钉，如果从中任意取用10只螺丝钉，恰巧都是好的螺丝钉的概率为何？

16. 从5个记号a，b，c，d，e的总体中，抽取大小为25的一个样本，求样本中恰巧含有每类记号5个的概率。并把a等同

于数字0和1，b等同于数字2和3，等等，用随机数的表来校核这个结果[1]。

17. 若n个人站成一个横列，其中有A和B二人，问夹在A和B之间，恰有r个人的概率为何？如果他们不是站成一列而是站成一圈，试证这个概率与r无关，而且它就是$\frac{1}{n-1}$。

18. 把3颗骰子掷两次，每次出现点子的花样是相同的的概率为何？如果：（a）骰子可分辨的；（b）不可分辨的，试分别求之。

19. 试证，4颗骰子掷一次至少出现一个"么"点的可能性比2颗骰子掷24次至少出现一双"么"点的可能性为大。（这个问题回答了所谓台·曼来的诗论。台·曼来是一个赌徒，他认为这二个概率应该是相等的，由于赌输他曾谴责过数学。）

20. 从一个由n个元素构成的总体中抽出一个大小为r的样本。求指定的N个元素不包含在样本中的概率，假定（a）无放回；(b)有放回的。当（i）$n=100$，$r=N=3$；(ii)$n=100$，$r=N=10$时，比较上述两种抽样法所得到的概率。

21. 谣言的传播。在一个拥有$n+1$个居民的城市里，某一个人告诉第二个人一个谣言，而第二个人又把谣言告诉第三个人，如此等等。在每一步中，谣言的接收都是随机地从n个居民中挑选的。求下述两事件的概率：谣言传播了r次后，（a）还没有回到第一个造谣者，（b）没有一个人两次地听到谣言。当每一次都把谣言同时告诉由城市中随机选取的N个居民时，问上面两事件的概率等于多少？（最初的问题是$N=1$的特别情形。）

22. 书信的连续传递。在一个具有$n+1$个人的集体里，有

一个人——“祖先”，发两封信给两个人——“第一辈后代”。而这两个人又各发两封信给别人，一般地，第r辈后代中的某一个人都随机地发两封信给别人。求出第1，2，…r辈后代都不包含祖先的概率。假定n充分大，求出分布的中位数。

23．一个著名的问题．某家有四个女孩，她们去洗食具。在打破的四个食具中有三个是最小的女孩打破的，因此人家说她笨拙．她是否有理由申辨这完全是碰巧？讨论这一题和球随机地放入盒中的联系。

24．求出下述两事件的概率：（a）12个人的生日在12个不同的月份（假定任何一个人生于12个月中之任一月都是等概的）；（b）6个人的生日恰巧在两个月中。

25．给定30个人，求出12个月中有六个月恰巧包含两个人的生日；有六个月恰巧包含三个人的生日的概率。

26．一个房间里有n双不同型号的鞋子，今从其中随机地抽取$2r$只（$2r<n$），求下面三个事件的概率：（a）没有一双同型号的；（b）恰有一双同型号的；（c）恰有两双同型号的。

27．一辆车子停在有N辆车子的行中间（不在两端），当他过一会在回来的时候，发现N个位置中恰巧有r个位有车。问两个相邻的位置是空的概率为何？

28．把拥有$2N$个男孩和$2N$个女孩的一群孩子分为两群，每群各$2N$个孩子，求每一群中男女数目相等的概率p。并用吏特令公式估计p。

29．证明：在打桥牌中，坐在西方的人恰巧拿住k个爱司的概率p与任取13张牌其中恰有k个爱司的概率相等。（直观上这是很显然的，不过要注意，这两个概率所考虑的试验是不同的，因为在后一种情形中，13张牌是任意抽取的，而在前一种

情形中，52张牌都要分配完的。）

30. 在桥牌游戏中，东家和南家各有m，n张黑桃的概率和从整副桥牌中随机地取两副（每副13张），第一副有m张黑桃第二付有n张黑桃的概率同。

31. 南北两家共有k个爱司$(k=0,1,2,3,4)$的概率为何？

32. 令a，b，c，d为满足$a+b+c+d=13$的四个非负整数，在一次桥牌游戏中，求东南西北各家分别拿到a、b、c、d张黑桃的概率$p(a, b, c, d)$。描述一个把红球黑球放入盒中的模型，而把这个问题作为一个特例。

33. 利用32题的结果，（a）当$a=5, b=4, c=3$，$d=1$时；（b）$a=b=c=4$，$d=1$时；（c）$a=b=4$，$c=3$，$d=2$时，求出$p(a, b, c, d)$之值。

注意，这三种情况有本质的区别。

34. 令a，b，c，d为满足$a+b+c+d=13$的整数，求出在一副桥牌中含有a个黑桃b个红心c个方块和d个梅花的概率$q(a, b, c, d)$，并证明这个问题不可能化为一个把13个球随机地放入4个盒中的模型。为什么？

35. **r张桥牌中爱司的分布**。计算随机抽取r张桥牌，其中恰有0，1，…4，张爱司的概率$p_0(r)$，$p_1(r)\cdots p_4(r)$。验证$p_0(r)=p_4(52-r)$。

36.（续上）**等待时间**。如果取出一张一张牌，求出第1，…，第4张爱司在第r次抽取中出现的概率$f_1(r)$，…$f_4(r)$。猜想第1，…，第4张爱司的等待时间的中位数，并从而算出它们来。

37. 如果两副桥牌中每副都有r张，而且(a)它们都是同一副桥牌中取出来的；（b）它们从两付桥牌中取出的，试求

每一副牌中恰有k个爱司的概率。证明：当$r=13$时，问题（a）的概率与指定两个桥牌游戏者各获 k 个爱司的概率一样。

38. 印错。每一页书中都有N个印刷符号可能误印。全书共有$n=500$页，$r=50$个印错的符号。证明（a）第1，第2，…，第n页分别含有r_1，r_2…，r_n个错的符号的概率等于

$$\binom{N}{r_1}\binom{N}{r_2}\cdots\binom{N}{r_n}\div\binom{nN}{r};$$

（b）当N充分大后，这个概率可以用（5.5）来逼近，并推出r个错误分布在n页的问题近似地与r个球随机地放入n个盒的问题相吻合。（注意：这个可以作为弗米——迪拉克统计的一个普遍的极限性质。参看第5节。）

注意：下面的问题与第5节的材料有联系。

39. 若把r_1个不可分辨的第一类东西和r_2个不可分辨的第二类东西放入 n 个盒中，试求可区分的排列总数。

40. 把r_1个骰子和r_2个小钱一起扔一次；试问有多少可以区分的结果。

41. 把r_1个白球，r_2个黑球，r_3个红球进行排列，试问有多少种可以区分的排列方式。

42. 把52张桥牌随机排列，试问没有两张爱司紧邻的概率为何？

43. 电梯。在例(3.C)中，在开始时载有 7 位乘客 的一架电梯在有10层楼房的每一层上停留，这7个乘客出电梯有各种各样可能的排列，例如我们用（3，2，2）表示有三个乘客在某一层同时出去，另外又有两个乘客在另一层出去，最后两个乘客在某一层一同出去。这种可能的排列从（7）到（1，1，1，1，1，1，1）共有15种，试求出对应于这15种排列的15个概率。