徐利治　周蕴时　何天晓　著

高维数值积分选讲

Selected Topis on the Method of Numerical Integration

安徽教育出版社

高维数值积分选讲

徐利治
周蕴时 著
何天晓

安徽教育出版社

高维数值积分选讲

徐利治　周蕴时　何天晓　著

安徽教育出版社出版

（合肥市跃进路1号）

安徽省新华书店发行　安徽新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168　1/32　印张：9.125　字数：220000

1985年10月第1版　1985年10月第1次印刷

印数：2,300

统一书号：7276·175　定价：1.70元

序　言

高维数值积分方法的研究，多年来始终吸引着国内外计算数学工作者的兴趣，因此各种新成果的出现总是层出不穷；看来每隔四、五年就有总结一次的必要.

1980年拙著《高维数值积分》出版后，我们曾把它作为研究生选修课教材使用，很快就发现不少章节需要补充、改进和刷新.于是通过不断讨论和互相协作，我们终于写成了这本《选讲》.就其内容题材而言,可看成是前一拙著的续篇或姊妹篇.个别章节内容(例如第二章部份题材)与前一著作略有重复，这是由于本书需要自成体系的原故.

本书第一章较详尽地介绍了欧美学者发展起来的代数方法，并在小结中叙述了一系列尚未解决的问题.这些问题的提出,表明代数方法尚有进一步发展的客观要求.

第二章与第三章的基本题材(包括一系列主要结果)，都是本书作者及其合作者工作成果的系统总结.从“方法论”角度看,显然具有自成一套的独立性.应该提到,第二章中的基本引理和展开定理中的余项表示式及其证明等，都是后来在施咸亮、王兴华等同志的工作中重新完成的，因而也就使我们的原始结果获得精化了的表现形式.

本书的三、四、五各章分别论述了三种类型的积分降维法，它们都以 Gauss-Green 公式作为方法的出发点.这些方法各有其一定的适用范围与特色.它们分别是由本书作者之一于1962—63年，Davis于1972年，Kratz于1979年开始提供出来的.后来，Burrows又于1980年提出利用 Lebesgue 测度函数构造降维公式的新方法.

特别是降维展开方法与高维边界型求积公式自然联系，早在六十年代初就被注意到了.实际上，远在1966年前我们(徐利治、王仁宏、周蕴时等)就曾经利用降维展开法构造出一系列边界型求积公式，并作了数值试验，证实某些边界型公式的有效性.但这些结果直到1978年才获得发表机会.现在看来，关于具有各种代数精度的边界型求积公式的具体构造问题，仍有许多工作可做.希望对此有兴趣的计算数学工作者，能继续开展这方面的研究工作.

如大家所知，现代计算工具的迅猛发展，已经促成“离散数学要算法化，计算数学要软件化”的趋势要求.如此说来，作为数值分析或计算方法分支的数值积分法也必须走向软件化.因此，从本书中提供的各种方法和一系列公式出发，如何有选择、有搭配地去设计各种数学软件的问题，应该是有必要研究和很值得研究的课题.例如，关于处理激烈振荡函数积分计算的方法以及某些常用区域上的边界型求积法，如何搞成相应的软件就是值得考虑的问题.

如果这本书的题材能成为实际计算工作者的辅助工具，或者成为软件研究工作者的方法依据，那末此书也就起到它应有的一份作用了.但由于匆促成稿，对各章各节内容未及仔细推敲，故书中的疏忽差错或难避免，因此还希望读者不吝指正.最后，我们要对安徽教育出版社欣然出版本书以及合肥工业大学卢树铭副教授在编辑本书时所完成的细致工作表示诚挚感谢.

徐利治　周蕴时　何天晓

一九八四年元月

目　录

序言

第一章　数值积分的代数方法

第二章　多重积分与激烈振荡函数积分的一个逼近方法

第三章　具有代数精度的降维展开公式

第四章　复域上的降维展开公式

第五章　精确的降维展开法

第一章　数值积分的代数方法

在这一章我们主要介绍以A. H. Stroud 等人为代表的欧美学派发展起来的代数方法．他们使用的主要工具是矩阵代数，线性变换和多元直交多项式理论．关于这些题材我们在《高维数值积分》一书中已经有过论述．本章的基本内容是对前书的增补与延续．

§1.　记号与予备知识

我们认为读者已经熟悉 Riemann 意义下的高维积分的概念，并且也了解它们的一些简单性质．

以下，我们用小写的黑体字母表示向量，例如

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad \mathbf{u}_i=(u_{i,1},u_{i,2},\cdots,u_{i,n})$$

等等．大写的黑体字母表示矩阵，例如$\mathbf{X}$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{I}$等．$\mathbf{X}^T$表示矩阵$\mathbf{X}$的转置矩阵．$\mathbf{X}^{-1}$表示矩阵$\mathbf{X}$的逆矩阵．E_n表示实的n维欧氏空间；R_n，C_n等表示E_n中的区域，自然是$n\geqslant 2$．

为简单计，常使用记号

$$\begin{aligned}I(f)&=I(f(x_1,x_2,\cdots,x_n))\\&=\int_{R_n}\omega(x_1,x_2,\cdots x_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n\end{aligned}$$

特别

$$I(1)=\int_{R_n}\omega(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$\begin{aligned}I(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n})=\int_{R_n}&[\omega(x_1,x_2,\cdots,x_n)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}]\\&\times dx_1dx_2\cdots dx_n\end{aligned}$$

其中α_1，α_2，$\cdots$，α_n为非负整数．一般我们总是假定后两个积分是

存在的.

本章主要研究如下形式的求积公式

$$\int_{R_n}\omega(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}\cong\sum_{i=1}^{N}A_i f(\mathbf{x}_i) \tag{1.1}$$

其中$\omega(\mathbf{x})=\omega(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是权函数，一般情况下总假定$\omega(\mathbf{x})\geqslant 0$且常常是$\omega(\mathbf{x})\equiv 1$；$d\mathbf{x}=dx_1dx_2\cdots dx_n$；诸$\mathbf{x}_i$是$E_n$中的点，通常称它们为求积结点；诸$A_i$是不依赖于$f(\mathbf{x})$的常数，称为求积系数当然也可以用其它字母(例如，$B_1$，$B_2$，$\cdots$，$B_N$)表示求积系数；$N$表示求积公式(1.1)中含求积结点的个数.

我们称求积公式(1.1)右端的求积和与左端积分真值之差

$$\rho_N^{*}=\int_{R_n}\omega(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{N}A_i f(\mathbf{x}_i)$$

为求积余项或求积误差. 有时也将式(1.1)写成

$$\int_{R_n}\omega(\mathbf{x})f(\mathbf{x})dx=\sum_{i=1}^{N}A_i f(\mathbf{x}_i)+\rho_N \tag{1.2}$$

如果对于任意的单项式

$$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}; \qquad k_1+k_2+\cdots+k_n\leqslant d$$

近似等式(1.1)变成精确等式，并且至少有一个$(d+1)$次的单项式使得式(1.1)不能成为精确等式，则说求积公式(1.1)具有d次代数精度(或简称它是d次的求积公式)

我们经常用求积结点和求积系数来简单地表示一个求积公式.例如，可以将求积公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-y^2}f(x,y)dxdy$$

$$\cong\frac{\pi}{4}[f(1,0)+f(-1,0)+f(0,1)+f(0,-1)]$$

简单地写成

$$(1,0)\quad \frac{\pi}{4} \qquad\qquad (0,1)\quad \frac{\pi}{4}$$

$(-1, 0)\quad \dfrac{\pi}{4} \qquad\qquad (0, -1)\quad \dfrac{\pi}{4}$

令$P_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$P_{m,i}(x_1, x_2\cdots, x_n)$表示变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的次数为$m$的多项式；$Q_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$Q_{m,i}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的次数不超过$m$的多项式. 现在介绍一点平面曲线的知识，以后要用它们.

设已知二个二元多项式$P_m(x, y)$和$P_s(x, y)$，考虑方程(平面曲线)

$$P_m(x,y)=0 \qquad P_s(x,y)=0$$

的公共零点(平面曲线的交集).

设$P_m(x,y)$有如下的分解式

$$P_m(x,y)=P_{m_1}(x,y)P_{m_2}(x,y)\cdots P_{m_k}(x,y)$$
$$m=m_1+m_2+\cdots+m_k,\quad m_i\geqslant 1, \qquad i=1,2,\cdots,k$$

且P_{m_i}是不能再分解的了，亦即P_{m_i}是既约的. 显然，除了可能差一常数因子或P_{m_i}的排列顺序外，上述的分解是唯一的. 平面曲线

$$P_{m_1}(x,y)=0, \ \cdots, \ P_{m_k}(x,y)=0 \tag{1.3}$$

与平面曲线

$$P_m(x,y)=0 \tag{1.4}$$

叠合. 称式(1.3)中的曲线为曲线(1.4)的分支. 如果$P_m(x, y)$是既约的，则曲线(1.4)由单支组成. 我们总假定P_m与P_{m_i}的系数属于复数域. 因此，在特殊情况下，方程(1.4)可能没有实解.

例 1 令

$$P_m=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

则P_m总可以分解为

$$P_m=a_m(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$$

并因此$P_m=0$有m个线性分支

$$x-x_1=0, \ \cdots, \ x-x_m=0$$

例 2 令 $P_2=x^2+a_{10}x+a_{01}y+a_{00}$，则容易证明 $P_2(x,y)$ 是既约的充分必要条件是 $a_{01}\neq 0$.

例 3 令$P_2=(x-y+1)^2$，$P_3(x^2+4x-y+1)(x-y+1)$. 则曲线$P_2=0$与$P_3=0$均由两支组成. 直线$(x-y+1)=0$是 $P_2=0$ 的二重支，是$P_3=0$的单重支，它是$P_2=0$与$P_3=0$ 的公共支.

如果二个曲线

$$P_m(x,y)=0 \quad 与 \quad P_s(x,y)=0 \tag{1.5}$$

有公共支，则方程 $P_m(x,y)=0$与 $P_s(x,y)=0$ 有无穷多个公共解.

定理 1 (Bezout) 如果式(1.5)中的二曲线无公共支，则它们恰好有 ms 个交点.

自然，式 (1.5) 中二曲线的交点可能是复的，也可能是重交点，也可能交于无穷远点. 值得注意的是，对于重交点来说，计数时几重交点就算几个交点.

定理 2 如果式 (1.5) 中二曲线交点的个数多于ms 个，则它们有公共支.

定理 2 是定理 1 的弱形式，以后我们也要用到. 作为定理 2 的应用，我们有下面的

定理 3 有 $(m+1)(m+2)/2$个点 $m_i=(x_i,y_i)$，不全在曲线 $Q_m(x,y)=0$上.

证 取不在一条直线上的三个点 m_1，m_2，m_3. 另取一直线 $Q_{1,1}(x,y)=0$，它不通过点 m_1，m_2，m_3，并于其上取三个点 m_4，m_5，m_6. 点m_1，m_2，…，m_6一定不在一条二次曲线$Q_2=0$上. 假若不然，依定理 2，Q_2与$Q_{1,1}$有公共支，并因此 $Q_{1,1}$ 是Q_2的一个分支. 从而Q_2是两个线性因子的乘积. 这是不可能的，因为 m_1，m_2，m_3 不在一条直线上.

今再取一直线$Q_{1,2}=0$，它不通过点 m_1，m_2，…，m_6 并于其上取四个点m_7，m_8，m_9，m_{10}. 点m_1，m_2，…，m_{10}一定不在一条

三次曲线$Q_3=0$上.假若不然，依定理 2，$Q_{1,2}$是Q_3的一个分支，亦即$Q_3=Q_2\cdot Q_{1,2}$.因为m_1，m_2，…，m_6不在$Q_{1,2}=0$上，故它们必在$Q_2=0$上.但是，上面已经证明这是不可能的.如此继续下去，可以找到$(m+1)(m+2)/2$个不全在曲线$Q_m=0$上的点.证毕.

上述的一些结果已被推广到多个变量的情形. 我们只用到二个变量的 Bezout 定理.

我们还将用到下面的

定理 4 假若P_m和P_s无公共支，且它们的公共零点(x_i, y_i) $(i=1, 2, \cdots, ms)$是不同的. 又设$P_k(x, y)$是一个不恒等于零的多项式，$(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, ms)$是$P_k(x, y)$的零点，则$k\geqslant\min(m, s)$，并且有多项式$Q_{k-m}$和$Q_{k-s}$使得

$$P_k=Q_{k-m}P_m+Q_{k-s}P_s$$

定理 4 是 Max Noether 定理的简单形式，Q_{k-m}和Q_{k-s}中之一(不是两个)允许恒等于零.

Max Noether 定理的证明可参阅 J. G. Semple 和 L. Roth的书(**[86]**，p. 94—96)；Bezout定理的证明可参阅**[87]**.

§2. Tchakaloff 定理

设$R_n\subset E_n$是有界的，$\omega(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在$R_n$上是非负的；我们将证明，对于任给的正整数$d>1$，恒可以构造$d$次代数精度的(1.1)型的求积公式，并且求积系数$A_i$全为正数，求积结点$\mathbf{x}_i=(x_{1,i}, x_{2,i}, \cdots, x_{n,i})$均含于$R_n$内，结点个数最多需要$N(n, d)=(n+d)!/n!d!$.这个结论是由 Tchakaloff 证明的[83].为简明计，我们假定$n=2$.对于$n>2$的情形，证明是完全一样的.

首先引进如下的记号与定义：

(i) $\phi_N=(0,0,\cdots,0)$表示E_N的原点

(ii) $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \cdots, u_N)$，$\mathbf{v}=(v_1, v_2, \cdots, v_N)$是$E_N$的两个点，则$(\mathbf{u},\mathbf{v})$表示内积

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_Nv_N$$

$\sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{v})}$ 表示 $\mathbf{u}$ 与 ϕ_N 的距离.

(iii) $l_{\phi,u}$ 表示联结 ϕ_N 和 $\mathbf{u}$ 的直线段. $\theta_{u,v}$表示$l_{\phi,u}$ 与$l_{\phi,v}$ 之间的夹角，由解析几何知

$$\cos\theta_{u,v}=\frac{(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})}\sqrt{(\mathbf{v},\mathbf{v})}}$$

定义 1 E_N 的超平面 $\mathscr{H}_{N-1}$ 是E_N的$(N-1)$维子空间(一般并不假定 $\phi_N\in\mathscr{H}_{N-1}$).

定义 2 称E_N的点集$\mathscr{K}$是凸的，如果对于任意的实数 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2\in\mathscr{K}$，蕴涵着 $\lambda\mathbf{v}_1+(1-\lambda)\mathbf{v}_2\in\mathscr{K}$.

显然，这个关于凸集的定义是笛卡儿平面上凸集合概念的拓广.

定义 3 称E_N 的点集$\mathscr{K}$为凸锥，如果对于每对实数$\lambda_1\geqslant0$，$\lambda_2\geqslant0$ 和 $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2\in\mathscr{K}$ 有 $\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2\in\mathscr{K}$.

如果$\mathscr{K}$是凸锥，则依定义，$\phi_N\in\mathscr{K}$. 显然如果 $\mathscr{K}$ 不是全空间，则 ϕ_N 是它的边界点. 自然，可以将 ϕ_N 看成 $\mathscr{K}$ 的顶点.

定理 5 (Minkowski) 令$\mathscr{K}$是E_N中的一个非空闭凸集，且$\mathscr{K}$不是E_N. 若$\mathbf{c}=(c_1, c_2, \cdots, c_N)$是$E_N$中不属于 $\mathscr{K}$ 的任意点，则有超平面 $\mathscr{H}$ 将 $\mathbf{c}$ 与 $\mathscr{K}$ 隔开.

定理 5 的证明可以参阅 T. Botts 的文章**[76]**.

定理 6 若 $\mathscr{K}$ 是E_N中的一个闭凸锥，且$\mathscr{K}$不是E_N. 又若$\mathbf{c}\in E_N\setminus\mathscr{K}$，则对所有的 $\mathbf{v}\in\mathscr{K}$， 有 $\mathbf{u}\in E_N$ 使得

$$(\mathbf{c},\mathbf{u})<0,\quad(\mathbf{v},\mathbf{u})\geqslant0$$

证 依定理 5，有超平面$\mathscr{H}_{N-1}$将$\mathbf{c}$与$\mathscr{K}$隔开. 因为ϕ_N是$\mathscr{K}$的顶点，可以取$\mathscr{H}_{N-1}$使得 $\phi_N\in\mathscr{H}_{N-1}$. 令 $\mathbf{u}$ 是一个和 $\mathscr{K}$ 同属$\mathscr{H}_{N-1}$的一侧的点，并且使得线$l_{\phi,u}$垂直于$\mathscr{H}_{N-1}$. 若 $\mathbf{v}\in\mathscr{K}$，则$\theta_{u,v}\leqslant90°$. 因此$\cos\theta_{u,v}\geqslant0$，并从而$(\mathbf{v}, \mathbf{u})\geqslant0$. 又因为$\theta_{c,u}>90°$，所以$(\mathbf{c}, \mathbf{u})<0$，证毕.

定理 7 令$\mathbf{u}$，$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$，…，$\mathbf{v}_p$是E_N中的向量，且

$$\mathbf{u}=\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\cdots+\lambda_p\mathbf{v}_p$$

其中λ_1，λ_2，…，λ_p是正的．若$p>N$，则$\mathbf{u}$可以用$\mathbf{v}_i$中的$k(\leqslant N)$个线性表示，且系数是非负的．

证 若$p>N$，则$\mathbf{v}_i$是线性相关的，亦即有不全为零的α_1，α_2，…，α_p使得

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_p\mathbf{v}_p=0$$

不失一般性，可以认为至少有一个α_i是正的，因此$\mu=\max\limits_i(\alpha_i/\lambda_i)>0$．显然

$$\mathbf{u}=\xi_1\mathbf{v}_1+\xi_2\mathbf{v}_2+\cdots+\xi_p\mathbf{v}_p$$

$$\xi_i=(\mu\lambda_i-\alpha_i)/\mu\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$$

且ξ_i中至少有一个是零．从而，$\mathbf{u}$可以用$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$，…，$\mathbf{v}_p$中的$p_1(\leqslant p-1)$个线性表示，且系数非负．若$p_1\leqslant N$，则已经证明了定理的结论；若$p_1>N$，则可以重复上述的论证过程．证毕．

令$\mathscr{A}$是一个抽象集合，并假定对每一个$s\in\mathscr{A}$，均有单位向量$\mathbf{v}_s\in E_N$与之对应．全体$\mathbf{v}_s$作成的集合用$\mathscr{V}(\mathscr{A})$表示．

定义 4 如果E_N中的向量集$\mathscr{V}(\mathscr{A})$有以下四条性质，则称它为基本向量集：

(i) $\mathscr{V}(\mathscr{A})$是有界的，亦即对所有的$\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$，有实常数$L$使得$\sqrt{(\mathbf{v}_s,\mathbf{v}_s)}\leqslant L$

(ii) $\mathscr{V}(\mathscr{A})$是闭的，并因此它是紧致的

(iii) $\mathscr{V}(\mathscr{A})$含有N个线性无关的向量

(iv) 对所有的$\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$，有向量$\mathbf{w}\in E_N$使得$(\mathbf{v}_s,\mathbf{w})>0$

注意，若$\mathscr{V}(\mathscr{A})$是基本向量集，并且对所有的$\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$有$(\mathbf{v}_s,\ \mathbf{w})>0$，则$\inf\limits_s(\mathbf{v}_s,\ \mathbf{w})>0$．事实上，假若不然，亦即

$$\inf_s(\mathbf{v}_s,\mathbf{w})=0$$

则可以找到$\mathscr{V}(\mathscr{A})$的子列$\{\mathbf{v}_{si}\}$使得

$$\lim_{i=\infty}(\mathbf{v}_{si},\mathbf{w})=0$$

因为$\mathscr{V}(\mathscr{A})$是紧致的，$\{\mathbf{v}_{si}\}$有一个收敛的子列，不妨设收敛于$\mathbf{v}_{so}\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$，这将导至$(\mathbf{v}_{so},\ \mathbf{w})=0$.矛盾.

定义 5 给定E_N中的一个基本向量集$\mathscr{V}(\mathscr{A})$，我们定义一个新的向量集$\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$，它的元素$\mathbf{u}\in E_N$，并且是$\mathscr{V}(\mathscr{A})$中$k(\leqslant N)$个向量的线性组合（系数非负）.换言之，$\mathbf{u}\in\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$的充分必要条件是有$\mathbf{v}_{si}\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$和实数$b_i\geqslant 0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$，使得

$$\mathbf{u}=b_1\mathbf{v}_{s1}+b_2\mathbf{v}_{s2}+\cdots+b_N\mathbf{v}_{sN}$$

定理 8 $\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$是$E_N$中的闭凸锥.

证 先证明$\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$是闭的.考察向量集$\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$的序列$\{\mathbf{u}_i\}$：

$$\mathbf{u}_i=b_{i1}\mathbf{v}_{si1}+b_{i2}\mathbf{v}_{si2}+\cdots+b_{iN}\mathbf{v}_{siN}$$

$$\mathbf{v}_{sij}\in\mathscr{V}(\mathscr{A}),\ b_{ij}\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,N,\ i=1,2,\cdots$$

它收敛于向量$\mathbf{u}_0\in E_N$.我们需要证明$\mathbf{u}_0\in\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$.

首先证明，对于每一个j，序列$\{b_{ij}\}(i=1,\ 2,\ \cdots)$是有界的.令$\mathbf{w}$对全体$\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$满足$(\mathbf{v}_s,\ \mathbf{w})>0$，则

$$(\mathbf{u}_i,\mathbf{w})=\sum_{j=1}^{N}b_{ij}(\mathbf{v}_{ij},\mathbf{w})\geqslant b_{ij}(\mathbf{v}_{sij},\mathbf{w})\geqslant b_{ij}\inf_s(\mathbf{v}_s,\mathbf{w})\geqslant 0$$

因为$\inf\limits_s(\mathbf{v}_s,\mathbf{w})>0$，所以

$$0\leqslant b_{ij}\geqslant\frac{(\mathbf{u}_i,\mathbf{w})}{\inf\limits_s(\mathbf{v}_s,\mathbf{w})}$$

由于$\{\mathbf{u}_i\}$收敛于$\mathbf{u}_0$，所以$\{\mathbf{u}_i\}$是有界的，从而序列$\{(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{w})\}$是有界的.依 Cauchy 不等式$(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{w})^2\leqslant(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{u}_i)(\mathbf{w},\ \mathbf{w})$知，对于每一个$j$，集合$\{b_{ij}\}$是有界的.

综上所述，有k的整数序列使得

$$\lim_{k\to\infty} b_{kj}=b_j \qquad \lim_{k\to\infty} \mathbf{v}_{skj}=\mathbf{v}_{sj}$$

这意味着

$$\mathbf{u}_0=b_1\mathbf{v}_{s1}+b_2\mathbf{v}_{s2}+\cdots+b_N\mathbf{v}_{sN}\in\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$$

从而 $\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$是闭集.

对于任意的$\lambda_1\geqslant 0$，$\lambda_2\geqslant 0$，如果$\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2\in\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$，则依定理7，$\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2\in\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$. 证毕.

定义 6 我们说向量$\mathbf{c}\in E_N$关于基本集合$\mathscr{V}(\mathscr{A})$是正的，如果对于满足$(\mathbf{v}_s,\mathbf{w})\geqslant 0(\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(\mathscr{A}))$的每一个$\mathbf{w}$，均有$(\mathbf{c},\mathbf{w})\geqslant 0$.

定理 9 如果$\mathbf{c}$关于基本集合$\mathscr{V}(\mathscr{A})$是正的，则$\mathbf{c}\in\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$.

证 令$\mathbf{c}\in E_N\setminus\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$. 依定理6，有向量$\mathbf{w}\in E_N$，使得对于全体$\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$有

$$(\mathbf{c},\mathbf{w})<0 \qquad (\mathbf{v}_s,\mathbf{w})\geqslant 0$$

这样，关于集合$\mathscr{V}(\mathscr{A})$，$\mathbf{c}$就不是正的了。

现在，我们已经能够证明下面的

定理 10 (Tchakaloff, 1957) 令R_2是E_2中的有界闭区域；$\omega(x,y)$在R_2上非负可积，且

$$0<I(1)<\infty$$

d是固定的正整数. 则可以构造d次代数精度的求积公式

$$\int_{R_2}\omega(x,y)Q_d(x,y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{N}A_iQ_d(x_i,y_i)$$

并且它有以下三条性质：

(i) $N\leqslant N(2,d)=(d+1)(d+2)/2$

(ii) $(x_i,y_i)\in R_2 \qquad i=1,2,\cdots,N$

(iii) $A_i(i=1,2,\cdots,N)$是正的.

证 定义$\mathscr{V}(R_2)$是由如下形式的N维向量作成的集合：

$$\mathbf{v}_s=(1,\ x_s,\ y_s,\ x_s^2,\ x_sy_s,\ \cdots,\ y_s^d)$$

其中$(x_s,\ y_s)\in R_2$. 由于R_2是闭的，有界的，所以$\mathscr{V}(R_2)$亦是闭的，有界的.对于全体$\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(R_2)$，向量

$$\mathbf{w}=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\in E_N$$

满足$(\mathbf{v}_s,\mathbf{w})>0$.

定义$L_n^d(\mathbf{p})=\{\mathbf{p}:\ 0\leqslant p_1+p_2+\cdots+p_n\leqslant d\}$，例如，$L_2^2(p)=\{(0,0),\ (1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (0,1),\ (1,1),\ (0,2)\}$.又定义$L_n^d(\mathbf{m}_p)=\{(m_{p_1},\ m_{p_2},\ \cdots,\ m_{p_n}):\mathbf{p}\in L_n^d(\mathbf{p})\}$. $L_n^d(\mathbf{m}_p)$也可以看成是$L_n^d(\mathbf{p})$的推广. 例如，若$m_0=0.1$，$m_1=0.4$，$m_2=0.5$，则$L_2^2(\mathbf{m}_p)=\{(0.1,\ 0.1),\ (0.4,\ 0.1),\ (0.5,\ 0.1),\ (0.1,\ 0.4),\ (0.4,\ 0.4),\ (0.1,\ 0.5)\}$.

因为$0<I(1)<\infty$，所以R_2内部是非空的，且R_2含有点集$L_2^d(m_p)$. 因为$\det\mathbf{W}_n^d\neq 0$，所以$\mathscr{V}(R_2)$含有N个线性无关的向量，从而$\mathscr{V}(R_2)$是E_N中的基本向量集.令$\mathscr{K}_N(R_2)$表一向量集，它的元素$\mathbf{u}\in E_N$，且可以写成

$$\mathbf{u}=b_1\mathbf{v}_{s1}+b_2\mathbf{v}_{s2}+\cdots+b_N\mathbf{v}_{sn}$$

$$\mathbf{v}_{si}\in\mathscr{V}(R_2)\qquad b_i\geqslant 0\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

依定理8　$\mathscr{K}_N(R_2)$是一个闭凸锥，并且$\mathscr{K}_N(R_2)$不是E_N，因为它不含向量$(-1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$.

给定一个次数$\leqslant d$的多项式$Q_d(x,\ y)$

$$Q_d=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+\cdots+a_{0d}y^d$$

作与之对应的向量

$$\mathbf{w}_Q=(a_{00},\ a_{10},\ a_{01},\ a_{20},\ a_{11},\ \cdots,\ a_{0d})$$

则对于给定的$(x_s,\ y_s)\in R_2$，$(\mathbf{w}_s,\ \mathbf{w}_Q)$是$Q_d$在$(x_s,\ y_s)$处的值.定义

$$\mathbf{c}=(c_{00},\ c_{10},\ c_{01},\ c_{20},\ c_{11},\ \cdots,\ c_{0d})$$

其中$c_{\alpha\beta}=I(x^\alpha y^\beta)$，则