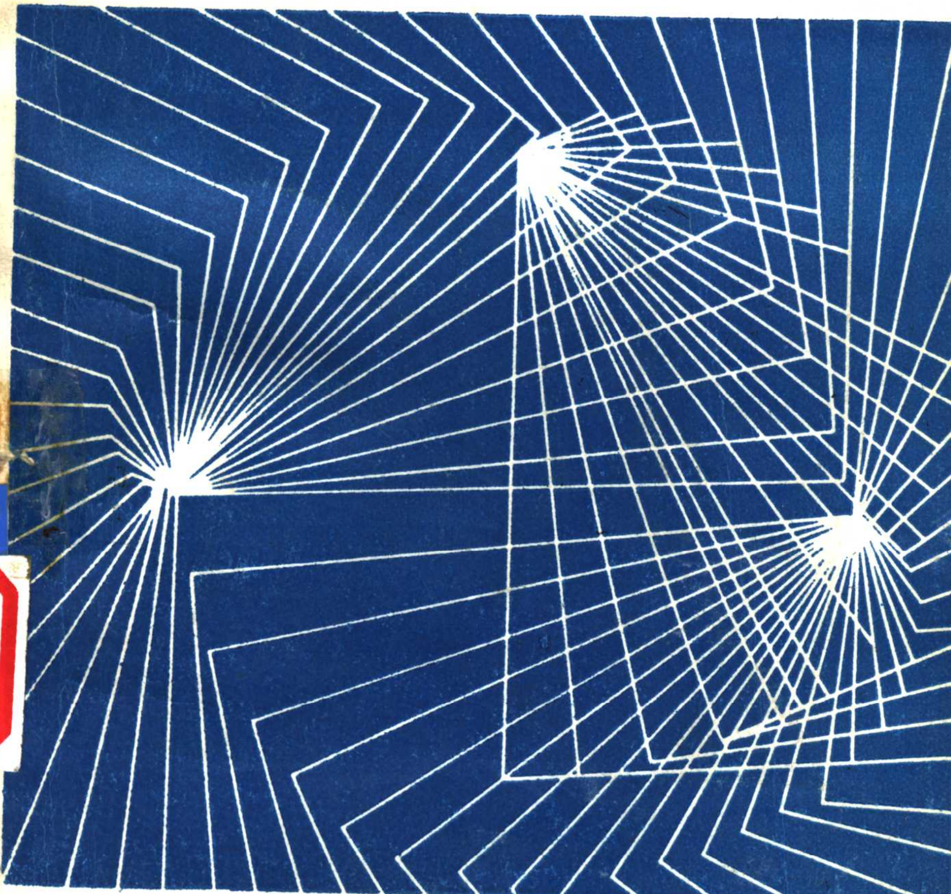
成人高等教育教材

高等数学题解指导

吴满 温向阳 洪潮兴 陈凤平 编

华南理工大学出版社



成人高等教育教学参考书

高等数学题解指导

吴　满　温向阳
洪潮兴　陈凤平　编

华南理工大学出版社

内 容 提 要

本书是华南理工大学成人高等教育教材编委会组织编写的《高等数学》教材第一、第二册的配套参考书。内容包括有关一元及多元函数微积分学、向量代数与空间解析几何、级数与微分方程等方面的典型例题分析以及教材中相应章节的大部分习题解答。本书可作为普通高等理工院校师生的教学、自学参考书及参加自学考试者的辅导资料，也可供工程技术人员参考之用。

成人高等教育教学参考书

高等数学题解指导

吴 满　温向阳
洪潮兴　陈凤平　编

责任编辑　梁文厚

*

华南理工大学出版社出版发行

（广州 五山　邮码 510641）

各地新华书店经销

华南理工大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 15 字数 329 千

1990 年 10 月第 1 版　1993 年 11 月第 4 次印刷

印数：14 901—19 900

ISBN 7—5623—0194—8/O・18

定价：9.20 元

前　言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分，是普通高等学校的基本任务之一。

我校在稳步发展全日制本科教育、研究生教育的同时，挖掘潜力，充分发挥学科齐全、师资力量雄厚、办学条件好、办学经验丰富等优势，为适应社会主义建设的需要，于1957年创办了高等函授教育，继而办起夜大学，发展到1987年经国家教委批准正式成立华南理工大学成人教育学院，统筹管理全校的成人高等教育工作。三十多年来，我校的成人高等教育为广东省、海南省、广西壮族自治区培养了一大批科技人才。特别是党的十一届三中全会以来，我校的成人高等教育主动地适应沿海地区开放改革的需要，面向珠江三角洲、经济开发区的市、县、乡镇企业，开展多层次、多形式、多规格的普通专科教育，职业技术教育，大学后的继续教育。从1981年至1989年为广东省培养了本、专科毕业生五千多人；岗位培训、专业技术培训、高等教育自学考试辅导、大学后的继续教育等近两万人。这些学生回到生产和工作岗位后，大部分发挥了骨干作用，不少学生担任了工厂企业的领导、工程师、高级工程师等重要职务，为社会主义建设事业做出了较大的成绩，创造了较好的经济效益和社会效益。教材建设是成人高等教育的重要任务之一，对保证教育质量的提高起着十分重要的作用。几年来，我校组织有教学经验的教师编写了适应成人学习特点的工业与民用建筑、电

子技术、工业管理工程等三个专业的系列专科教材和自学辅导书，为促进教育质量的提高起了积极的作用。

为了更好地搞好我校成人高等教育的教材建设，提高教材的质量，有组织、有计划地编写出版质量较高的成人高等教育的教材，特成立“华南理工大学成人教育学院成人高等教育教材编辑委员会”。编委会的任务是：一、聘请有丰富教学经验的专家、教授有计划地编写成人高等教育教材、自学指导书；二、挑选国内出版的、质量较高的、适应成人学习的教材。

学校领导、各系领导、华南理工大学出版社以及广大教师对我院“成人高等教育教材编辑委员会”的工作一贯给予热忱的支持，在此一并致谢。

华南理工大学成人教育学院

院长　张刚能

一九九〇年一月　于广州

编者的话

本书是根据全国普通高等理工院校成人教育研究会数学研究组制定的“普通高等理工院校成人教育《高等数学》教学基本要求”，并参照由国家教委批准印发的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》、广东省高等教育自学考试各专业的《高等数学》考试大纲而编写的。

在编写过程中，我们吸取了我校成人教育学院组织编写过的几套高等数学教材的优点和长处，总结了编者多年来在成人教育学院的教学经验和体会，并针对成人教育的特点，注意精选内容，突出基本概念、基本理论和基本方法，力求做到概念准确、理论正确、说理清楚、叙述通俗易懂且详简适当。书中注意突出体现教学方法和学习方法，例题广泛、丰富，以利读者自学。

本书教材部分分三册。第一册内容有函数与极限、一元函数微分学及一元函数积分学；第二册内容有向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、级数与微分方程；第三册内容有线性代数与概率论并含题解指导。第一、二册的题解指导将以《高等数学题解指导》的名称另册出版。

本书可作为各类成人高等教育院校理工科的本科与专科教材，也可作为普通高等学校理工科专科及少学时本科专业的教材，也可作为高等教育自学考试人员应考的主要参考书。在采用本书作教材时，可根据本、专科的不同层次不及同专业对教学内容进行恰当的选取。

本书由“华南理工大学成人教育学院成人高等教育教材编辑委员会”统一领导组织编写。第一、二册及《高等数学题解指导》由吴满、温向阳、洪潮兴、陈凤平编写，第三册由洪潮兴、谢满耀、温向阳编写。全书由洪潮兴、温向阳统编定稿，由华南理工大学应用数学系研究生数学教研组主任何淑芷主审。

尽管编者有力求把本书编好的愿望，但由于编者学识有限，书中不妥之处难免，恳请广大读者批评指正，谨致谢意。

编　者

1990年1月　于广州

目　　录

第一章　函数、极限与连续性

例 题 分 析

例1　设$f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$.

（1）确定$f(x)$的定义域；

（2）研究$f(x)$的奇偶性；

（3）研究$f(x)$的单调性；

（4）若$F(x)=f(x)-f\left(\dfrac{2}{x}\right)$，试计算$F(x)$，并求$F(x)$的定义域。

解　（1）由对数性质知

$$\frac{2-x}{2+x}>0.$$

解之得$-2<x<2$，故$f(x)$的定义域为$(-2,2)$。

（2）$f(-x)=\ln\dfrac{2-(-x)}{2+(-x)}=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$

$$=-\ln\frac{2-x}{2+x}=-f(x).$$

故$f(x)$是奇函数，

（3）任取x_1、x_2，使适合$-2<x_1<x_2<2$。则

$$2-x_1>2-x_2>0,\quad 2+x_2>2+x_1>0,$$

$$0<\frac{(2-x_2)(2+x_1)}{(2-x_1)(2+x_2)}<1,$$ 从而有

$$f(x_2)-f(x_1)=\ln\frac{2-x_2}{2+x_2}-\ln\frac{2-x_1}{2+x_1}$$

$$=\ln\frac{(2-x_2)(2+x_1)}{(2-x_1)(2+x_2)}<0,$$

即$f(x_2)<f(x_1)$。依单调性概念知$f(x)$在区间$(-2,2)$内单调减。

（4）$$F(x)=f(x)-f\left(\frac{2}{x}\right)=\ln\frac{2-x}{2+x}-\ln\frac{2-\frac{2}{x}}{2+\frac{2}{x}}$$

$$=\ln\frac{(2-x)(x+1)}{(2+x)(x-1)}.$$

由于$f(x)$的定义域为$D=\{x\mid |x|<2\}$，故$f\left(\frac{2}{x}\right)$的定义域应为 $E=\left\{x\,\middle|\,\left|\frac{2}{x}\right|<2\right\}=\{x\mid |x|>1\}$。

从而$F(x)$的定义域为

$$B=D\cap E=\{x\mid 1<|x|<2\}.$$

用区间表示则为

$B=(-2,-1)\cup(1,2)$。

例2 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-x}, & \text{当} |x|<1;\\ \dfrac{x-1}{x+1}, & \text{当} |x|\geqslant 1.\end{cases}$

若n为自然数，试求$f\left(\frac{1}{n}\right)$、$f\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]$及$f[f(n)]$的值。

解 当$n>1$时，$0<\frac{1}{n}<1$。故

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{n+1}{n-1}>1.$$

$$f\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]=f\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\frac{\frac{n+1}{n-1}-1}{\frac{n+1}{n-1}+1}=\frac{1}{n}.$$

$$f(n)=\frac{n-1}{n+1},0<f(n)<1.$$

$$f[f(n)]=f\left(\frac{n-1}{n+1}\right)=\frac{1+\frac{n-1}{n+1}}{1-\frac{n-1}{n+1}}=n.$$

当$n=1$时，则

$$f(1)=f\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{1-1}{1+1}=0.$$

$$f[f(1)]=f\left[f\left(\frac{1}{1}\right)\right]=f(0)=\frac{1+0}{1-0}=1.$$

本例的函数$f(x)$对于不同区间上的x值用不同的对应法 则来确定其函数值，因此称之为分段函数。它仍然是一个函数，而不是几个函数，它的定义域是$(-\infty, +\infty)$。计算分段表示的函数值时，要注意已给出的x值所在的区间，以便正确地选用计算式。

例3 设$f(x)=\dfrac{2}{1+e^{1/x}}$。研究下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot f(x)$。

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{x}=+\infty$，故

$$\lim_{x\to -0}\frac{2}{1+e^{1/x}}=\frac{2}{1+0}=2,$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{2}{1+e^{1/x}}=0.$$

左、右极限不相等，所以极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。

(2) 因$0<f(x)<\dfrac{2}{1+0}=2$，即$f(x)$有界，又$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，即当$x\to 0$时$\sin x$为无穷小，故

$\lim\limits_{x\to 0}\sin x f(x)=0$（根据无穷小性质）。

注意，下列写法是错误的：

$\lim\limits_{x\to 0}\sin x f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin x\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，这是由于$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在之故。

例4 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+2}-\sin\sqrt{x})$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos x)}$；

（5）$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{b^{1/x}-1}{a}\right)^x$，$(a>0,b>0)$；

（6）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{(x-1)}-1}{(x-1)^2}$。

解 （1）原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{(1+x)^{1/2}-1}{x}-\dfrac{(1-x)^{1/3}-1}{x}}{\dfrac{(1+3x)^{1/3}-1}{x}-\dfrac{(1-2x)^{1/2}-1}{x}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3\cdot\frac{1}{3}-(-2)\cdot\frac{1}{2}}=\frac{5}{12}.$$

注：本题的解题过程中，运用了极限公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha\quad(\alpha\text{是实数}).$$

（2）当$x\to+\infty$时，$\sqrt{x+2}\to+\infty$，$\sqrt{x}\to+\infty$，极限不存在，$\sin\sqrt{x+2}$、$\sin\sqrt{x}$也都不存在极限，因此极限的减法法则在这里不适用。

现考察 $\sin\sqrt{x+2}-\sin\sqrt{x}=2\sin\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}$

$$\cdot\cos\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{2}=2\sin\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\cos\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{2}.$$

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=0$,

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=0.$

又 $\left|2\cos\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 2$,

所以，由无穷小性质知

$$\lim_{x \to +\infty} (\sin\sqrt{x+2} - \sin\sqrt{x}) = 0.$$

（3）原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos(a+x)\cos x - 2\cos(a+x)}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos(a+x)(\cos x - 1)}{x^2}$$

$$= 2\cos a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\cos a.$$

注：含三角函数的 $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ 型极限，一般应用重要极限公式

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 及由此衍生的公式 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

（4）原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\cos^2 3x}{\ln\cos^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-\sin^2 3x)}{\ln(1-\sin^2 x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-\sin^2 3x)}{-\sin^2 3x} \cdot \frac{-\sin^2 3x}{-\sin^2 x}$$

$$\cdot \frac{-\sin^2 x}{\ln(1-\sin^2 x)} = 1 \cdot 9 \cdot 1 = 9.$$

注：含对数式的 $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ 型极限的基本结果是

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

（5）当 $b=1$ 时，