工科课程提高与应试丛书

- 涵盖课程重点及难点
- 精设典型题详解及评注
- 选配课程考试模拟及全真试卷

车刚明　聂玉峰　封建湖　欧阳洁　编著

数值分析

典型题解析及自测试题

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书主要是为理工科大学的研究生及本科生学习数值分析(计算方法)课程而编写的辅导参考书。内容包括:误差基础知识、函数插值、函数逼近、数值积分与数值微分、解线性代数方程组的直接法与迭代法、方程求根、矩阵特征值和特征向量的计算以及常微分方程初值问题的数值解法等内容要点及典型习题的分析思路与求解方法。

本书可作为理工科各专业研究生及本科生学习数值分析(计算方法)课程时的参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

数值分析典型题解析及自测试题/车刚明等编著．—西安:西北工业大学出版社,2002.2

(工科课程提高与应试丛书)

ISBN 7-5612-1448-0

Ⅰ．数… Ⅱ．① 车… Ⅲ．数值计算—高等学校—解题 Ⅳ．0241-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 007344 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072 电话:(029)8493844
网　　址:http://www.nwpup.com
印 刷 者:长安县第二印刷厂
开　　本:850 mm×1 168 mm 1/32
印　　张:10
字　　数:253 千字
版　　次:2002 年 2 月第 1 版 2002 年 2 月第 1 次印刷
印　　数:1～6 000 册
定　　价:13:00 元

前　言

本书是专为学习数值分析(计算方法)的读者编写的。书中对精选的近200道典型例题进行了分析、求解,旨在帮助读者加深对所学数值分析内容的理解和掌握。

本书具有以下特点:

(1)除一些常规题目外,对其余题目在求解或证明之前均进行了必要的分析,指出了求解或证明的思路,使读者能从中更容易学会解题方法,这是本书的最大特点。另外,对有些题目,书中还给出了多种解法,有些题目后边还附有"评注",这些都能使读者的思路进一步得到拓展。

(2)选自历届课程结业考题及考研试题的例题都是经过精选的具有代表性的典型例题,有些题目本身就是很有用的定理或实用算法,有些题目是对教材中相关内容的深入、补充和完善,从而使读者能系统全面地加深理解和掌握。

(3)每章后边有适量习题供读者练习用,书后附有10套自测试题,以使读者能对所学内容的掌握程度进行自测。书后的附录列有各章习题和自测试题答案,便于读者自己检查。

(4)书中每章开头都有数值分析的内容提要以方便读者查阅。

本书第一、二、三章由聂玉峰执笔,第四章由欧阳洁执笔,第五、六、九章由车刚明执笔,第七、八章由封建湖执笔,最后由车刚明定稿。

限于作者水平,加之时间仓促,本书一定有错误和不妥之处,恳请广大读者批评指正。

作　者

2001年10月

目　　录

第一部分　典型题解析

第二部分　自测试题

附录　习题及试题答案

第一部分　典型题解析

第一章　误差的度量与传播

一、内 容 提 要

(一)误差度量

(1)数值分析研究两类误差:舍入误差和截断误差.由于计算机字长的有限性,对相关数据进行存储表示时便产生舍入误差.计算机必须在有限的时间内得到运行结果,于是无穷的运算过程必须截断为有限过程,由此产生截断误差(方法误差).

(2) 误差的度量方式有:绝对误差(限)、相对误差(限) 和有效数字.设 x^* 是真值 x 的一个近似.绝对误差为 $e(x^*) = x^* - x$,相对误差为 $e_r(x^*) = \dfrac{e(x^*)}{x} \approx \dfrac{e(x^*)}{x^*}$.绝对误差限 $\varepsilon(x^*)$ 和相对误差限 $\varepsilon_r(x^*)$ 分别是 $|e(x^*)|$ 和 $|e_r(x^*)|$ 的上限.

(3) 对于非零近似值 x^* 的如下规格化标准形式

$$x^* = \pm 10^m \times 0.\underline{x_1 x_2 \cdots x_n \cdots x_p}, \quad x_1 \neq 0 \qquad (1.1)$$

如果有 $|e(x^*)| \leqslant \dfrac{1}{2} \times 10^{m-n}$,则称 x^* 有 n 位有效数字.进而当 $n = p$ 时,称 x^* 是有效数.

(4) 有效数字和相对误差的关系

定理 1.1 如果形如式(1.1) 的 x^* 有 n 位有效数字，则 $|e_r(x^*)| \leqslant \frac{1}{2x_1} \times 10^{1-n}$.

定理 1.2 如果形如式(1.1) 的 x^* 的相对误差满足 $|e_r(x^*)| \leqslant \frac{1}{2(x_1+1)} \times 10^{1-n}$，则 x^* 有 n 位有效数字.

(二) 浮点数系统

对于 $s+t+2$ 位的浮点数系(s 表示二进制阶码数值的二进制位数，t 表示尾数的二进制位数，其它两位表示阶码和尾数的符号)，机器数绝对值的范围是 $2^{-2^s} \sim 2^{2^s-1}$，实数表示的相对舍入误差限是 2^{-t}. 当数据的绝对值大于 2^{2^s-1} 时，计算机非正常停机，称之为上溢. 当非零数据的绝对值小于 2^{-2^s} 时，用机器零表示，精度损失，称之为下溢.

(三) 误差传播

如果在运算过程中舍入误差能够得到控制，或者舍入误差的增长不影响产生可靠的结果，则称该算法是数值稳定的.

函数值绝对误差传播公式如下：

$$e(f(x^*)) \approx f'(x^*)e(x^*) \tag{1.2}$$

$$e(f(x_1^*,\cdots,x_n^*)) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_i} e(x_i^*) \tag{1.3}$$

$$\varepsilon(f(x^*)) \approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*) \tag{1.4}$$

$$\varepsilon(f(x_1^*,\cdots,x_n^*)) \approx \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(x_1^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_i}\right| \varepsilon(x_i^*) \tag{1.5}$$

式(1.2) ~ 式(1.3) 右端是函数的微分. 相对误差(限) 传播公式可由上述公式除以相应的函数值得到.

在相对误差意义下，函数值的条件数

$$\mathrm{Cond}_r(f)=\left|x\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \tag{1.6}$$

（四）算法设计应注意的基本要点

(1) 尽量避免相近数相减；

(2) 合理安排量级相差悬殊数间的运算次序，避免大数“吃”小数；

(3) 尽可能避免量级相差悬殊的数之间做除法，防止溢出；

(4) 简化计算步骤以减少运算次数；

(5) 选用数值稳定性好的算法.

二、典型题解析

例 1.1　下列数据作为 $x=\pi$ 的近似数，试确定它们各有几位有效数字，并确定其相对误差限.

$x_1^*=3.141$，　$x_2^*=3.14$，　$x_3^*=3.15$，　$x_4^*=22/7$

分析　要确定有效数字，依据定义必须计算绝对误差限，只要计算出误差限的第一位非零数，就能得到关于该近似数有效数字的正确结论. 相对误差限可由绝对误差限推导出，也可由定理 1.1 得到，后者计算方法稍简单些.

解　对于 x_i^* 的规格化形式均有阶码 $m=1$，首位非零数 $x_1=3$.

$$|x-x_1^*|=|\pi-3.141|=0.000\,5\cdots\leqslant 0.005=\frac{1}{2}\times 10^{1-3}$$

所以 x_1^* 有 3 位有效数字，进而

$$\varepsilon_r(x_1^*)=\frac{1}{2\times 3}\times 10^{1-3}\approx 0.001\,7$$

$$|x-x_2^*|=|\pi-3.14|=0.001\cdots\leqslant 0.005=\frac{1}{2}\times 10^{1-3}$$

所以 x_2^* 有 3 位有效数字，进而

$$\varepsilon_r(x_2^*) = \frac{1}{2\times 3}\times 10^{1-3} \approx 0.001\,7$$

$$|x - x_3^*| = |\pi - 3.15| = 0.008\cdots \leqslant 0.05 = \frac{1}{2}\times 10^{1-2}$$

所以 x_3^* 有 2 位有效数字，进而

$$\varepsilon_r(x_3^*) = \frac{1}{2\times 3}\times 10^{1-2} \approx 0.017$$

$$|x - x_4^*| = |\pi - 22/7| = 0.001\cdots \leqslant 0.005 = \frac{1}{2}\times 10^{1-3}$$

所以 x_4^* 有 3 位有效数字，进而

$$\varepsilon_r(x_4^*) = \frac{1}{2\times 3}\times 10^{1-3} \approx 0.001\,7$$

评注 用绝对误差限除以近似值来求相对误差限，如 $\varepsilon_r(x_1^*) = |\pi - x_1^*|/|x_1^*| \approx 0.000\,19$，同样有 $\varepsilon_r(x_2^*) \approx 0.000\,5$，$\varepsilon_r(x_3^*) \approx 0.003$，$\varepsilon_r(x_4^*) \approx 0.000\,4$. 细心的读者会注意到，这些结论较用定理 1.1 得到的误差限偏小，这是由于定理 1.1 是对所有具有 n 位有效数字的近似数都正确的结论，故它对误差限的估计偏大. 再如，对于近似数 $x_5^* = 3.136$，由

$$|x - x_5^*| = 0.004\cdots \leqslant 0.005 = \frac{1}{2}\times 10^{1-3}$$

知 x_5^* 也有 3 位有效数字，相对误差限

$$\varepsilon_r(x_5^*) = |\pi - x_5^*|/|x_5^*| \approx 0.001\,3$$

这和依定理 1.1 计算得到的结论 0.001 7 就较为靠近. 一般地说，本评注的方法给出较好的误差限，计算稍复杂一点，而定理 1.1 给出略大的误差限，计算稍简单一点.

例 1.2 要使 $\sqrt{20}$ 的相对误差不超过 0.1%，应取几位有效数字?

分析 此题的另一种说法是，取几位有效数字就能确保近似数的相对误差不超过 0.1%，故应该用定理 1.1. 从逻辑上讲，应用定理 1.2 是不正确的.

解　$\sqrt{20}$的首位数是4. 设近似数x^*有n位有效数字，由定理1.1知相对误差$|e_r(x^*)| \leqslant \frac{1}{2\times 4}\times 10^{1-n}$. 令$\frac{1}{2\times 4}\times 10^{1-n} \leqslant 0.1\%$，解得$n \geqslant 3.097$，即取4位有效数字，近似数的相对误差不超过0.1%.

评注　与例1.1相同的原因，定理1.1对误差限的估计稍偏大，故对于给定的相对误差限所确定出的有效数字位数有可能偏多，对于本例题，实际上取3位有效数字就能满足题目要求，即取4.47作为近似值，其相对误差限$|\sqrt{20}-4.47|/4.47 \approx 0.048\%$.

例1.3　用x近似$\sin x$，即$\sin x \approx x, x\in[0,\delta]$. δ最大为多少时，该近似计算的截断误差不超过10^{-7}.

分析　在区间$[0,\delta]$上，$\sin x$的台劳(Taylor)级数是交错级数，故级数的前n项部分和作为$\sin x$的近似，其截断误差不会超过第$n+1$项的绝对值.

解　正弦函数的台劳展开式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,\quad x\in[0,\delta]$$

是交错级数. 故有截断误差

$$|\sin x - x| \leqslant x^3/3!,\quad \forall x\in[0,\delta],\quad \delta\leqslant 1$$

令$x^3/6 \leqslant 10^{-7}$，解得$x \leqslant 0.008\,44$. 即取$\delta = 0.008\,44$能够满足题设要求.

评注　若用拉格朗日(Lagrange)中值定理，即$\sin x - \sin 0 = \cos\xi\cdot x$，则得到的允许区间过于偏小.

例1.4　对于有效数$x_1^* = -3.105$，$x_2^* = 0.001$，$x_3^* = 0.100$，估计下列算式的相对误差限

$$y_1 = x_1^* + x_2^* + x_3^*,\quad y_2 = x_1^* x_2^* x_3^*$$
$$y_3 = x_2^*/x_3^*$$

分析　此题首先需要依据有效数的概念(末位数是有效数字)确定出自变量误差限，然后利用误差传播式(1.5)进行计算.

解 由有效数的概念知近似数的末位是有效数字，得到绝对误差限 $\varepsilon(x_1^*)=\varepsilon(x_2^*)=\varepsilon(x_3^*)=0.000\,5$，进而相对误差限为

$$\varepsilon_r(x_1^*)=0.000\,16$$
$$\varepsilon_r(x_2^*)=0.5$$
$$\varepsilon_r(x_3^*)=0.005$$

由绝对误差限的传播式(1.5)得到

$$\varepsilon(y_1^*)\leqslant\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)+\varepsilon(x_3^*)=0.001\,5$$
$$\varepsilon(y_2^*)\approx|x_2^*x_3^*|\varepsilon(x_1^*)+|x_1^*x_3^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_1^*x_2^*|\varepsilon(x_3^*)$$
$$\varepsilon(y_3^*)\approx\left|\frac{1}{x_3^*}\right|\varepsilon(x_2^*)+\left|\frac{x_2^*}{(x_3^*)^2}\right|\varepsilon(x_3^*)$$

进而得到相对误差限

$$\varepsilon_r(y_1^*)\approx\varepsilon(y_1^*)/|y_1^*|\leqslant 0.001\,5/3.004\approx 0.000\,5$$
$$\varepsilon_r(y_2^*)\approx\varepsilon(y_2^*)/|y_2^*|\approx$$
$$\varepsilon_r(x_1^*)+\varepsilon_r(x_2^*)+\varepsilon_r(x_3^*)\approx 0.505\,2$$
$$\varepsilon_r(y_3^*)\approx\varepsilon(y_3^*)/|y_3^*|\approx\varepsilon_r(x_2^*)+\varepsilon_r(x_3^*)=0.505$$

例 1.5 设 $x=10\pm 5\%$，试求函数 $f(x)=\sqrt[n]{x}$ 的相对误差限.

分析 这是标准的一元函数误差传播问题，只需利用公式直接计算.

解 由 $x=10\pm5\%$ 知近似值 $x^*=10$，绝对误差限 $\varepsilon(x^*)=5\%$. 利用 $f'(x^*)=\frac{1}{n}(x^*)^{\frac{1}{n}-1}=\sqrt[n]{x^*}\cdot\frac{1}{nx^*}$，得到

$$e_r(f^*)=\frac{e(f^*)}{f(x^*)}\approx\frac{f'(x^*)e(x^*)}{f(x^*)}=\frac{e_r(x^*)}{n}$$

进而 $$|e_r(\sqrt[n]{x^*})|\approx\left|\frac{e(x^*)}{nx^*}\right|\leqslant\frac{\varepsilon(x^*)}{nx^*}=\frac{0.005}{n}$$

即相对误差限 $\varepsilon_r(\sqrt[n]{x^*})\approx 0.005/n$.

评注 从本题的求解过程可以看到，对于函数 $\sqrt[n]{x}$，函数值的相对误差限

约是自变量相对误差限的$\frac{1}{n}$倍.

例 1.6　计算函数 $f(x)=\sin(n^3x)$ 在 $x^*=0.0001$ 附近的函数值. 当 $n=100$ 时,试计算在相对误差意义下 $f(x^*)$ 的条件数,并估计满足 $\varepsilon_r(f(x^*))=0.1\%$ 时自变量的相对误差限和绝对误差限.

分析　此题意在分析函数的条件数与函数相对误差、自变量相对误差之间的关系. 当 x^* 是 x 的较好近似时

$$e_r(f(x^*))=\frac{f(x^*)-f(x)}{f(x)}=\frac{f'(\xi)e(x^*)}{f(x)}\approx \frac{f'(x^*)e(x^*)}{f(x^*)},\quad \xi\in(x,x^*)$$

给上式分子分母同乘以 x,再利用式(1.6),得到如下重要近似公式

$$\varepsilon_r(f(x^*))\approx \mathrm{Cond}_r(f(x^*))\varepsilon_r(x^*) \tag{1.7}$$

利用上式,问题便迎刃而解.

解

$$\mathrm{Cond}_r(f)=\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|=\left|\frac{xn^3\cos(n^3x)}{\sin(n^3x)}\right|=n^3\ |x/\tan(n^3x)|$$

当 $n=100$ 时

$$\mathrm{Cond}_r(f^*)=10^6\ |x^*/\tan(100)|\approx 170.3$$

题设告知 $\varepsilon_r(f^*)=0.1\%$,进而由式(1.7)得到所允许的自变量的相对误差限

$$\varepsilon_r(x^*)\approx\varepsilon_r(f^*)/\mathrm{Cond}_r(f(x^*))\approx 0.587\times10^{-5}$$

绝对误差限

$$\varepsilon(x^*)\approx\varepsilon_r(x^*)x^*\approx 0.587\times10^{-9}$$

评注　也可以用公式(1.7)直接求解例 1.5.

例 1.7　用4位三角函数值表,怎样计算才能保证 $1-\cos2^\circ$ 有较高的精度.

分析 此题意在考察对"在算法设计中应避免相近数相减"原则的掌握程度.为此常采用的恒等变形有:台劳公式、三角变形、分子或分母有理化等.此题强调用三角函数值表,故我们利用三角恒等变形.

解 方法1 直接计算,由三角函数值表知 $\cos 2^\circ \approx 0.999\ 4$,于是 $1-\cos 2^\circ \approx 1-0.999\ 4 = 0.000\ 6$,至多有1位有效数字.

方法2 用半角公式有 $1-\cos 2^\circ = 2\sin^2 1^\circ$,查表得 $\sin 1^\circ \approx 0.017\ 5$, $1-\cos 2^\circ \approx 2\times 0.017\ 5^2 = 0.000\ 612\ 5$

方法3 利用单位1的变形有 $1-\cos 2^\circ = \dfrac{\sin^2 2^\circ}{1+\cos 2^\circ}$,查表得 $\sin 2^\circ \approx 0.034\ 9$, $\cos 2^\circ \approx 0.999\ 4$,进而有 $1-\cos 2^\circ \approx \dfrac{0.034\ 9^2}{1+0.999\ 4} \approx 0.000\ 609\ 2$.

比较以上3种方法,后两者避免了相近数相减,是可以采用的方法.

评注 实际上 $1-\cos 2^\circ = 0.000\ 6091\ 729\ 80\cdots$,和此真值相比较,法3给出了较好的结果.如果使用多项式近似,由台劳公式知 $1-\cos x \approx \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!}$,取 $x = 2^\circ = \dfrac{\pi}{90}$ 有 $1-\cos 2^\circ \approx 0.000\ 609\ 172\ 978\cdots$,这一方法给出了更好的近似值.

例1.8 利用 $\sqrt{783} \approx 27.982$ 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根,使它们至少具有4位有效数字.

分析 直接利用求根公式

$$x_{1,2} = (56 \pm \sqrt{56^2 - 4\times 1\times 1})/2$$

会出现相近数相减,对于二次方程 $x^2-2bx+c=0$,能够避免相近数相减的算法是

$$x_1 = b + \mathrm{sgn}(b)\sqrt{b^2-c}, \quad x_2 = c/x_1$$

其中 $\mathrm{sgn}(b)$ 表示 b 的符号,若其为负,则取 $\mathrm{sgn}(b) = -1$,否则取

$\mathrm{sgn}(b) = 1$.

解　在已知方程中 $b = 28, c = 1$，利用公式

$$x_1 = b + \mathrm{sgn}(b)\sqrt{b^2 - c} = 28 + \sqrt{28^2 - 1} = 28 + \sqrt{783} \approx 55.982$$

$$x_2 = c/x_1 = 1/55.982 \approx 0.017\,863$$

该问题的精确解 $x_1 = 55.982\,137\cdots, x_2 = 0.017\,862\,8\cdots$. 显然前面的近似解均至少具有 4 位有效数字.

评注　数值分析中关于有效数字的定义是从四舍五入原则中提炼出来的，对精确数进行四舍五入所得到的近似数是有效数，它的有效数字和中学时给出的定义是一致的. 对于本题我们很快就会判断出两个根的近似值都具有 5 位有效数字.

例 1.9　试给出一种计算积分 $I_n = \mathrm{e}^{-1}\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 近似值的稳定递推算法.

分析　经分部积分有 $I_n = 1 - nI_{n-1}$，虽然从 $I_0 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$ 出发，可以建立一种递推算法，但当对 I_0 近似时，因在递推公式中出现 nI_{n-1}，随着递推过程的进行，导致算法误差迅速增长，因而是一种不稳定的算法. 但当从该递推公式中解出 I_{n-1}，就得到了误差迅速减小的递推算法，这时允许初始近似有稍大的误差.

解　对 $I_n = \mathrm{e}^{-1}\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 分部积分得到 $I_n = 1 - nI_{n-1}$，进而解出

$$I_{n-1} = (1 - I_n)/n \tag{1.8}$$

由此式可以看到，当 I_n 有误差 ε_n 时，I_{n-1} 有误差 $\varepsilon_{n-1} = \frac{1}{n}\varepsilon_n$（忽略除法运算引入的舍入误差）. 依次类推得到 I_{n-k} 的误差为

$$\varepsilon_{n-k} = \varepsilon_n/[n(n-1)\cdots(n-k+1)] \tag{1.9}$$

随着递推过程的进行，初始误差对计算结果的影响越来越小. 因而是一种稳定性很好的算法.

现在还需给出 I_n 的初始近似值，利用积分表达式知

$$\frac{e^{-1}}{n+1}=e^{-1}\int_0^1 x^n dx < I_n < e^{-1}\int_0^1 x^n e dx=\frac{1}{n+1}$$

取

$$I_n \approx \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-1}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right) \tag{1.10}$$

误差限

$$\varepsilon_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{e^{-1}}{n+1}\right)=\frac{1-e^{-1}}{2(n+1)} \tag{1.11}$$

综合起来，初值依式(1.10)确定，迭代过程依式(1.8)进行，误差估计由式(1.11)和(1.9)界定.

例 1.10 请给一种算法计算 2^{256}，要求乘法次数尽可能少.

分析 要尽可能地减少运算量，其中一种思路是尽可能运用已经计算出的结果. 如 $2^{256}=(2^{128})^2$，当 2^{128} 计算出来之后，再需一次乘法便可以得到 2^{256}；而 $2^{128}=(2^{64})^2$，同样的，当 2^{64} 计算出来后，再需一次乘法就可以计算出 2^{128}；依此类推，这样就得到一种比通常乘法次数要少得多的算法.

解
$$\begin{aligned}2^{256}&=2^{128}\times 2^{128}=2^{64}\times 2^{64}\times 2^{128}=\\&2^{32}\times 2^{32}\times 2^{64}\times 2^{128}=\\&2^{16}\times 2^{16}\times 2^{32}\times 2^{64}\times 2^{128}=\\&2^{8}\times 2^{8}\times 2^{16}\times 2^{32}\times 2^{64}\times 2^{128}=\\&2\times 2\times 2^{2}\times 2^{4}\times 2^{8}\times 2^{16}\times 2^{32}\times 2^{64}\times 2^{128}\end{aligned}$$

这样共需要 8 次乘法就可以计算出结果.

例 1.11 请分析双精度实数系统的相对舍入误差、下溢界和上溢界. 已知某计算机系统双精度实数占 64 位二进制数，其中二进制阶码数值占 10 位，尾数数值占 52 位，阶码和尾数的符号各占 1 位.

分析 这是一个可以直接套用公式计算的题目. 设 t 和 s 分别表示分配给尾数数值和二进制阶码数值的二进制位数，则该系统

的上溢界和下溢界分别是 2^{2^s-1} 和 2^{-2^s}，相对舍入误差限是 2^{-t}.

解 对于双精度实数系统，分配给尾数数值的二进制位数 $t=52$，分配给二进制阶码数值的二进制位数 $s=10$. 则实数 x 的浮点表示的上溢界是

$$2^{2^s-1}=2^{1\,023}=10^{1\,023\lg 2}\approx 10^{308}$$

下溢界

$$2^{-2^s}\approx 10^{-308}$$

相对舍入误差限是

$$\varepsilon_r(fl(x))\leqslant 2^{-t}=2^{-52}=10^{-52\lg 2}\approx 10^{-15.65}$$

例 1.12 分析如下 3 种计算 e^{-1} 近似值的方法，哪种方法能够提供较好的近似

方法 1： $e^{-1}\approx\sum\limits_{n=0}^{9}\dfrac{(-1)^n}{n!}$；

方法 2： $e^{-1}\approx\left(\sum\limits_{n=0}^{9}\dfrac{1}{n!}\right)^{-1}$；

方法 3： $e^{-1}\approx\left(\sum\limits_{n=0}^{9}\dfrac{1}{(9-n)!}\right)^{-1}$

分析 方法1用的是函数 e^x 在 $x=0$ 点的 9 阶台劳公式，然后直接将 -1 带入；方法 2 先用 9 阶台劳公式计算出 e 的近似值，然后再计算 e^{-1}；这两种方法的优劣关键在于比较它们各自截断误差的大小. 方法 3 与方法 2 的截断误差是相同的，这两者间的不同在于计算 e 近似值时采用了不同的运算次序，这时需要考虑舍入误差的大小.

解 函数 e^x 在零点的 9 阶台劳公式为

$$e^x=\sum_{i=0}^{9}\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{10!}x^{10},\quad 0<\theta<1$$

方法 1 用 $x=-1$ 时的 9 阶台劳公式，其截断误差

$$R_1=\left|e^{-1}-\sum_{n=0}^{9}\frac{(-1)^n}{n!}\right|=\frac{e^{-\theta_1}}{10!},\quad 0<\theta_1<1\quad(1.12)$$