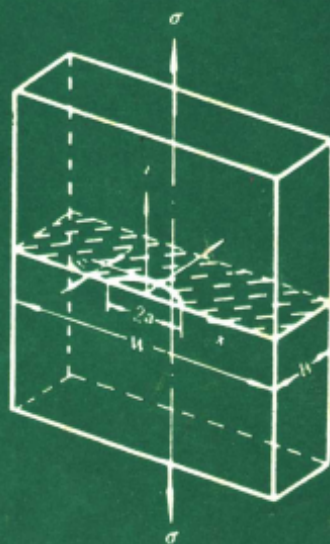


表面裂纹理论 及其应用

崔振源 编著



西北工业大学出版社

表面裂纹理论及其应用

崔 振 源 编 著

西北工业大学出版社

内 容 提 要

本书基本内容有八章,论述了三维裂纹理论;推导了表面裂纹Ⅰ型、Ⅱ型和Ⅲ型应力强度因子;给出了表面裂纹断裂韧性的测试方法和表面裂纹复合型断裂准则;阐明了表面裂纹弹塑性理论和表面裂纹的扩展规律;还介绍了表面裂纹理论在工程中的应用。在每章后,均列出参考文献,书末附有十个附录,可供读者进一步钻研之用。

本书可作为弹性断裂力学研究生的教材,亦可供从事于航天器、飞机、原子能电站和压力容器等方面的工程技术人员及工科机械类各专业师生参考。

表面裂纹理论及其应用

编 著 者 崔振源

责任编辑 李正荣

*

西北工业大学出版社出版发行

(西安市友谊西路127号)

陕西省新华书店经销

西北工业大学出版社印刷厂印装

*

开本787×1092毫米 1/16 印张14.625 351千字

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印数1—2000册

ISBN 7-5612-0030-7/TG·5 定价:3.35元

统一书号:15433·072

前 言

表面裂纹在工程实际构件中是大量存在的。由于其不断扩展而引起断裂事故，因此研究表面裂纹理论及其应用很有实用价值。表面裂纹是三维断裂力学问题，难度较高，至今仍是断裂力学中未完全解决的课题，更没有这类系统的完整的教科书。

从1975年起，我参加了某型飞机起落架表面裂纹课题的研究，并解决了其延寿问题。而后，继续从事于表面裂纹复合型断裂准则、 J 积分和双参数弹塑性断裂准则等理论分析以及带表面裂纹板材的断裂韧性、弹塑性抗裂特性和疲劳扩展规律等试验研究，并制定了航空工业部部标《金属板材表面裂纹断裂韧性试验方法》，编写了《金属板材表面裂纹断裂韧性手册》。同时，收集了国内外大量的有关资料。

本书论述了三维裂纹基本理论；阐明了表面裂纹弹性、弹塑性理论；给出了表面裂纹抗裂参数的测试原理和方法；讨论了表面裂纹断裂准则和表面裂纹扩展规律；还介绍了表面裂纹理论在工程实际中的应用，并列举了最新的应用实例。

本书编入了国内外和我室的有关研究成果。郑斯滔同志参加了部分工作；矫桂琼同志校读了第一、二、四三章；苏彬同志推导了附录 I 中的公式。本书得到黄玉珊教授的推荐出版和室内同志们的支持鼓励，在此一并谨致深切的谢意。

由于时间仓促，水平所限，本书还不能适应工程技术迅速发展的需要，在内容和安排上也可能有缺点和错误，望读者提出批评并指正。

崔振源 写于西北工业大学材料力学教研室

1985年12月

常用符号表

a ——椭圆半长轴长(mm)	Q ——裂纹形状因子
a_0 ——人造裂纹源半长(mm)	Q_c ——修正裂纹形状因子
b ——椭圆半短轴长(mm)	R ——交变载荷下最小力和最大力的比值
b_0 ——人造裂纹源深度(mm)	r_p ——裂纹端部塑性区域的半径(mm)
B ——板厚; 试件厚度(mm)	S ——施载跨距(mm)
e_s ——屈服应变	t ——容器壁厚(mm)
E ——弹性模量(MN/m ²)	U ——形变能(N·mm)
$E(k)$ ——第二类完全椭圆积分	U_x, U_y, U_z ——直角坐标位移分量(mm)
G ——裂纹扩展力; 应变能释放率(N·mm/mm ²)	V ——表面裂纹咀张开位移(mm)
J —— J 积分(N·mm/mm ²)	W ——试件宽度或高度(mm)
k_I, k_{II}, k_{III} ——I型, II型, III型应力强度因子(MN/m ^{3/2})	x, y, z ——直角坐标
$K_I, K_{II}, K_{III} = \sqrt{\pi} (k_I, k_{II}, k_{III})$	ξ, η, ζ ——椭球坐标
K_{Ie} ——表面裂纹断裂韧性(MN/m ^{3/2})	μ ——剪切模量(MN/m ²)
K_Q ——条件断裂韧性(MN/m ^{3/2})	ν ——泊松比
$K(k)$ ——第一类完全椭圆积分	δ_m ——表面裂纹咀张开位移(mm)
ΔK_{th} ——门槛值(MN/m ^{3/2})	δ_t ——表面裂纹顶端张开位移(mm)
l ——试件有效长度(mm)	δ_s ——延伸率(%)
M_1 ——前表面修正系数	α ——表面裂纹张开角(°)
M_2 ——后表面修正系数	α_c ——表面裂纹临界张开角(°)
M_I, M_{II}, M_{III} ——I型, II型, III型表面裂纹前、后表面总修正系数	σ ——工作应力(MN/m ²)
n ——硬化指数	σ_b ——抗拉强度(MN/m ²)
N ——循环数(cycle)	σ_c ——临界应力(MN/m ²)
p ——工作压力(MN/m ²)	σ_s ——屈服点(MN/m ²)
P ——载荷(N)	$\sigma_{0.2}$ ——屈服强度(MN/m ²)
P_c ——临界载荷(N)	σ_e ——疲劳极限(MN/m ²)
P_{max} ——最大载荷(断裂载荷)(N)	ψ ——断面收缩率(%)

目 录

常用符号表

绪 言	(1)
第一章 三维裂纹理论	(2)
§ 1-1 引言	(2)
§ 1-2 不连续表面 Navier 方程的解	(2)
§ 1-3 带椭圆形不连续表面的无限大体	(5)
§ 1-4 裂纹前缘附近的位移、应力和应力强度因子	(8)
参考文献	(14)
第二章 表面裂纹 I 型应力强度因子	(16)
§ 2-1 引言	(16)
§ 2-2 工程估算法	(16)
§ 2-3 实验法	(19)
§ 2-4 交替法	(22)
§ 2-5 线弹簧模型法	(29)
§ 2-6 有限元法	(37)
§ 2-7 应力强度因子各种解的比较	(46)
§ 2-8 用法线长度估算应力强度因子	(51)
参考文献	(53)
第三章 表面裂纹断裂韧性 K_{Ic} 的测试	(55)
§ 3-1 引言	(55)
§ 3-2 K_{Ic} 的基本概念	(55)
§ 3-3 测试 K_{Ic} 的原理	(56)
§ 3-4 测试 K_{Ic} 的步骤	(61)
§ 3-5 测试 K_{Ic} 的实例	(64)
参考文献	(65)
第四章 表面裂纹 II 型、III 型应力强度因子	(66)
§ 4-1 引言	(66)
§ 4-2 受剪应力作用的表面裂纹	(66)
§ 4-3 受非均匀剪应力作用的椭圆裂纹的解	(68)
§ 4-4 半空间问题的解	(73)
§ 4-5 表面裂纹 II 型和 III 型应力强度因子 K_{II} 和 K_{III}	(78)
参考文献	(81)
第五章 表面裂纹复合型断裂准则	(82)
§ 5-1 引言	(82)
§ 5-2 复合型断裂准则简介	(82)
§ 5-3 表面裂纹应力奇异场和半椭圆表面裂纹应力强度因子	(83)
§ 5-4 表面裂纹复合型断裂准则	(86)
§ 5-5 计算实例	(92)

§ 5-6 带半椭圆表面斜裂纹试件的轴向拉伸试验	(95)
参考文献	(98)
第六章 表面裂纹弹塑性理论	(100)
§ 6-1 引言	(100)
§ 6-2 J 积分-非线性线弹簧模型法	(100)
§ 6-3 J 积分-有限元法	(108)
§ 6-4 半椭圆表面裂纹试件 J 积分的测试	(116)
§ 6-5 表面裂纹张开位移	(118)
§ 6-6 表面裂纹起裂和稳定扩展时的抗裂特性	(120)
§ 6-7 表面裂纹双参数弹塑性断裂准则	(124)
参考文献	(127)
第七章 疲劳裂纹扩展的规律	(129)
§ 7-1 引言	(129)
§ 7-2 疲劳裂纹扩展的微观机理	(129)
§ 7-3 裂纹初期扩展的力学行为	(139)
§ 7-4 表面裂纹扩展的规律	(151)
§ 7-5 关于裂纹扩展速率的测试技术	(165)
参考文献	(170)
第八章 表面裂纹理论在工程中的应用	(173)
§ 8-1 引言	(173)
§ 8-2 防断安全设计的程序	(173)
§ 8-3 在宇航、航空结构中的应用	(178)
§ 8-4 在压力容器中的应用	(180)
§ 8-5 在材料疲劳破坏中的应用	(187)
§ 8-6 在应力腐蚀破坏中的应用	(199)
参考文献	(203)
附 录	(205)
附录 I 椭球坐标系与直角坐标系的关系	(205)
附录 II 椭圆积分和椭圆函数	(206)
附录 III $\partial f / \partial z$ 和 $\partial^2 f / \partial z^2$ 的推导	(208)
附录 IV 基本积分及其偏导数的计算	(211)
附录 V 应力分量 σ_y 、 σ_{yz} 和 σ_{yx} 的推导	(213)
附录 VI 所需椭圆积分的推导	(219)
附录 VII 矩阵 $[K_{ij}]$ 的非零项	(220)
附录 VIII K_I 和 K_{II} 表达式	(222)
附录 IX k_i ($i = I, II, III$) 的单调性	(224)
附录 X A 点的临界载荷是 b/a 的单调增函数	(225)

绪 言

随着工业生产的发展,高强度材料的大型设备得到广泛的使用。在大型设备中,如压力容器、钻井平台、石油管道和原子能反应堆结构中,都发生过断裂事故;又如发动机壳体和飞机起落架,也发生过断裂事故。这些灾难性事故大都是由表面裂纹扩展引起的。构件表面裂纹给生产和使用都带来极大的危害,从而推动了对表面裂纹理论的研究和表面裂纹断裂参数测试的探索。在分析和预防构件断裂事故的工作中,成功地应用了表面裂纹断裂力学的研究成果。

表面裂纹断裂力学的特点,一是在于它的模拟性,它能模拟实际遇到的缺陷;二是在于试件和构件的组织一致性,因试件直接取自板材构件。在上面列举的事故中,可以看到,表面裂纹断裂事故不仅发生在高强度材料的薄壁构件中,也存在于中强度材料的薄壁容器里。因此,人们对表面裂纹弹性、弹塑性理论及其试验的研究,都取得了一定的成果。

表面裂纹断裂力学是最近二十年来迅速发展起来的科学。它的任务不仅是研究表面裂纹扩展的规律性,而且还通过分析表面裂纹前缘附近的应力、应变和应力强度因子以及测定带表面裂纹试件的断裂参数,建立断裂准则。它可以解决构件的选材,确定构件允许的最大初始表面裂纹尺寸,估计构件的疲劳寿命、剩余强度和检修周期等,从而保证构件的安全使用。

需要指出,表面裂纹前缘附近的应力分布是一个三维弹性力学问题,它的解比穿透裂纹的解要困难得多,而且目前还没有精确的分析解。关于表面裂纹试件测定材料的断裂韧性,航空工业部于1983年才首建了《金属板材表面裂纹断裂韧性试验方法》。

在这里,首先介绍三维裂纹前缘的弹性应力-应变场、应力强度因子、表面裂纹断裂韧性和断裂准则,然后阐明表面裂纹弹塑性断裂理论、裂纹扩展规律以及有关理论的应用。

第一章 三维裂纹理论

§ 1-1 引言

研究一般应力状态下的裂纹理论,宜采用连续介质模型,其中的裂纹可具有某种三维形状。Sneddon(1946)^[1]和 Sack(1946)^[2]求得了圆裂纹受垂直于其平面的均匀拉伸的解,Segedin(1950)^[3]给出了它受平行于其平面的均匀剪切的解。由于圆裂纹的曲率半径在各处都是常数,因而它的适用性较差。

一般实际的裂纹形状是椭圆形,通过椭圆率的改变,可以得到不同的裂纹前缘曲率,因此椭圆裂纹前缘的应力状态对任意光滑曲线边界的三维裂纹是有效的。这种形状裂纹前缘的应力和位移的解已由 Kassir 和 Sih(1966)^[4]给出,他们(1968)还完成了扁平椭圆裂纹Griffith断裂应力的近似计算,这个结果为脆性断裂理论应用于三维裂纹创造了条件。Kassir 和 Sih(1968)的研究工作是基于椭圆裂纹在均匀拉伸场中的 Green 和 Sneddon(1950)⁵ 势函数解,他们于 1966 年已给出椭圆裂纹在剪切场中的解。

§ 1-2 不连续表面 Navier 方程的解

设无限大体中的不连续表面在平面 $z = 0$ 内, x, y, z 是直角坐标系。在没有体积力时, Navier 平衡的位移方程是:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial x} + (1-2\nu)\nabla^2 U_x &= 0 \\ \frac{\partial e}{\partial y} + (1-2\nu)\nabla^2 U_y &= 0 \\ \frac{\partial e}{\partial z} + (1-2\nu)\nabla^2 U_z &= 0 \end{aligned} \quad (1-2-1)$$

式中:

$$\begin{aligned} e &= \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

在 xy 平面内不连续的平面,式(1-2-1)的解可用调和函数 ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z 和 ψ 来表示⁶,即

$$\begin{aligned} U_x &= \phi_x + z \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ U_y &= \phi_y + z \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ U_z &= \phi_z + z \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \quad (1-2-2)$$

调和函数 ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z 和 ψ 分别满足:

$$\nabla^2 \phi_x(x, y, z) = 0; \quad \nabla^2 \phi_y(x, y, z) = 0;$$

$$\nabla^2 \phi_z(x, y, z) = 0; \quad \nabla^2 \psi(x, y, z) = 0$$

并由下式联系:

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} + (3 - 4\nu) \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (1-2-3)$$

由虎克定律, 应力-位移表达式为:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{2\mu} &= \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} e, & \frac{\sigma_{yz}}{\mu} &= \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \\ \frac{\sigma_y}{2\mu} &= \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} e, & \frac{\sigma_{zx}}{\mu} &= \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \frac{\sigma_z}{2\mu} &= \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} e, & \frac{\sigma_{xy}}{\mu} &= \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (1-2-4)$$

把式(1-2-2)代入式(1-2-4), 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z}{2\mu} &= \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial(\phi_z + \psi)}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ \frac{\sigma_{yz}}{\mu} &= \frac{\partial(\phi_z + \psi)}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial z} + 2z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\sigma_{zx}}{\mu} &= \frac{\partial(\phi_z + \psi)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial z} + 2z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \end{aligned} \quad (1-2-5)$$

对于应力对称于 $z = 0$ 平面的问题, 位移分量 U_x , U_y 是 z 的偶函数, U_z 则是 z 的奇函数; 剪应力 σ_{xz} 和 σ_{yz} 在 $z = 0$ 平面内必须等于零。在反对称问题中, U_x , U_y 是 z 的奇函数, U_z 则是 z 的偶函数; 正应力 σ_z 在 $z = 0$ 处等于零。在这两种情况中, $z = 0$ 平面上在不连续表面以外各处的位移和应力都要连续。由此可知, 对于 z 为奇次的各量都应当在这些地方等于零。应用这些对称条件, 只需通过式(1-2-5), 即可算出应力分量 σ_z , σ_{yz} 和 σ_{zx} 。

1. 对称问题

由于应力对称于不连续表面的平面, 调和函数 ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z 和 ψ 必须取成能满足下列条件:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0, \quad z = 0$$

并在远离不连续面的地方给出有界位移分量。假定 $\partial^2 \psi / \partial x \partial z$ 和 $\partial^2 \psi / \partial y \partial z$ 在 $z \rightarrow 0$ 时保持有限值, 则引入调和函数 $f(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \phi_x &= (1-2\nu) \frac{\partial f}{\partial x}; & \phi_y &= (1-2\nu) \frac{\partial f}{\partial y}; \\ \phi_z &= -2(1-\nu) \frac{\partial f}{\partial z}; & \psi &= \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \quad (1-2-6)$$

并满足下式

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi_z + \psi)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial z} &= 0, \quad z = 0 \\ \frac{\partial(\phi_z + \psi)}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial z} &= 0, \quad z = 0 \end{aligned}$$

和式(1-2-3)。将式(1-2-6)代入式(1-2-2)，则得位移：

$$\begin{aligned}U_x &= (1-2\nu)\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}, \\U_y &= (1-2\nu)\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}, \\U_z &= -2(1-\nu)\frac{\partial f}{\partial z} + z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (1-2-7)$$

由上式即可求出应力：

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_x}{2\mu} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\nu\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial x^2}, & \frac{\sigma_{yz}}{2\mu} &= z\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}, \\ \frac{\sigma_y}{2\mu} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\nu\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + z\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y^2}, & \frac{\sigma_{zx}}{2\mu} &= z\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial z^2}, \\ \frac{\sigma_z}{2\mu} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}, & \frac{\sigma_{xy}}{2\mu} &= (1-2\nu)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + z\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}\end{aligned}\quad (1-2-8)$$

2. 反对称问题

在反对称问题中，调和函数 ϕ_x ， ϕ_y ， ϕ_z 和 ψ 必须取成能满足式(1-2-3)和当 $z=0$ 时 $\sigma_z=0$ ；同时还要在远离不连续面处给出有界位移。假设当 $z\rightarrow 0$ 时， $\partial^2\psi/\partial z^2$ 仍为有限值，则所述条件可表示为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial\phi_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}[\phi_z + (3-4\nu)\psi] &= 0, \\ \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial\phi_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi_z + \psi) &= 0, \quad z=0\end{aligned}\quad (1-2-9)$$

将后两方程相减，给出：

$$\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial\phi_y}{\partial y} + 2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \quad (1-2-10)$$

引入调和函数 $g(x, y, z)$ ， $h(x, y, z)$ ，并使

$$\phi_x = -2(1-\nu)\frac{\partial g}{\partial z}, \quad \phi_y = -2(1-\nu)\frac{\partial h}{\partial z} \quad (1-2-11)$$

及

$$\nabla^2 g(x, y, z) = 0, \quad \nabla^2 h(x, y, z) = 0$$

利用式(1-2-11)和式(1-2-10)的积分，则函数 ψ 变为

$$\psi = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}$$

积分常数因无关紧要而被略去。为了满足式(1-2-9)，要求

$$\phi_z = -(1-2\nu)\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

因此，反对称问题中的位移可用两个实函数表示：

$$\begin{aligned}U_x &= -2(1-\nu)\frac{\partial g}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right) \\ U_y &= -2(1-\nu)\frac{\partial h}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right)\end{aligned}\quad (1-2-12)$$

$$U_z = -(1-2\nu) \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) + z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

将式(1-2-12))代入式(1-2-4), 得到应力:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{2\mu} &= -2(1-\nu) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} - 2\nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) + z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right), \\ \frac{\sigma_y}{2\mu} &= -2(1-\nu) \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} - 2\nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) + z \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right), \\ \frac{\sigma_z}{2\mu} &= z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right), \\ \frac{\sigma_{yz}}{2\mu} &= -(1-\nu) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) + z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right), \\ \frac{\sigma_{yz}}{2\mu} &= -(1-\nu) \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) + z \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right), \\ \frac{\sigma_{xy}}{2\mu} &= -(1-\nu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1-2-13)$$

§ 1-3 带椭圆形不连续表面的无限大体

在 $z = 0^+$ 的 x - y 平面中, 具有长、短半轴分别为 a 、 b 的椭圆形 (图1-3-1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0^+$$

这种不连续表面的问题可以利用椭球坐标 ξ , η , ζ 的对称形式来解决, 该坐标作为 Whitaker 和 Watson (1962)^[7] 给出的任一共焦二次曲面方程:

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{s} - 1 = 0$$

的根 s 而求出, 式中:

$$-a^2 \leq \zeta \leq -b^2 \leq \eta \leq 0 \leq \xi \leq \infty$$

变量 ξ , η , ζ 构成了椭球坐标的曲线轴系, 其中诸曲面 $\xi = \text{常数}$ 表示一族椭球面, $\eta = \text{常数}$ 是单叶双曲面, $\zeta = \text{常数}$ 则是双叶双曲面。在三维空间每一点都有这三种共焦点曲面通过。可以证明, ξ , η , ζ 与直角坐标 x , y , z 有下列关系^①:

$$\begin{aligned} a^2(a^2-b^2)x^2 &= (a^2+\xi)(a^2+\eta)(a^2+\zeta), \\ b^2(b^2-a^2)y^2 &= (b^2+\xi)(b^2+\eta)(b^2+\zeta), \\ a^2b^2z^2 &= \xi\eta\zeta \end{aligned} \quad (1-3-1)$$

当 $z = 0$ 时, $\xi = 0$ 和 $\eta = 0$ 分别表示椭圆 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 的内部和外部之点 x , y 。在椭圆边界上的点由 $\xi = \eta = 0$ 给出。 ξ , η , ζ 对于 x , y , z 的偏导数则作为进一步的参考:

① 参阅本书附录 I。

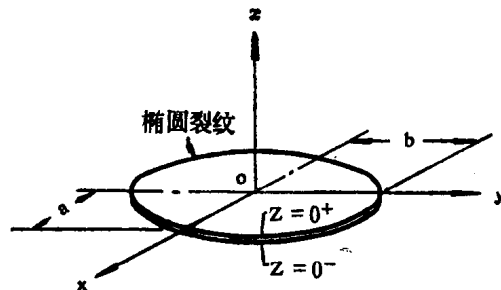


图 1-3-1 无限大体中的椭圆裂纹

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{x}{2(a^2 + \xi)h_1^2}, & \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{y}{2(b^2 + \xi)h_1^2}, & \frac{\partial \xi}{\partial z} &= \frac{z}{2\xi h_1^2} \\
\frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{x}{2(a^2 + \eta)h_2^2}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{y}{2(b^2 + \eta)h_2^2}, & \frac{\partial \eta}{\partial z} &= \frac{z}{2\eta h_2^2} \\
\frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{x}{2(a^2 + \zeta)h_3^2}, & \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= \frac{y}{2(b^2 + \zeta)h_3^2}, & \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \frac{z}{2\zeta h_3^2}
\end{aligned} \tag{1-3-2}$$

式中: h_1 、 h_2 、 h_3 是 Lamé' 系数, 由下式给出:

$$\begin{aligned}
h_1^2 &= \frac{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}{4\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}, \\
h_2^2 &= \frac{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}{4\eta(a^2 + \eta)(b^2 + \eta)}, \\
h_3^2 &= \frac{(\xi - \zeta)(\zeta - \eta)}{4\zeta(a^2 + \zeta)(b^2 + \zeta)}
\end{aligned}$$

1. 受压椭圆裂纹

Green 和 Sneddon (1950)^[5] 解决了在下列边界条件下的扁平椭圆裂纹问题:

$$\sigma_z = -p, \quad \xi = 0; \quad U_z = 0, \quad \eta = 0 \tag{1-3-3}$$

他们发现, 除相乘的一个常数外, 问题中的唯一未知函数 $f(x, y, z)$ 等同于均匀椭圆板外部一点上的引力势函数, 即

$$f(x, y, z) = \frac{A}{2} \int_0^\infty \left[\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{s} - 1 \right] \frac{ds}{\sqrt{Q(s)}} \tag{1-3-4}$$

式中: $Q(s) = s(a^2 + s)(b^2 + s)$;

A 为待定常数。

为了确定 A , 尚需要作一些复杂的计算, 把一些积分通过下列的变换, 用雅可比椭圆函数来表示:

$$\xi = a^2 \operatorname{cn}^2 u / \operatorname{sn}^2 u = a^2 (\operatorname{sn}^{-2} u - 1)$$

式中: u , $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn}^{-2} u$ 等是雅可比椭圆函数, 简称为椭圆函数^①。 $\operatorname{sn} u$ 具有实周期 $4K$ 和虚周期 $2iK'$, 分别对应于模 k 和余模 k' , 且

$$a^2 k^2 = a^2 - b^2, \quad ak' = b$$

而变量 u 取 0 到 K 间的一切实值。函数 $\operatorname{cn} u$ 具有周期 $4K$ 和 $2K + 2iK'$ 。求式 (1-3-4) 对于 z 的导数, 得^②

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2Az}{ab^2} \left[\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} - E(u) \right] \quad (0 \leq u \leq K)$$

式中: $E(u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 \beta \, d\beta$

雅可比椭圆函数 $\operatorname{dn} u$ 具有实周期 $2K$ 和虚周期 $4iK'$ 。由 $\partial f / \partial z$ 对于 z 再求一次导数, 得到:

① 参阅本书附录 I。

② 参阅本书附录 II。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = A \left\{ \frac{2\xi^{1/2}[\xi(a^2b^2 - \eta\xi) - a^2b^2(\eta + \xi) - (a^2 + b^2)\eta\xi]}{a^2b^2(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(a^2 + \xi)^{1/2}(b^2 + \xi)^{1/2}} \right. \\ \left. - \frac{2}{ab^2} \left[E(u) - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right] \right\}$$

将此导数代入 $\xi = 0$ 和 $u = K$ 时式(1-2-8)中 σ_z 的表达式, 得到:

$$\frac{\sigma_z}{2\mu} = \frac{2A}{ab^2} = E(k), \quad z = 0$$

式中: $E(k)$ 是第二类完全椭圆积分^①。

将此结果与边界条件(1-3-3)相比, 定出常数

$$A = -\frac{ab^2 p}{4\mu E(k)} \quad (1-3-5)$$

常数 A 既已确定, 函数 $f(x, y, z)$ 即完全确定, 则任一点的位移和应力亦完全确定^②。例如, 用椭球坐标 ξ, η, ζ 表示的位移是:

$$U_x = \frac{2Ax}{ab^2} \left\{ (1-2\nu)[u - E(u)] \left(\frac{k'}{k} \right)^2 - \frac{bz[(b^2 + \xi)\eta\xi]^{1/2}}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(a^2 + \xi)^{1/2}} \right\},$$

$$U_y = \frac{2Ay}{ab^2} \left\{ (1-2\nu) \left[E(u) - k'^2 u - k^2 \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right] \frac{1}{k^2} \right. \\ \left. - \frac{bz[(a^2 + \xi)\eta\xi]^{1/2}}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(b^2 + \xi)^{1/2}} \right\}, \quad (1-3-6)$$

$$U_z = \frac{2Az}{ab^2} \left\{ (1-2\nu)E(u) + \left[\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} - 2(1-\nu) \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \right] \operatorname{sn} u \right. \\ \left. + \frac{\xi^{1/2}[\xi(a^2b^2 - \eta\xi) - a^2b^2(\eta + \xi) - (a^2 + b^2)\eta\xi]}{a(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(a^2 + \xi)^{1/2}(b^2 + \xi)^{1/2}} \right\}$$

类似地可以求得应力分量的表达式, 但所得结果太长, 在这里不予给出。

2. 受剪切的椭圆裂纹

在裂纹上、下表面受大小相等、方向相反并与椭圆长轴成 ω 角的剪应力 q 作用时, 边界条件是:

$$\sigma_{yz} = -q \sin \omega, \quad \sigma_{zx} = -q \cos \omega, \quad \xi = 0; \\ U_x = U_y = 0, \quad \eta = 0 \quad (1-3-7)$$

对于这个问题, Kassir 和 Sih(1966)^[4] 已给出势函数:

$$\left[\frac{g(x, y, z)}{h(x, y, z)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{B}{C} \right] \int_{\xi}^{\infty} \left[\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{s} - 1 \right] \frac{ds}{\sqrt{Q(s)}} \quad (1-3-8)$$

将式(1-3-7)表示为:

$$\nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) - (1-\nu) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{q \sin \omega}{2\mu}, \quad \xi = 0; \\ \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) - (1-\nu) \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{q \cos \omega}{2\mu}, \quad \xi = 0 \quad (1-3-9)$$

① 参阅本书附录 I。

② 具体计算很是复杂, 函数 f 的偏导数参阅本书附录 IV。

并求出导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= 2B \left\{ \frac{1}{a^3 k^2} \left[u - E(u) - \frac{x^2 [\xi(b^2 + \xi)]^{1/2}}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(a^2 + \xi)^{3/2}} \right] \right\}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= 2B \left\{ \frac{1}{a^3 k^2} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 E(u) - u - \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{y^2 [\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)]^{1/2}}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(b^2 + \xi)^{3/2}} \right\}\end{aligned}$$

等等，将式(1-3-8)代入式(1-3-9)，算出常数 B 和 C ：

$$\begin{aligned}4\mu B &= - \frac{ab^2 k^2 q \cos \omega}{(k^2 - \nu)E(k) + \nu k'^2 K(k)}, \\ 4\mu C &= - \frac{ab^2 k^2 q \sin \omega}{(k^2 + \nu k'^2)E(k) - \nu k'^2 K(k)}\end{aligned}$$

式中： $K(k)$ 是第一类完全椭圆积分^①。

将式(1-3-8)代入式(1-2-12)，得到：

$$\begin{aligned}U_x &= \frac{2Bz}{ab^2} \left\{ \left[2(1-\nu) - \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \right] E(u) + \left(\frac{k'}{k} \right)^2 u - 2(1-\nu) \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \right. \\ &\quad \left. - \frac{ab^2 x^2 [\xi(b^2 + \xi)]^{1/2}}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(a^2 + \xi)^{3/2}} \right\} - \frac{2Cxyz\xi^{1/2}}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(a^2 + \xi)^{1/2}(b^2 + \xi)^{1/2}}, \\ U_y &= \frac{2Cz}{ab^2} \left\{ \left[2(1-\nu) + \frac{1}{k^2} \right] E(u) - \left(\frac{k'}{k} \right)^2 u \right. \\ &\quad \left. - \left[2(1-\nu) \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} + \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right] \operatorname{sn} u - \frac{a^2 b^2 y^2 [\xi(a^2 + \xi)]^{1/2}}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(b^2 + \xi)^{3/2}} \right\} \\ &\quad - \frac{2Bxyz\xi^{1/2}}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(a^2 + \xi)^{1/2}(b^2 + \xi)^{1/2}}, \quad (1-3-10) \\ U_z &= \frac{2Bx}{ab^2} \left\{ (1-2\nu) \left[E(u) - u \right] \left(\frac{k'}{k} \right)^2 - \frac{bz[(b^2 + \xi)\eta\xi]^{1/2}}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(a^2 + \xi)^{1/2}} \right\} \\ &\quad - \frac{2Cy}{ab^2} \left\{ (1-2\nu) \left[E(u) - k'^2 u - k^2 \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right] \frac{1}{k^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{bz[(a^2 + \xi)\eta\xi]^{1/2}}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(b^2 + \xi)^{1/2}} \right\}\end{aligned}$$

位移知道后，应力就可无困难地求出。

§ 1-4 裂纹前缘附近的位移、应力和应力强度因子

推导裂纹前缘附近的位移和应力，需要知道椭球坐标 ξ, η, ζ 的极限形式，即极坐标 r, θ, ϕ 的知识。 r, θ 是在裂纹前缘的垂直平面内(图 1-4-1)的坐标， ϕ 是决定椭圆上的点的参数坐标的角度(图 1-4-2)。为了建立 ξ, η, ζ 和 r, θ, ϕ 之间的关系，作出一个椭圆，

① 参阅本书附录 I。

其长、短半轴长分别为 a' 和 b' (图1-4-2)。

$$a' = a + r \cos \theta, \quad b' = b + r \cos \theta$$

式中 r 远小于 a 和 b 。在图 1-4-2 中长度 PP' (即 $r \cos \theta$) 是法平面内任意线段 r 在裂纹平面上的投影 (图 1-4-1)。由图 1-4-2 可知, 椭圆 $x^2/a'^2 + y^2/b'^2 = 1$ 上的任意点 $P'(x, y)$ 的坐标为:

$$x = a \cos \phi + r \cos \theta \cos \theta' \quad (1-4-1)$$

$$y = b \sin \phi + r \cos \theta \sin \theta'$$

式中: θ' 是椭圆 $x^2/a'^2 + y^2/b'^2 = 1$ 边缘的外向单位法线与 x 轴间的角度。

可以证明, θ' 与椭圆的下列参数方程有关^①:

$$a \sin \phi = \Pi_0^{1/2} \sin \theta', \quad (1-4-2)$$

$$b \cos \phi = \Pi_0^{1/2} \cos \theta'$$

式中: $\Pi_0 = a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi$

在 nz 平面 (图1-4-1) 内, 点 (r, θ, ϕ) 和 (x, y, z) 相当; x, y 由式(1-4-1)给出, 又

$$z = r \sin \theta$$

将式(1-3-1)相加则给出:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \xi + \eta + \zeta + a^2 + b^2$$

因此 $\xi + \eta + \zeta = -\Pi_0$

$$+ \frac{2ab}{(\Pi_0)^{1/2}} r \cos \theta + r^2$$

图 1-4-2 由裂纹边缘量出的极坐标

由于 $\xi = \eta = 0$, 相当于 $r = 0$, 即在椭圆边缘上, 因此

$$\text{和} \quad \xi + \eta = \frac{2ab}{(\Pi_0)^{1/2}} r \cos \theta + r^2 \quad (1-4-3)$$

$$\zeta = -\Pi_0 \quad (1-4-4)$$

① 过椭圆边缘点 P (图 1-4-2) 的切线斜率为:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

其法线斜率为:

$$\text{tg } \theta' = \frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b \sin \phi}{a \cos \phi} = \frac{a}{b} \text{tg } \phi \quad (a)$$

引入

$$\Pi_0 = a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi$$

将式(a)左边分子、分母各乘以 $\Pi_0^{1/2}$, 则有

$$\frac{\Pi_0^{1/2} \sin \theta'}{\Pi_0^{1/2} \cos \theta'} = \frac{a \sin \phi}{b \cos \phi}$$

于是:

$$a \sin \phi = \Pi_0^{1/2} \sin \theta', \quad b \cos \phi = \Pi_0^{1/2} \cos \theta'.$$

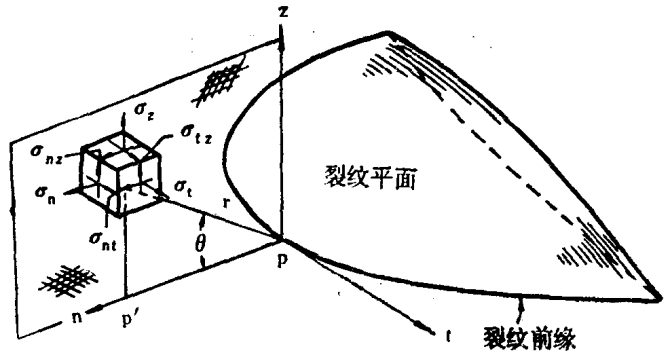
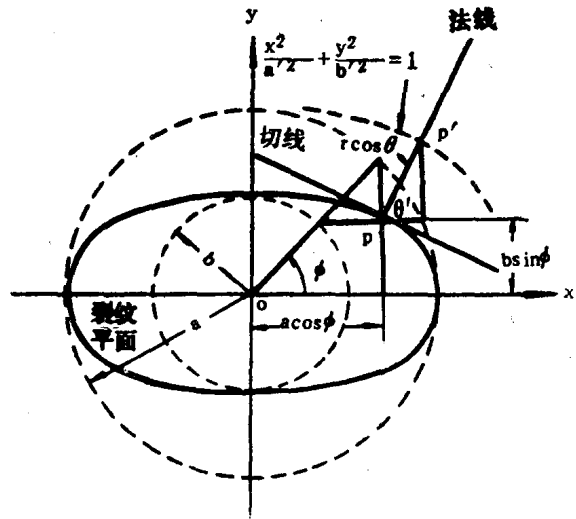


图 1-4-1 裂纹前缘附近的应力状态



此外, 由式(1-3-1)求得 ξ 和 η 之间关系的第二个式子:

$$\xi\eta = \frac{(abz)^2}{\xi} = -\frac{(abr\sin\theta)^2}{\Pi_0} \quad (1-4-5)$$

由式(1-4-5)和式(1-4-3), 则得二次式:

$$\lambda^2 - \left(\frac{2ab}{(\Pi_0)^{1/2}} r \cos\theta + r^2 \right) \lambda - \frac{(abr\sin\theta)^2}{\Pi_0} = 0$$

它的两个根是

$$\xi = \frac{2ab}{(\Pi_0)^{1/2}} r \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad \eta = -\frac{2ab}{(\Pi_0)^{1/2}} r \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (1-4-6)$$

式中高于 r 一阶的项都已被忽略, 因此, 式(1-4-6)仅在椭圆 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 边缘附近才能成立。

1. 裂纹前缘的应力强度因子

根据 Green 和 Sneddon(1950)的解^[6], Irwin(1962)^[8]已算出均匀垂直拉伸下扁平椭圆裂纹张开型的应力强度因子 k_I 。他的计算采用了裂纹表面位移的知识, 即垂直方向的拉伸产生椭球形裂纹的张开。现在利用应力方程(1-2-8)也可以求出应力强度因子。将式(1-3-4)代入式(1-2-8)的 σ_z 表达式中, 在 $z=0$ 平面上和 $\eta=0$ 处(椭圆裂纹外部)计算简化后的结果:

$$\sigma_z = \frac{p}{E(k)} \left\{ \frac{ab^2}{\sqrt{Q(\xi)}} - \left[E(u) - \frac{\text{sn } u \text{ cn } u}{\text{dn } u} \right] \right\}$$

当 $\xi \rightarrow 0$ 时取极限, $E(u)$ 化成为第二类完全椭圆积分 $E(k)$, 和 $(\text{sn } u \text{ cn } u)/\text{dn } u$ 变成零^①。此外, 已知由式(1-4-6)给出的 ξ 极限形式后, 则裂纹前缘附近当 $\theta = 0^\circ$ 时 σ_z 为:

$$\sigma_z = \frac{p}{E(k)} \Pi_0^{1/4} \left(\frac{b}{a} \right)^{1/2} \frac{1}{(2r)^{1/2}} + O(r^0)$$

$(2r)^{-1/2}$ 的系数给出应力强度因子:

$$k_I = \frac{p}{E(k)} \left(\frac{b}{a} \right)^{1/2} (a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/4} \quad (1-4-7)$$

对于圆裂纹, $a = b$, $E(k) = \pi/2$, 则式(1-4-7)变为

$$k_I = \frac{2p\sqrt{a}}{\pi} \quad (1-4-7, a)$$

图 1-4-3 中示出了对于不同的 a/b 值描绘的 k_I 随角 ϕ 而变化的图线。可以看出, k_I 在裂纹前缘相交于短轴的点有最大值, 裂纹可能在该处扩展。因此, 当椭圆裂纹表面上增加压力时, 裂纹的扩展可能造成圆裂纹的边界形状。

还可看出, 当比值 a/b 变得非常大时, 在三维裂纹前缘附近的应力状态将趋近于长为 $2b$ 的

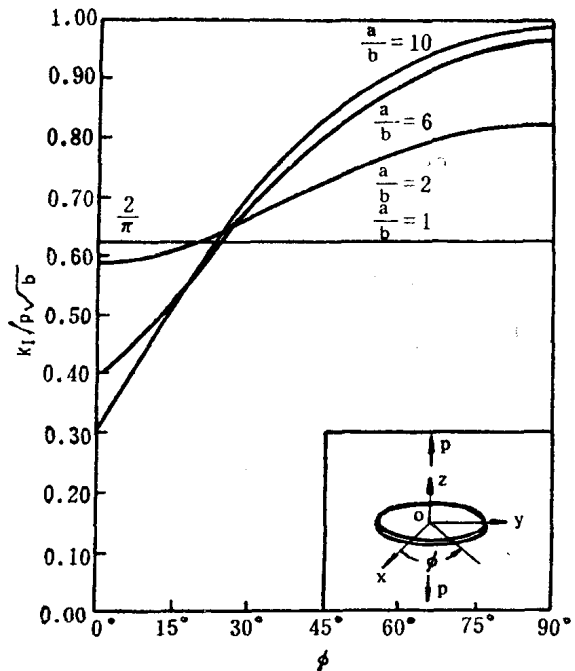


图 1-4-3 张开型应力强度因子

① $\because \xi = 0, \text{sn}^{-2}u - 1 = 0, \text{sn } u = \pm 1, u = \pm \pi/2, \therefore E(u) = E(k), (\text{sn } u \text{ cn } u)/\text{dn } u = 0,$