经　济　数　学

（线性代数）

朱凤娟　主编

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学:线性代数/朱凤娟主编. 一北京:中国商业出版社,1998.2 1
ISBN 7-5044-2789-6

Ⅰ.经… Ⅱ.朱… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材 ②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 00997 号

责任编辑:乔杰

*

中国商业出版社出版发行
(100053 北京广安门内报国寺 1 号)
新华书店总店北京发行所发行
中国石油报社印刷厂印刷
1998 年 3 月第 1 版 1998 年 3 月第 1 次印刷
850×1168 毫米 32 开 11 印张 250 千字
定价:17.00 元

* * * *

(如有印装质量问题可更换)

编写说明

传统的线性代数教材在内容上比较重视数学理论本身的科学性和逻辑性，多用大量篇幅来讨论理论的证明与推导，结果常使学生学完本门课程后，相关的计算、应用及解决实际问题的能力不高。多年的教学实践使我们体会到，原有的教材和教学模式已不适应现在的需要。为适合教学改革的需要，按照科学、实用、新颖的原则编写了此书。本书由朱凤娟主编，王玲副主编，参编人员有毕卫星、沈家云、张玉宾，全书由辽宁省商业专科学校基础部教学主任吕志远副教授主审。

本书具有下列特点，一是删去了传统教材中绝大部分定理的证明过程，仅保留了少量重要定理及简单性质证明；二是增加大量的计算与应用的类型题及解题指导，以适应少讲多练的教学要求；三是增加经济问题的数学模型，以体现线性代数的应用性；四是配备大量的相关习题，并附答案以供参考。

由于我们水平有限，加之时间较紧，谬误之处恳请读者批评指正。

编　者

1997.12.1

目　　录

第一章　行列式与克莱姆法则

行列式是研究线性代数的重要工具，它在数学的许多分支与其他学科中也有广泛的应用。本章先从二阶、三阶行列式入手，进而得出 n 阶行列式的定义，讨论 n 阶行列式的性质与计算方法，最后介绍克莱姆法则解线性方程组。

第一节　行列式的定义

一、二阶、三阶行列式

定义 1：记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式。它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为二阶行列式的元素。行列式中横排称行，竖排叫列，二阶行列式含二行二列，共有 2^2 个元素。元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示它所在的行序，第二个下标 j 表示它所在的列序，即元素 a_{ij} 位于行列式的第 i 行第 j 列。二阶行列式所表示的代数和可用对角线法则来叙述：主对角线（从左上角到右下角元素的联线）上两个元素的乘积取正号；次对角线（从右上角到左下角元素的联线）上两个元素的乘积取负号。图示如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-$　　　　$+$

我们称(1.1)式等号右端的式子为二阶行列式的展开式。

例 1:(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=3\times2-1\times4=2$

(2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\times0-2\times(-3)=6$

例 2:设 $D=\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix}$,

问:(1)k 为何值时,$D=0$;

(2)k 为何值时,$D\neq0$;

(3)k 为何值时,$D>0$;

(4)k 为何值时,$D<0$.

解:

$$D=\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix}=(k-1)^2-2^2=(k-3)(k+1),$$

$(k-3)(k+1)=0$,则 $k=3,k=-1$.

因此可得:

(1)当 $k=3$ 或 $k=-1$ 时,$D=0$;

(2)当 $k\neq3$ 且 $k\neq-1$ 时,$D\neq0$;

(3)当 $k<-1$ 或 $k>3$ 时,$D>0$;

(4)当 $-1<k<3$ 时,$D<0$.

定义 2:记号

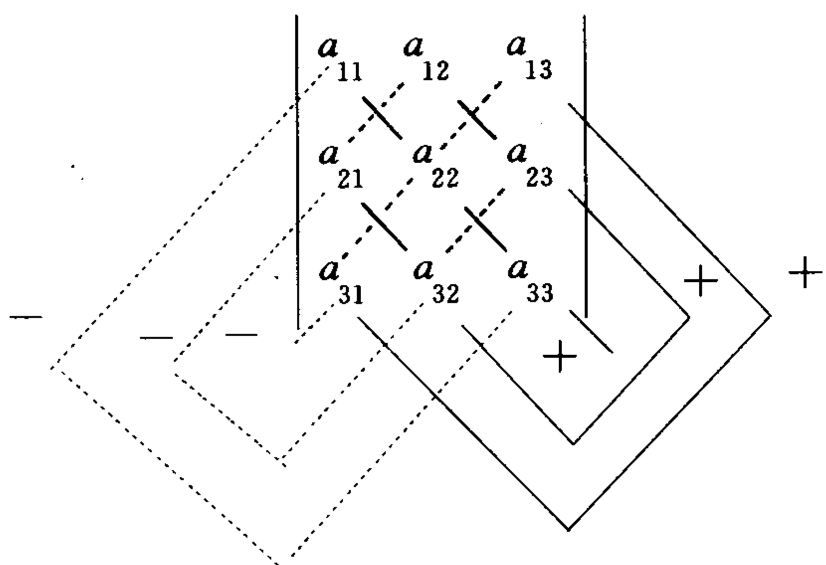
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式。它表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (1.2)$$

三阶行列式含三行三列共有 3^2 个元素，是由不同行不同列的三个元素相乘而得到的 3! 项的代数和，其中带正号项和带负号项各占一半。可由三阶行列式的对角线法则来叙述：主对角线上三个元素乘积取正号，主对角线的平行线上二个元素与其对角上的元素乘积取正号；次对角线上三个元素的乘积取负号，次对角线的平行线上二个元素与其对角上的元素乘积取负号。图示如下：



我们称(1.2)式等号右端的式子为三阶行列式 D 的展开式。

例 3：
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \times 0 \times 1 + (-1) \times 4 \times (-3) + 1 \times 2 \times (-2)$$
$$- 1 \times 4 \times (-2) - (-1) \times 2 \times 1 - 1 \times 0 \times (-3)$$
$$= 12 - 4 + 8 + 2 = 18$$

例 4：实数 a,b 满足什么条件时，有
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

解：
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$

若要 $a^2+b^2=0$,则实数 a 与 b 必须同时为零。因此,当 $a=0$ 且 $b=0$ 时,给定的行列式等于零。

例 5：$\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充要条件是什么?

解：$\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k^2+k-6=(k-2)(k+3)$

$(k-2)(k+3)\neq 0 \Longleftrightarrow k\neq 2$ 且 $k\neq -3$

因此可得：

$$\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 的充要条件是 } k \neq 2 \text{ 且 } k \neq -3.$$

需要注意的是,对角线法则只适合于二、三阶行列式。为了引入 n 阶行列式定义,我们对二、三阶行列式的展开式换一种方式讨论。

三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

如果记

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}M_{11},$$

$$A_{21} = -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}M_{21},$$

$$A_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}M_{31}.$$

其中，M_{i1}叫做元素 a_{i1}的余子式，它是 D 中划去元素 a_{i1}所在的第 i 行第一列后余下的元素按原来的顺序组成的二阶行列式（$i=1,2,3$），且 $A_{i1}=(-1)^{i+1}M_{i1}$叫做元素 a_{i1}的代数余子式。那么，三阶行列式 D 可以写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \qquad (1.3)$$

我们称(1.3)式为三阶行列式 D 按第一列展开的展开式。

而二阶行列式 D 的展开式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

也可以看成是二阶行列式按第一列展开的展开式。首先，我们规定由一个元素构成的一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，则

$a_{22}=(-1)^{1+1}|a_{22}|=A_{11}$是元素 a_{11}的代数余子式，

$-a_{12}=(-1)^{2+1}|a_{12}|=A_{21}$是元素 a_{21}的代数余子式。

从而有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} \qquad (1.4)$$

如果把(1.3)、(1.4)两式作为二阶、三阶行列式的定义，那么我们可以得到一个统一的方法，用低阶行列式定义高一阶行列式，即用这种递归的方法定义一般的 n 阶行列式。

二、n 阶行列式

定义 3：记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

称为 n 阶行列式，简记为 $D=|a_{ij}|$. 它由 n 行 n 列共 n^2 个元素构成，$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$叫做主对角线上元素。

当 $n=2$ 时，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

当 $n>2$ 时，

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1} \tag{1.6}$$

其中，$A_{i1}=(-1)^{i+1}M_{i1}$，

$$M_{i1}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-12} & a_{i-13} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+12} & a_{i+13} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

称 M_{i1}为 D 中元素 a_{i1}的余子式，它是 D 中划去元素 a_{i1}所在的第 i 行第一列余下的元素按原来顺序组成的 $n-1$ 阶行列式；称 A_{i1}为 D 中元素 a_{i1}的代数余子式($i=1,2,\cdots,n$).

我们称(1.6)式为 n 阶行列式 D 按第一列的展开式。它还可以写成：

$$D=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}+\cdots+(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} +\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \tag{1.7}$$

显然，对任何自然数 n，(1.7)式给出了一个计算 n 阶行列式的方法：将 n 阶行列式化为 $n-1$ 阶，再化为 $n-2$ 阶，…，最后便可求出行列式的值。这种方法通常称为降阶法。

与二、三阶行列式类似，n 阶行列式(1.5)的展开式中共有 $n!$ 个乘积项，每个乘积项中含有 n 个取自不同行不同列的元素，这些项中带正号项和带负号项各占一半$\left(\frac{n!}{2}\text{个}\right)$。

例 6：设有四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix},$$

求 $a_{11},A_{11},a_{21},A_{21},a_{31},A_{31},a_{41},A_{41}$及 D 的值。

解：$a_{11}=2,a_{21}=0,a_{31}=1,a_{41}=-1.$

$$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=6,$$

$$A_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{41}=-M_{41}=-\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=8,$$

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}+a_{41}A_{41}$$
$$=2\times(-6)+0\times 6+1\times 2+(-1)\times 8=-18$$

例 7：已知五阶行列式 D 的第一列元素分别为 3，2，0，1，4，其

相应的余子式分别为$-1,2,7,5,-8$,求D的值。

解:已知$a_{11}=3,a_{21}=2,a_{31}=0,a_{41}=1,a_{51}=4,M_{11}=-1,M_{21}=2,M_{31}=7,M_{41}=5,M_{51}=-8$,

则
$$\begin{aligned}D&=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}-a_{41}M_{41}+a_{51}M_{51}\\&=3\times(-1)-2\times2+0\times7-1\times5+4\times(-8)\\&=-44\end{aligned}$$

前面提到了第一列元素的余子式,代数余子式的概念,下面给出一般的余子式、代数余子式的概念。

定义 4:n阶行列式$D=|a_{ij}|$中划去元素a_{ij}所在的第i行第j列余下的元素按原来顺序组成的$n-1$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素a_{ij}的余子式,记作M_{ij},并记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

称A_{ij}是元素a_{ij}的代数余子式。

例 8:四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中,元素a_{32}的余子式和代数余子式为:

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

D 中元素 a_{13}的余子式和代数余子式为：

$$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

若进而求 A_{13}中元素 a_{42}的余子式和代数余子式，因元素 a_{42}的两下标已不再代表其所在的行和列的位置，故其余子式为：

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$$

代数余子式为：

$$(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$$

而不是 $$(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$$

定理 1：设 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$，则对任意的 $j(1<j\leqslant n)$，

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \qquad (1.8)$$

下面我们用三阶行列式来验证这一定理。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \\
&\quad - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\
&= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}
\end{aligned}
$$

这是三阶行列式 D 按第二列展开所得的等式，同样，可类似地得到：

$$D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

由此得

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \qquad (1 < j \leqslant 3)$$

综合(1.6)式及(1.8)式，有如下结果：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (1\leqslant j\leqslant n) \tag{1.9}$$

由定理 1 可得：

若 n 阶行列式有一列元素为 0，则 $D=0$.

例 9：已知四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

分别按第一列及第三列展开，求 D 的值。

解：(1)按第一列展开

$$D=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+0\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=3\times(-18)-(-27)-33+0=-60$$

(2)按第三列展开

$$D=1\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=-(9-6+35-2+45-21)=-60$$

注:在不做要求的情况下,选含零较多的列展开可简化计算。

例 10:按第三列展开行列式 D,并求其值。

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$$

解: $$D=a(-1)^{1-3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+b(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}+c(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+d(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=a+b+d$$

例 11:已知四阶行列式 D 的第四列元素分别为 1,−1,0,1,相应的余子式分别为 2,5,9,13,求 D 的值。

解:$D=1\times(-1)^{1+4}\times2+(-1)\times(-1)^{2+4}\times5$

$$+0\times(-1)^{3+4}\times9+1\times(-1)^{4+4}\times13$$

$$=-2-5+0+13=6$$

例 12:求下列行列式的值:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式称为上三角行列式。它的特点是当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$. 或者说这个行列式主对角线以下元素都等于零。

解:由定义,将 D 按第一列展开

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}.$$

$$\because \quad a_{21}=a_{31}=\cdots=a_{n1}=0,$$

$$\therefore \quad D=a_{11}A_{11}=a_{11}M_{11}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

容易看出,a_{11}的余子式 M_{11}仍是一个上三角行列式,只是阶数比 D 小 1,因此,又可用同样方法求得

$$M_{11}=a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这样一直做下去,不难求得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即上三角行列式的值正好等于主对角线上元素乘积。

例 13:求下列行列式的值:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式称为下三角行列式。它的特点是当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$。或者说，主对角线以上元素都等于零。

解：由定理 1，将 D 按第 n 列展开

$$D=a_{nn}A_{nn}=a_{nn}(-1)^{n+n}M_{nn}$$

$$=a_{nn}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2\,1} & a_{n-2\,2} & \cdots & a_{n-2\,n-2} & 0 \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-2} & a_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}$$

再将 a_{nn}的余子式 M_{nn}按最后一列展开

$$M_{nn}=a_{n-1n-1}(-1)^{(n-1)+(n-1)}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2\,1} & a_{n-2\,2} & \cdots & a_{n-2\,n-2} \end{vmatrix}$$

则

$$D=a_{nn}a_{n-1n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2\,1} & a_{n-2\,2} & \cdots & a_{n-2\,n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{nn}a_{n-1n-1}\cdots a_{22}a_{11}$$

即下三角行列式的值也正好等于主对角线上元素乘积。

上三角行列式与下三角行列式统称为三角行列式，其值等于主对角线上元素之积。