

中学数学教材教法研究丛书

近似计算初步

上海市数学会

中学数学研究委员会編著

上海教育出版社

中学数学教材教法研究丛书

近 似 计 算 初 步

上海市数学会中学数学研究委员会編著

上海教育出版社

一九六一年·上海

中学数学教材教法研究丛书

近 似 计 算 初 步

上海市数学会中学数学研究委员会编著

*

上海教育出版社出版

(上海永福路123号)

上海市书刊出版业营业许可证出090号

商务印书馆上海印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

*

开本: 787×1092 1/32 印张: 3 1/2 字数: 79,000

1961年5月第1版 1961年5月第1次印刷

印数: 1—20,000本

统一书号: 7150·1199

定 价: (八) 0.20元

編者的話

1960年以來，在總路綫、大躍進、人民公社三面紅旗的光輝照耀和推動下，在前兩年教育大革命已經取得偉大勝利的基础上，掀起了一个轰轰烈烈的教学改革群众运动。在党的领导下，广大的教育工作者积极地投入了这一运动。在运动中，我們一方面肯定了已有的成績，总结了已有的經驗，同时也揭露了教学工作中存在的缺点，根据“适当縮短年限、适当提高程度、适当控制学时、适当增加劳动”的精神提出了課程革新的各种建議，并开始在試驗。

“中学数学教材教法研究”这一套丛书，就是在这大好形势下着手計劃編写的。在这套丛书里，我們准备就中学数学課程中的某些專題，作比較深入的分析研究。企圖通过这套丛书，能够广泛地交流各方面的經驗，帮助教师們用正确的观点来理解和处理教材，掌握为理解和处理教材所必需的专业知識，探討教学方法，从而有效地提高教学质量。

在編写这套丛书时，我們力图能以毛澤东思想为指导，坚持教学改革的方向，用辯証唯物主义的观点，根据理論联系实际的原則来分析和研究教材，并結合当前中学教学实际，探討相应的教学方法。

• 这本“近似計算初步”就是在这一指导思想下写成的，它是中学数学教材教法研究丛书之一。

为了滿足一般教师們的需要，在本书第一和第二部分比較詳尽地介紹了用初等方法处理的近似計算的知識；在介紹这些

知識的同时，結合教学中存在的問題作了分析和討論。最后还在本书第三部分比較具体地提出了教学近似計算这一內容的建議。

本书是由余元希同志执笔写成的。在編写过程中我們曾比較广泛地搜集了教师們的意見和实际經驗。初稿写成后还曾由楊荣祥、赵型两同志詳細审讀，提出了修正意見。最后由执笔者根据各方面的意見重行作了整理和充实。

虽然这样，但限于我們的水平，本书中难免还存在不少缺点或錯誤，我們誠懇地希望讀者能及时提出批評和指正，幫助我們进一步修改和提高。

上海市数学会中学数学研究委员会

1961年2月

目 录

引言	1
一 近似数的概念	8
1. 近似数的来源	8
2. 近似数的截取方法	13
3. 近似数的精确度的确定	18
4. 有效数字和可靠数字	23
5. 近似数的有效数字和它的相对误差界间的关系	27
二 近似数的计算	33
1. 近似计算的一般要求	33
2. 界限法则	35
3. 精密误差的计算	42
4. 数字计算法则	54
5. 近似数的混合运算	66
6. 预定精确度的计算	73
三 近似计算的教学法	82
1. “近似计算绪论课”的教学建议	82
2. “近似数的基本概念”的教学建议	85
3. “近似数的计算”的教学建议	91
4. “预定精确度的计算”的教学建议	96
5. 近似计算知识、技能的巩固与发展	99

引 言

随着我国社会主义建设事业的飞跃发展，计算数学这门科学越来越广泛地应用在生产实践中，对国家建设事业发挥实际作用。近似计算是这门科学的一个重要组成部分。

过去，在中学数学课程中，不重视学习近似计算方面的知识和培养近似计算的技能。教育革命中，大家揭发了这个缺陷，指出了这是中学数学教学脱离生产、脱离实际的一种表现。在中学数学教学中，必须加强近似计算初步知识的教学，是比较一致的意见，并且正在开始实施。

为了帮助教师们能更好地掌握中学数学课程中的近似计算教材内容，本书将对有关知识作比较全面的介绍，并且提出一些教学法上的建议。

在没有谈到这些内容之前，这里，我们先就近似计算的研究对象和它的实际意义，中学数学课程中近似计算的教学目的和内容这两个问题作一般的探讨。我们认为，首先在这两个问题上统一一下认识，是十分必要的。

1. 近似计算的研究对象和它的实际意义

在日常生活中、生产实践中、科学技术的研究中，我们经常要接触到各种各样的量。我们对这些量，进行测量、比较、计算，并且研究它们间的关系。

现实世界中存在各种各样的量，它们有一个共同的特性，这就是一切量总能被某一个作为单位的量来度量，度量的结果就

得到了抽象的数。

为了使自然力量为人类服务，我們需要进行各种各样的技术設計与計劃，这里必須用到各种計算。計算的对象和結果也都是数。

所以人們的实际生活，是和数分不开的。正因为这样，数学就成为人类認識自然現象、解决生产实践中的各种問題的有力工具。

在解决实际問題的时候，我們所遇到的数，絕大多数都不是絕對准确的，它仅仅代表了我們所考察的量的某一个近似值。譬如說，用钟表来計量時間，我們所用的表在每天接收音机里所报的作为标准的时间来校正时，发现相差不到半分钟，那末这个表就已足够准确了。用这个表来計量出的時間，当然不会是絕對准确的。用最精密的仪器測量某一物体的长度、重量，我們也同样地不会得到絕對准确的数。在施工的时候，我們从車床上車出了一个圓柱，它的直徑准确到 0.01 毫米，那末这架車床的性能就非常好，而我們工作的质量也是很够滿意了。在物理学里，我們知道自由落体的距离和時間的关系是 $s = \frac{1}{2}gt^2$ ，这里，在同一的地区里 g 是一个常量，但应用到具体問題里，我們就要取它的某一个近似值，例如 980 厘米/秒²。这里数 980 也不是絕對准确的。

这一切都說明了，在我們的活动中，經常要和那些不是絕對准确的数打交道；正是这些数，在我們所遇到的实际問題里扮演着主角。

怎样合理地处理这些不是絕對准确的数，是实践向数学提出的一个重要問題。要把数学知識应用到实践中去，就必须解决这个問題。近似計算的理論和方法，就是为了解决这个問題

而提出的。

作为近似計算研究对象的那些不是絕對准确的数，究竟有什么特点呢？讓我們来討論一个具体的例子：

“为了計算一条跑道的面积，量得它的长是 420.45 米，寬是 8.25 米，求这条跑道的面积。”

利用矩形的面积公式，按照准确数的乘法法則容易算出

$$S = 420.45 \times 8.25 = 3468.7125 \text{ (平方米)}.$$

但是，这里計算出来的这些数字，是不是都有意义呢？

誰都知道，測量的結果总难免要有一些誤差，所以，这里的数 420.45 和 8.25 都不是絕對准确的。我們設想如果在測量中長和寬分別有 0.01 米的誤差，這將對結果發生怎樣的影響呢？

(1) 假定長是 420.46 米，寬仍舊是 8.25 米，那末

$$S_1 = 420.46 \times 8.25 = 3468.795 \text{ (平方米)}.$$

(2) 假定長仍舊是 420.45 米，寬是 8.26 米，那末

$$S_2 = 420.45 \times 8.26 = 3472.917 \text{ (平方米)}.$$

在測量那末長的一段距離時，產生僅僅 0.01 米的誤差，這已經很不容易了；但即使這樣，我們從比較 S 、 S_1 、 S_2 這三個值中就可以看出，除掉它們的前兩位上數字 3、4 一致外，十位上的數字就不完全一致了。因此我們開始時按照對待準確數的辦法算出 $S = 3468.7125$ 平方米，形式上很準確，但是，實際上小數點後面這些數字寫出來根本沒有意義。事實上，即使個位上的那個數字 8，也不是可靠的。我們倒不如粗略些說，跑道的面積大約是 3470 平方米更合理一些。

如果在測量長度時量得更粗略一些，僅僅量到米作單位，即長是 420 米，而寬仍舊是 8.25 米，這時，對結果將會有什麼影響呢？

$$S_3 = 420 \times 8.25 = 3465 \text{ (平方米)}.$$

比較 S_3 和 S_4 ，可以看出它們的前三個數字仍舊是一致的。從這個結果我們仍舊可以合理地得出跑道的面積大約是 3470 平方米這個結論，但是計算卻大大簡化了。

但是相反的，如果在測量寬的時候，也同樣地量得那末粗略，只量出寬是 8 米，這時

$$S_4 = 420 \times 8 = 3360 (\text{平方米}).$$

顯然，這個結果和事實相差就過遠了。

仔細考察上面的例子，就可以作出下面的結論：

(1) 處理這些不是絕對準確的數，如果仍舊墨守成規地搬用處理絕對準確的數的那些法則，往往會浪費精力，而得出的結果卻不能合理地反映實際情況。這也就是說，對於這些數的計算，盲目地追求算出精確的結果是不必要的。但是另一方面，也不能片面地追求計算上的簡便，把工作做得太粗略，從而使計算的結果與事實不符。

(2) 對於那些不是絕對準確的數，雖然可以允許它們有誤差，但也應該有一定的限度。

研究近似計算的理論和方法，目的就在於避免上面結論(1)里所指出的兩種極端，並建立起既省事、又能保證計算質量的各種計算法則。

在近似計算的理論中，最重要的就是要確定作為計算對象的那些不是絕對準確的數所帶有的誤差，以及由這些數通過各種計算所得結果的誤差。這種誤差理論是建立各種近似計算法則的基礎。

近似計算的理論和方法，不僅可以用來簡化那些簡單運算（加、減、乘、除、乘方、開方）的計算，而且還廣泛地應用在其他方面。

我們僅就有关初等數學的問題舉幾個例子：

(1) 在計算中，我們經常要用到各種數學用表，例如對數表、三角函數表。這些表是怎樣制成的，這些表可以在什麼範圍內使用，要確切地回答這些問題，就要涉及到函數的近似計算。

(2) 在計算中，為了使計算迅速，我們可以使用計算尺、計算圖等工具。由於刻度的限制，使用這些工具，一般來說不可能得到完全準確的數。這些工具在什麼條件下才能使用，回答這個問題也要用到近似計算的理論。

(3) 我們不難應用一般的解法，求出一些簡單的方程的解。但是對於象 $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$ 之類的三次方程，要求出它的絕對準確的根，就不容易了。至於一般的高於4次的方程，就不可能用普通的方法來求解。在實際應用上，對這些方程，也並不要求我們找出它們的絕對準確的根，而僅僅需要找出某一個近似的根來。怎樣求出高次方程的近似根，是近似計算中所研究的問題之一。

在高等數學里，近似計算理論的應用就更廣泛了。譬如在積分里要研究數值積分法、儀器積分法（面積儀）、圖象積分法等積分的近似方法，微分方程里要研究數值解法等近似解法。這些也都是屬於近似計算所討論的內容。

從上面所說的這一切，容易看出，要使數學這門科學應用到實踐中去，成為解決實際問題的有力工具，就免不了要涉及近似計算的理論。

2. 中學數學課程中近似計算的教學目的和內容

從上一節里的分析可以看到，中學數學課程中必須加強近似計算的教學。同時，可以看出，近似計算這一課題的內容是非常豐富的，中學數學課程中的各個部分，幾乎都要涉及近似計算。

加强近似計算的教学，不仅要把有关內容列入中学数学教学大綱，划定專門時間进行教学；而且要把它和大綱里的其他項目有机地結合起来，在教学数学課程中其他內容的同时，着重地培养学生近似計算的能力。

深入地研究近似計算的理論和方法，需要应用高等数学方面的知識。随着教育革命的不断發展，中学数学教学的內容，也必然要不断地改革。許多原来不包括在中学数学教学大綱里的內容，将要逐步充实进去，以提高中学数学的程度，以适应工农业发展的需要。相应的，在中学数学課程中也将有可能給学生以更多的、更深入的关于近似計算的知識。

但这也并不是說一定要让学生具备了高等数学的知識才来学习近似計算。事实上，近似計算的一些最初步的知識，在小学数学里就可以引入了（例如四舍五入法，本来在小学算术里就已引入了）。及早地給学生以近似計算的初步訓練，使他們不停留在普通的計算上，不論对进一步学习数学或实际应用來說，都是有必要的。在中学阶段，当学生学过了实数、不等式等知識，对学习近似数的基本概念，以及关于实数的簡單运算（四則运算、乘方和簡單的开方）的近似計算法，已有了足够的基础；这时，开始系統地学习这些內容是很适宜的。

我們把这一阶段仅仅限于用初等方法来研究的近似計算，簡称近似計算初步^①。

在这个阶段的近似計算中，我們认为應該要达到以下的教学目的：

(1) 使学生理解学习近似計算的实际意义，正确地建立关于近似数的概念。

(2) 使学生能确信近似計算中数字計算法則（主要是在实

^① 本书以后提到“近似計算”都是指在这个範圍内所研究的近似計算。

踐中總結出來的那套數字計算法則)的合理性,並能運用這些法則熟練地進行合理的計算,而且培養成習慣。

一切教學活動,都具有教育性的作用,在近似計算的教學中,也必須十分重視教育性的目的。

近似計算這一課題,目的就是追求多、快、好、省地進行計算工作,解決實際問題。這裡我們可以向學生進行關於總路線精神、理論聯繫實際等方面的政治思想教育。

近似計算的習題,應該是從實際中提出的。尽可能地搜集學生所熟悉的反映當前社會主義建設各方面偉大成就的題材,來充實習題的內容,這不僅是使學生理解近似計算的實際意義,培養他們的實際工作能力所必要的;而就在這同時,也向學生進行了階級觀點、勞動觀點、群眾觀點等方面的教育。

正確地掌握近似計算的有關概念和方法,必須以辯證唯物主義的觀點和方法為指導。在這一正確的觀點和方法指導下進行教學工作,也就可以培養學生的辯證唯物主義的觀點。例如準確數與近似數間的關係,近似數的精確度與結論的可靠性之間的關係等等,都有非常豐富的內在思想性。

我們認為,在近似計算的教學中應該以全面地達到上述的這些目的來指導我們的工作。

從這一認識的基礎上,下面我們將順次研究“近似計算初步”的具體內容和教學方法。

一 近似数的概念

在学习近似計算的时候,首先遇到的問題是:什么是近似数;近似数和准确数究竟有什么区别。搞清楚了这些問題,才有可能正确地建立近似数的概念,掌握近似計算中有关的理論和方法。这一部分里,我們將討論这些問題。首先,我們將从近似数的各种来源,說明近似数的实际意义;然后,將圍繞确定近似数精确度的各种方法,引进近似数的绝对誤差、相对誤差、有效数字、可靠数字等重要概念,并指出这些概念間的联系。

1. 近似数的来源

引言里我們曾指出:在日常生活、生产实践中、科学研究中,我們經常要遇到对事物的計数、測量、計算等問題。由于实际的需要与可能,在計数、測量和計算中有时要用到与实际完全符合的准确的数;而在更多的情况下,却只需要或者只可能应用那些与实际并不完全符合的、仅仅是近似的数。下面我們来具体分析这些情况。

1. 計数 在对事物进行計数的时候,有时我們有必要而且也有可能应用与实际完全符合的准确的数。例如,統計一个班級里学生的人数,可以数出班級里有52人。这里数52与班級里学生的实际人数是完全符合的。象这类确切表示某一个量的真正值(准确值)的数,叫做准确数。

但是,在实际問題里有时我們却并不需要用这种准确数来表示量的真正值,而宁可用一个同准确数相差不多的数来代替它。例如,某一次群众大会,实际出席的人数是9503,但是通常

我們却只需要粗略地指出出席大会的約 9500 人,或者更粗略一些,指出出席大会的約 10000 人. 这里数 9500 或者 10000, 和出席大会的实际人数并不完全符合,但是相差不多. 象这类仅仅是近似地表示某一个量的真正值的数,叫做近似数.

明显的,用近似数来表示一个量的值,一般來說,总会帶有一定程度的誤差. 例如用 9500 人来代替 9503 人,产生的誤差是

$$9503 \text{ 人} - 9500 \text{ 人} = 3 \text{ 人},$$

就是少算了 3 人; 9500 表示量的不足近似值. 用 10000 人来代替 9503 人,产生的誤差是

$$9503 \text{ 人} - 10000 \text{ 人} = -497 \text{ 人},$$

就是多算了 497 人; 10000 表示量的过剩近似值.

一般地說,如果用 A 表示准确数, a 表示它的近似数, d 表示 A 与 a 的差,就是

$$A - a = d,$$

那末

(1) 当 $d > 0$ 时, a 是 A 的不足近似值;

(2) 当 $d < 0$ 时, a 是 A 的过剩近似值.

在特殊情况下,当所取近似数恰巧与准确数一致时, $d = 0$.

a 是 A 的近似数,通常記作 $A \approx a$.

在实际問題里,有时还会遇到另一种情况. 例如,要統計一个大城市的人口,因为居民有生有死,有来有往,随时都有变化,这时我們就无法用准确数来确切地表示这个城市的人口,而只能应用近似数. 通常我們說上海市有居民 1000 万人,这里数 1000 万就是一个近似数.

2. 測量 在任何条件下測量的結果总会有某些誤差,所以一般只能得到近似数. 例如,我們用一支普通的尺来量一条綫

段的长度。把尺的起点和綫段左边的端点对齐，而看綫段右边的端点所对准尺上的刻度是多少。如果这个端点恰巧对准尺上的某一刻度，例如 17 厘米，这样我們很容易从测量得到了数 17。这个数好象是确切地表示了这条綫段的长度；但是，事实上却不然。首先，我們所用的尺，它的上面的刻度，并不是绝对准确的，如果用另外一支尺来量这条綫段，就很可能发现量出的结果不恰巧是 17 厘米。其次，我們即使测量得非常细致，也不能保证不发生误差，如果用同一支尺认真地量同一条綫段，在几次测量中，很可能得到不同的结果，例如 17 厘米、17.1 厘米、16.9 厘米等等，我們很难肯定这些数中间哪一个绝对是准确的。

有时，当我们把尺的起点和綫段左边的端点对齐以后，綫段右边的端点并不恰巧和尺上的某一刻度对齐。例如，我們所用的尺的最小刻度是 0.1 厘米，用它来量一条綫段时，綫段左边的端点对齐尺的起点，而右边的端点却对着尺上标有 17.4 厘米和 17.5 厘米的两个刻度之间。这时，我們就要根据事先的规定或者习惯上的规定来读出这个数。如果规定要读出尺上最靠近綫段右边的端点的刻度，并且用目力估计出这个端点离开刻度 17.5 厘米较接近，那末就取 17.5 厘米做这条綫段的长度。明显的，这里 17.5 是一个近似数。

象测量重量、时间等等量的时候，也会遇到类似的情况。由于受到测量工具和测量技术的限制，测量出的结果，总或多或少地会带有一些误差，而测量得到的数一般总是近似数。

从测量得到的数虽然是近似数，是带有误差的，但这却是符合实际需要的。在实际问题里，我們所需要的数往往并不要求它绝对准确。例如，要测量两地间的距离，用米做单位就很够了，而没有必要引进更小的单位分米或者厘米。同样的，称一筐白菜的重量，用斤做单位已经足够了，没有必要引进更小的单

位两或者錢。盲目地追求絕對准确或者不必要的精确度,反而會不符合实际需要。

3. 計算 在計算中,随着作为計算对象的数的性质,以及实际問題的需要,可能得到准确数,也可能得到近似数。

对准确数进行計算,如果仅仅从数学的角度来考虑,可以保証所得的結果仍旧是准确数。例如, $10 \div 3 = \frac{10}{3} = 3.333\cdots$, 这里,数 $\frac{10}{3}$ 、 $3.333\cdots$ 都是准确数。又如,計算边长是1个单位长度正方形的对角綫的长度时,得到它的长是 $\sqrt{2} = 1.414\cdots$ 个单位长度,这里,数 $1.414\cdots$ 也是一个准确数。

但是,实际上有时我們却往往不需要算得这样精确。例如一打鋼笔定价是40元,計算一支鋼笔的定价,通常只要算出定价是3.33元就可以了,保留更多的小数位,就没有什么实际意义。同样的,在实际問題里应用到无理数 $\sqrt{2}$ 时(例如 $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$),通常也只要用它的某一个近似值,例如1.414就足够了,而没有必要保留更多的小数位。这就是說,对准确数进行計算,虽然可以得到准确数;但由于实际的需要,有时我們却宁可取帶有一定誤差的近似数做計算的結果。

对近似数进行計算,結果当然只能是近似数。例如,計算一块矩形鋼板的面积,量得长是20厘米,寬是15厘米,用乘法算出面积是300平方厘米。由于作为計算对象的数(通常我們把它叫做原始数据)是近似的,它們都帶有一定程度的誤差,很明显,算出的結果300也会帶有誤差,因此它也是一个近似数。

綜上所述,我們可以归納出以下几点:

1. 近似数有多方面的来源,無論在計数、測量或者計算的过程中,都可能产生近似数。