实变函数论习题解答

国防科技大学应用数学教研室编

湖南科学技术出版社

一九八〇年·长沙

实变函数论习题解答
国防科技大学应用数学教研室编
责任编辑：胡海清
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1980年11月第1版　1981年12月第2次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：8.875　字数：180,000
印数：27,361——37,960
统一书号：13204·24　　定价：0.93元

前　言

实变函数论是数学的一个重要分支，它在现代数学的各分支中有着广泛而深刻的应用。高等院校的数学专业和其他有关专业都把它作为一门重要的基础理论课。学习这门课的学生，对它的习题求解常感困难。特别是对其中一些较深较难的题目，往往束手无策，望而却步。初教这门课的教师，也为其中一些难题而冥思苦索，花费许多时间和精力。因此，我们认为出一本实变函数论的习题解答是有益的。对学生可以起一个启发引导作用，有助于他们提高解题能力；对教师可以作为一个教学参考材料，有助于他们节省备课时间。

本习题解答是我校部份教师1978年进修实变函数论时，在个人报告集体讨论的过程中形成的。1979年曾整理出一份油印稿。今年又由李仲哲、沙钰、张干宗、王维忠等同志再次加工整理，补充修订。在这次整理中，参阅了复旦大学教学系教师进修班整理的一份题解(油印稿)，吸取了其中某些题的解法。

本习题解答以И·П·那汤松著《实变函数论》（修订本）的习题为主，包括了该书第一至九章全部习题，并补充了一定数量的习题。对有些题还加了附注说明。题解中所用名词、符号除个别（如集合的和、交运算符改用∪、∩）外均与该书一致。文中引用定理、结论时，如无特别声明也均指该书有关章节。

编　者

1980年 6 月

目　　录

第一章　无限集

本章内容　集的运算及其性质，势的概念、可列集与连续统的势及性质，势的比较、集间对等的伯恩斯坦定理.

1. 单调函数的不连续点的全体至多为一可列集，试证之.

证　不妨设函数

$$y=f(x),\ (-\infty<x<+\infty)$$

为单调增加函数. 其间断点全体记为E.

对任意$x_0\in E$，$x_1\in E$，$(x_0<x_1)$ 有

$$f(x_0-0)<f(x_0+0)\leqslant f(x_1-0)<f(x_1+0).$$

记　$\delta(x_0)=(f(x_0-0),\ f(x_0+0))$,

$$\delta(x_1)=(f(x_1-0),\ f(x_1+0)).$$

则$\delta(x_0)$和$\delta(x_1)$不相交.

分别在 $\delta(x_0)$、$\delta(x_1)$ 中任意取定有理数r_{x_0}、r_{x_1}. 则$r_{x_0}<r_{x_1}$. 对每个$x_n\in E$都作$\delta(x_n)$，并选定r_{x_n}. 则不同的r_{x_n}对应于不同的x_n. 从而E与有理数子集

$$R_E=\{r_{x_n}\mid x_n\in E\}$$

构成一一对应. 而R_E至多可列，故E也至多可列.

2. 试作$(0,\ 1)$与$[0,\ 1]$间的一对一的对应.

证　将$(0,\ 1)$中的全部有理数排列为

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots.$$

而[0，1]中全体有理数可排列为

$$0,\ 1,\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots.$$

作其间的对应f如下：

$$f(x)=\begin{cases}0, & 当x=r_1,\\ 1, & 当x=r_2,\\ r_{n+2}, & 当x=r_n,\ (n>2),\\ x, & 当\ x\ 是\ (0,\ 1)\ 中无理数时.\end{cases}$$

则$f(x)$是(0，1)与[0，1]间的一一对应.

3. 证明$\mathfrak{f}=2^c$.

证 记

$$F=\{f(x)\mid f(x)为[0,\ 1]上一切实函数\},$$

$$\overline{\overline{F}}=\mathfrak{f}.$$

1) $\mathfrak{f}\geqslant 2^c$.

设E为[0，1]中任一子集，$\varphi_E(x)$为E的特征函数．即

$$\varphi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in[0,\ 1]-E.\end{cases}$$

当E_1、E_2均为[0，1]子集，$E_1\neq E_2$时，$\varphi_{E_1}(x)\neq\varphi_{E_2}(x)$.

记

$$M=\{E\mid E\subset[0,\ 1]\},$$

$$\Phi=\{\varphi_E(x)\mid E\subset[0,\ 1]\}.$$

则Φ与M对等．$\overline{\overline{\Phi}}=\overline{\overline{M}}=2^c$．而$\Phi\subset F$．从而有

$$\overline{\overline{\Phi}}\leqslant\overline{\overline{F}},\ 2^c\leqslant\mathfrak{f}.$$

2) $f \leqslant 2^c$。

对每一$f(x)\in F$，有平面上一点集

$$C_f=\{(x,\ y)\,|\,y=f(x),\ x\in[0,\ 1]\}$$

与之对应．记

$$C_F=\{C_f\,|\,f(x)\in F\}。$$

则F与C_F对等，$\overline{\overline{C_F}}=\overline{\overline{F}}=f$。$C_F$为平面上一切点集全体$B$的子集，而$B$的势为$2^c$。从而有

$$f=\overline{\overline{C_F}}\leqslant 2^c。$$

由1)、2) 立知

$$f=2^c。$$

4. 设$A=B\cup C$，$\overline{\overline{A}}=c$。则$B$与$C$中，至少有一集的势是$c$。

证法一 反证。若不然，$\overline{\overline{B}}<c$，$\overline{\overline{C}}<c$。则可推出矛盾。

由于$\overline{\overline{A}}=c$。必存在$A$到二维欧氏空间$E_2$间的一一对应$\varphi$，使

$$\varphi(A)=E_2。$$

即对任意$a\in A$，有

$$\varphi(a)=(x,\ y)\in E_2$$

与之对应。

若记$\varphi(B)=U$，$\varphi(C)=V$。有

$$E_2=\varphi(A)=\varphi(B)\cup\varphi(C)=U\cup V。$$

且$\overline{\overline{U}}=\overline{\overline{B}}<c$，$\overline{\overline{V}}=\overline{\overline{C}}<c$。

设P_x是E_2中点到x轴X的投影，P_y是E_2中点到y轴Y的投影。

即

$$P_x(x,\ y)=(x,\ 0),\ P_y(x,\ y)=(0,\ y).$$

记 $P_x(U)=U_x,\quad P_y(V)=V_y$.

有 $\overline{\overline{U_x}}\leqslant\overline{\overline{U}}<c,\quad \overline{\overline{V_y}}\leqslant\overline{\overline{V}}<c$.

而$\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}=c$。所以$U_x$、$V_y$分别为$X$、$Y$的真子集．即存在 x^*，使 $(x^*,\ 0)\overline{\in}U_x$，存在 y^* 使 $(0,\ y^*)\overline{\in}V_y$．从而对任意 y，$(x^*,y)\overline{\in}U$，对任意x，$(x,\ y^*)\overline{\in}V$．这使得

$$(x^*,\ y^*)\overline{\in}U\cup V=E_2.$$

得出矛盾．

证法二　若$\overline{\overline{B}}<c$,证明必有$\overline{\overline{C}}=c$。

由于$\overline{\overline{A}}=c$，存在二维平面$E_2$与$A$间的一一对应$\varphi$，使

$$\varphi(E_2)=A.$$

在平面 E_2 上，以 L_x 表示横坐标为 x 的点的全体．由$\overline{\overline{L_x}}=c$，$\overline{\overline{B}}<c$。知 B 不能与 L_x 上所有点对应，即存在一点 $p_x\in L_x$，使$\varphi(p_x)\overline{\in}B$．从而必有$\varphi(p_x)\in C$。

让 x 在 x 轴上变化，每条L_x上取一个这样的点p_x，这些 p_x 的全体记为P．则P与 x 轴构成一一对应．便有$\overline{\overline{P}}=c$。而$\varphi(P)\subset C$。则有

$$c=\overline{\overline{P}}=\overline{\overline{\varphi(P)}}\leqslant\overline{\overline{C}}.$$

再由题设知$\overline{\overline{C}}\leqslant\overline{\overline{A}}=c$。立知$\overline{\overline{C}}=c$。

5．假如$f(x)$具有如下的特性：对于每一个x_0有正数δ与之对应，当$|x-x_0|<\delta$时，$f(x)\geqslant f(x_0)$；那末 $f(x)$ 的函数值的全体至多成一可列集．

证 由题设知，对任意$x_0\in(-\infty,\ \infty)$，可找出有理区间

$$\Delta_{x_0}=(r_{x_0},\ R_{x_0})$$

使 $x_0\in\Delta_{x_0}$，$\Delta_{x_0}\subset(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$。从而当$x\in\Delta_{x_0}$时有$f(x)\geqslant f(x_0)$。当$x_0$变动时，记这些有理区间$\Delta_{x_0}$的全体为

$$V=\{\Delta_{x_0}\mid x_0\in(-\infty,\ \infty)\}.$$

又设U为由一切有理数对构成的区间$(r,\ R)$的全体，即

$$U=\{(r,\ R)\}.$$

显然，$V\subset U$，而$\overline{\overline{U}}=a$。从而$\overline{\overline{V}}\leqslant a$。

以F记$f(x)$的函数值全体的集合。下面证明F至多可列。

若 $f(x)\equiv c\quad(x\in(-\infty,\ \infty))$，则问题解决。

若 $f(x_1)\neq f(x_2)\quad(x_1\neq x_2)$，则对应地有$\Delta_{x_1}\in V$，$\Delta_{x_2}\in V$。必有$\Delta_{x_1}\neq\Delta_{x_2}$（即两区间不重合）。若不然，$\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}$。由$x_2\in\Delta_{x_1}$，有$f(x_2)\geqslant f(x_1)$，又由$x_1\in\Delta_{x_2}$，有$f(x_1)\geqslant f(x_2)$。所以有$f(x_1)=f(x_2)$。与假设矛盾。从而必有$\Delta_{x_1}\neq\Delta_{x_2}$。由此可见，$F$中不同的函数值对应于$V$中不同的区间。即$F$与$V$的一个子集对等。从而有

$$\overline{\overline{F}}\leqslant\overline{\overline{V}}\leqslant a.$$

即 $f(x)$ 的函数值全体至多可列。

6. 在被加集可以相交的情形下证明：(1)可列个有限集的和集是一可列集。(2)可列个势为c的集的和集的势仍为c。

证 先说明，我们认为这些定理中所说的诸被加集都是不同的集合。即任意二个集合之间至少有一个元素不同。

证明(1) 设$A_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$是可列个(互不相同的)有限

集。记为

$$A_1=\{a_1^{(1)},\ \cdots,\ a_{n_1}^{(1)}\},$$

$$A_2=\{a_1^{(2)},\ \cdots,\ a_{n_1}^{(2)}\},$$

$$\cdots$$

和集为 $S=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$。

显然，S 至多可列。因为可按一定顺序把 S 的元素排列起来，去掉重复的，剩下的仍至多可列。

再者，S必为无限集。若不然，S为有限集。不妨记之为

$$S=\{a_1,\ \cdots,\ a_N\}.$$

则S的所有不同子集共有 2^N 个，是有限个，不可能是可列个。因此，S必为无限集。

由于 $S=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为至多可列的无限集，便知S为可列集。

证明(2) 设$S=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，$E_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$的势均为$c$。为使诸被加集互不相交，置

$$E_1'=E_1,$$

$$E_k'=E_k-(E_1\cup\cdots\cup E_{k-1}),\ (k=2,\ 3,\ \cdots)$$

则 $E_{k_1}'\cap E_{k_2}'=\phi$，$(k_1\neq k_2)$

且仍有

$$S=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k'.$$

由 $E_1'=E_1$，$\overline{\overline{E_1'}}=\overline{\overline{E_1}}=c$。知$\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{\bigcup\limits_k E_k'}}\geqslant\overline{\overline{E_1'}}=c$。又由于$E_k'\subset E_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$。知$\overline{\overline{E_k'}}\leqslant\overline{\overline{E_k}}=c$。从而知 $S=\bigcup\limits_k E_k'$的势不超

过可列个互不相交的势为 c 的集的和集的势。由已证明的结论知$\overline{\overline{S}}\leqslant c$。从而$\overline{\overline{S}}=c$。

7. 证明$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$，且加以推广。

证 $(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup C=(A\cap B)\cup C$。

一般有

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\cup C=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cup C),(\Lambda\text{为任意指标集})。$$

因为$x\in\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\cup C\Longleftrightarrow$对一切$\lambda\in\Lambda$有$x\in A_\lambda$或$x\in C\Longleftrightarrow$对一切$\lambda\in\Lambda$有$x\in A_\lambda\cup C\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cup C)$。

8. 设A_1，A_2，A_3，…为一系列的集，若记$\overline{A}$为这样的元素的全体，有无限多个A_n都含有这种元素。又记$\underline{A}$为这样的元素的全体，只有有限个的A_n不含这种元素。证明

$$\overline{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad \underline{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k。$$

证 由$x\in\overline{A}\Longleftrightarrow$对任意$n$，存在$k_n\geqslant n$，使$x\in A_{k_n}\Longleftrightarrow$对任意$n$，$x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$。知

$$\overline{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k。$$

同样由 $x\in\underline{A}\Longleftrightarrow$存在$n$，使$x\in A_k$ $(k\geqslant n)$ $\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$。

知 $\underline{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$.

［注］ 对某一集合序列$\{A_n\}$，常把$\overline{A}$称为$\{A_n\}$的上限集，记为

$$\overline{A}=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n.$$

把$\underline{A}$称为$\{A_n\}$的下限集，记为

$$\underline{A}=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n.$$

由已证结果知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

易知 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\supset\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$.

当 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$时，记之为$\lim_{n\to\infty}A_n$，这时称集列$\{A_n\}$收敛. 可以证明单调集列一定收敛. 有

若$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset A_{n+1}\subset\cdots$，则$\{A_n\}$收敛，且$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

若$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$，则$\{A_n\}$收敛，且$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$.

若$\{A_n\}$为任意集列，引入

$$G_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad F_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

则 $G_n \supset G_{n+1}$，$F_n \subset F_{n+1}$。有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} G_n.$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} F_n.$$

9. 如果 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，$\overline{\overline{A}} = c$，则至少有一个 A_n 的势是 c。

证 反证。若不然，$\overline{\overline{A_n}} < c$ $(n = 1, 2 \cdots)$。可导致矛盾。

由于 $\overline{\overline{A}} = c$，则存在一个 A 到可列维乘积空间

$$B = \{(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mid x_i \text{为实数}, (i = 1, 2, \cdots)\}$$

的一一映照。记为 $f(A) = B$。即对任意 $a \in A$，对应有 $(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in B$ 使

$$f(a) = (x_1, \cdots, x_n, \cdots).$$

记 $f(A_n) = U_n$，$(n = 1, 2, \cdots)$。有

$$f(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = B.$$

又记 $X_n = \{(0, \cdots, 0, x_n, 0, \cdots) \mid x_n \text{为实数}\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$。P_{x_n} 为 B 中点到 X_n 的投影。即对 $(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in B$，

$$P_{x_n}((x_1, \cdots, x_n, \cdots)) = (0, \cdots, 0, x_n, 0, \cdots) \in X_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

记 $P_{x_n}(U_n) = U_{nx_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$。

即当 $(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in U_n$ 时，$P_{x_n}((x_1, \cdots, x_n, \cdots)) = (0, \cdots, 0, x_n, 0, \cdots) \in U_{nx_n}$。

显然 $U_{nx_n} \subset X_n$，$\overline{\overline{U}}_{nx_n} \leqslant \overline{\overline{U}}_n$。

由于 $\overline{\overline{A}}_n = \overline{\overline{U}}_n < c \quad (n = 1, 2, \cdots)$，

有 $\overline{\overline{U}}_{n x_n} \leqslant \overline{\overline{U}}_n < c \quad (n = 1, 2, \cdots)$。

而$\overline{\overline{X}}_n = c$。所以$U_{n x_n}$为$X_n$的真子集。即存在$x_n^*$使

$$(0, \cdots, 0, x_n^*, 0, \cdots) \overline{\in} U_{n x_n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

即对任何$x_i (i \neq n)$有

$$(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n^*, x_{n+1}, \cdots) \overline{\in} U_n (n = 1, 2, \cdots).$$

从而有 $(x_1^*, \cdots, x_n^*, \cdots) \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n = B$。

导出矛盾。

10。证明任一可列集的所有有限子集全体是可列集。

证 设可列集为

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

对每个n，作出$\{a_1, \cdots, a_n\}$的所有子集，共有有限个。记为

$$B = \{A_1, A_2, \cdots, A_{k_n}\}.$$

再令n取遍所有正整数。则得B_1，B_2，…。从而$B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$就是$A$的全体有限子集。显然，$B$是无限集。再根据可列个有限集的和集仍是可列集知$B$是可列集。即$A$的全体有限子集是可列集。

11。设$\{x_n\}$为一序列，其中元素彼此不同。则它的子序列全体组成势为c的集。

证 记$X = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$。考虑$X$的子序列，它对应于$X$的一个无限子集 $\{x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots\}$ $(k_1 < k_2 < \cdots <$

$k_n<\cdots$)。因此，只要证明X的无限子集全体的势是c即可。

记X的所有子集全体为A，X的所有有限子集全体为B，X的所有无限子集全体为C。则$A=B\cup C$，而$\overline{\overline{A}}=c$，$\overline{\overline{B}}=a$。由题4的结论立知$\overline{\overline{C}}=c$。

12. 若对任意有限个x：x_1，x_2，…，x_n，存在正数M，使得$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right|\leqslant M$成立。试证：能使$f(x)\neq 0$的$x$的集至多为可列集。

证 由题设条件知下面的集合

$$A_a=\{x\mid f(x)>a,\ a>0\},$$

$$A_b=\{x\mid f(x)<b,\ b<0\}$$

均为有限集。事实上，若A_a为无限集，可在其中取可列个点x_1，x_2，…，x_n，…。从而有$f(x_i)>a\quad(i=1,\ 2,\ \cdots)$，$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)>na$，当$n\to\infty$时有$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\to\infty$。这与题设条件矛盾。这说明$A_a$必为有限集。同样可证$A_b$亦为有限集。

记 $A=\{x\mid f(x)\neq 0\}$，$A_+=\{x\mid f(x)>0\}$，

$$A_-=\{x\mid f(x)<0\}.$$

则$A=A_+\cup A_-$。只需证明A_+和A_-均至多可列。

记 $A_1=\{x\mid f(x)>1\}$，

$$A_m=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{m}<f(x)\leqslant\frac{1}{m-1}\right\},\ (m=2,\ 3,\ \cdots)$$

从而 $\quad A_+=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$。

由上面所证知诸A_n均为有限集．从而$A_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$至多为可列集．同样可证$A_-$亦至多可列．所以$A$亦至多可列．

13． 设A_1、A_2是两个互不相交的集，B_1和B_2也是互不相交的集．又设φ_1与φ_2分别是A_1到B_1上，A_2到B_2上的一一映照．则存在$A_1 \cup A_2$到$B_1 \cup B_2$上的一一映照．假如$A_1 \subset A_2$，$B_1 \subset B_2$，φ_1、φ_2意义同前．问是否存在$A_2 - A_1$到$B_2 - B_1$上的一一映照？

解 若$A_1 \cap A_2 = \phi$，$B_1 \cap B_2 = \phi$．可令

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in A_1, \\ \varphi_2(x), & x \in A_2. \end{cases}$$

则$\varphi(x)$就是$A_1 \cup A_2$到$B_1 \cup B_2$上的一个一一映照．

若$A_1 \subset A_2$，$B_1 \subset B_2$．则$A_2 - A_1$与$B_2 - B_1$之间不一定存在一一映照．例如：

$$A_1 = \{2, 3, \cdots\}, \ B_1 = \{3, 4, \cdots\}.$$

$$A_2 = B_2 = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}.$$

$$\varphi_1: n \to n+1, \ (n = 2, 3, \cdots)$$

$$\varphi_2: n \to n, \ (n = 1, 2, \cdots)$$

则φ_1是A_1到B_1上的一一映照，φ_2是A_2到B_2上的一一映照．但

$$A_2 - A_1 = \{1\}, \ B_2 - B_1 = \{1, 2\}.$$

显然$A_2 - A_1$和$B_2 - B_1$之间不存在任何一一映照．

14． 无限集必含有无限多个互不相交的无限真子集．

证 由于无限集必含有可列子集，所以只需对可列无限集

证明即可。

设可列无限集

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

作A的子集如下：

$$A_1=\{a_n | n=2(2t-1), t=1, 2, \cdots\},$$

$$A_2=\{a_n | n=2^2(2t-1), t=1, 2, \cdots\},$$

……

$$A_k=\{a_n | n=2^k(2t-1), t=1, 2, \cdots\}.$$

……

显然$A_k(k=1, 2, \cdots)$是A的真子集。且诸A_k是互不相交的。若不然，当$k_1\neq k_2$时，$A_{k_1}\cap A_{k_2}\neq\phi$。则必有$t_1$，$t_2$使

$$2^{k_1}(2t_1-1)=2^{k_2}(2t_2-1), \quad (k_1\neq k_2)$$

不妨设$k_2>k_1$，有

$$2t_1-1=2^{k_2-k_1}\cdot(2t_2-1).$$

这不可能。从而知$\{A_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$为A的可列个互不相交的真子集。

15. 证明$[a, b]$区间上右方连续单调函数全体的势是c。又$[a, b]$上单调函数全体的势如何？

证 (1) $[a, b]$上右方连续的单调函数全体的势是c。

记E为右方连续的单调函数全体。任取$f(x)\in E$。作

$$E_1=\{f(x)+c_1 | c_1\text{取一切实数}\}$$

显然$\overline{\overline{E_1}}=c$。而$E_1\subset E$。所以$\overline{\overline{E}}\geqslant c$。

另一方面，对任意$f(x)\in E$，对应有$f(x)$在有理点上的函