[英] J.W.S卡塞尔 著

数理经济学导论

吴碧英 郑沐霖 译
黄良文 校

福建科学技术出版社

译者的话

《数理经济学导论》系英国剑桥大学著名的数理经济学家卡塞尔（J· W· S· Cassels）教授为经济学家学习数理方法和数学家学习经济理论提供的一本专著。1981年出版后大受欢迎，1982年再版。本书是根据1982年版译出的。

简洁明瞭是本书的特点之一。正如人们对第一版的评论所说："它对经济概念的阐述深入浅出，容易理解，对于数学理论的处理既精密又巧妙；它可使数学家很快地掌握经济理论，也可使经济学家迅速掌握数理方法。"全书译文仅8万字，但已将西方经济学中的主要内容（如效用、偏好、交换经济、厂商理论、福利经济学、列昂节夫模型、宏观经济模型等）都包括在内了。

虽然这是一本高水平的专著，但对读者的数学水平要求不高。只要学过初等微积分的读者都可以读懂全书，从较低的起点开始，引导读者一步一步地深入研究得到的深刻结论。

本书引用了许多最新的研究成果，系统性强，对于某些较难的数学内容用"附录"的形式附在书后，既保持了全书的系统性，又便于读者阅读。因此它特别适合于那些想了解数理经济学而苦于时间不足的经济学工作者。前三章及附录由吴碧英译出，后三章由郑沐霖译出。翻译过程中曾得到厦门大学李文清教授的指导，黄良文教授在百忙中审校了全书，在此致以谢意。

由于译者水平有限，错误缺点在所难免，欢迎读者批评指正。

译者　1989年10月11日

符 号 说 明

在多数情况下实向量用不加下标的字母表示。例如，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。内积写为：

$$px=p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$$

我们对列向量和行向量不作区别，因为这从上下文可明显地看出。一般地说，财货向量（“商品组”）是列向量而价格是行向量。

同一维数的向量间关系用以下记号表示：

$x \geqslant y$，即$x_i \geqslant y_i \quad (\forall i)$

$x > y$，即$x \geqslant y$但$x \neq y$

$x \gg y$，即$x_i > y_i \quad (\forall i)$

有时，向量可添加上下标，例如x_i或y^i等，此时第j分量分别为x_{ij}或y_j^i等。

偏微分可用下标表示。例如，$f=f(x_1, \cdots, x_n)$则$f_j=\partial f/\partial x_j$。然而，有时下标只是用于标记函数，这时可再用一个下标表示偏微分。例如，设f_i（$1 \leqslant i \leqslant m$）是一个以$x_1, x_2, \cdots, x_n$为自变量的n元函数集合，则可记$f_{ij}=\partial f_i/\partial x_j$。从上下文中可将这些记号看得非常清楚。

我们用 I 表示单位矩阵（即对角元素为1，其余元素为0的矩阵）。用O表示零矩阵（即所有元素均为0的矩阵）。

本书用（$>$）代$\textcircled{>}$；用（$=$）代$\textcircled{=}$；用（$\geqslant$）代$\textcircled{\geqslant}$。在出现下标时，如$(>)_b$表示$\textcircled{>}_b$，推余类。

目　录

第一章　效用、无差别曲面

1、预备知识

我们首先建立个体在"商品组"之间的偏好关系模型。设有 n 个商品（财货）记为 1，2，3，…，n。一个商品组指的是一个实向量

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\geqslant 0$$

其中 x_j 是商品 j（在某一给定单位下）的数量。并假定商品无限可分，这样 x_j 可取任意的非负值。

我们假定一个给定的个体在任意两个商品组 x，y 之间存在一个**偏好序**。个体或者偏爱 x 甚于 y，记为 $x(>)y$；或者相反，记为 $y(>)x$；或者认为两者之间无差别，记为 $x(=)y$。如果 $x(>)y$ 或者 $x(=)y$，则记为 $x(\geqslant)y$。我们设偏好序是一致的，因此"$(>)$"满足如下序公理：

$$x(\geqslant)y \text{ 和 } y(\geqslant)x \Longrightarrow x(=)y \qquad (1.1)$$

$$x(\geqslant)y \text{ 和 } y(>)z \Longrightarrow x(>)z \qquad (1.2)$$

$$x(>)y \text{ 和 } y(\geqslant)z \Longrightarrow x(>)z \qquad (1.3)$$

假定个体希望每一种商品越多越好（即商品是"好的"而不是"坏的"）

$$x\geqslant y \Longrightarrow x(\geqslant)y \qquad (1.4)$$

通常我们作更强的假定，即

$$x>y \Longrightarrow x(>)y \qquad (1.5)$$

至少当　$y>>0$　　(1.6)

时上式成立。

存在零分量的商品组y，在理论上可能是异常的，而我们不能为处理它而经常去讨论理论上要求的修正细节。

在经济上通常假定，对任一x，集合

$$V(x_0) = \{x;\ x\ (\geqslant)\ x_0\} \qquad (1.7)$$

是凸集。这可以看成是“收益递减规律”的结果。在以下大部分的论述中，这个假设是最重要的。然而，我们也将在某些地方去掉$V(x_0)$是凸集的假设，此时我们会作明确的说明。

现在，我们只考虑一个可以用效用函数给出的偏好。而这个效用函数是定义在商品组$x \geqslant 0$上的连续实值函数$u(x)$，它所对应的偏好由下式给出：

$$x\ (>)\ y \Longleftrightarrow u(x) > u(y)$$

我们假定函数$u(x)$是充分高阶连续可微的。

条件（1.5）意味着

$$u(x) = \text{常数} \qquad (1.8)$$

是一个超曲面。我们把它叫做**无差别超曲面**。如果x，y位于同一无差别超曲面上，则$x\ (=)\ y$，反之亦然。由$V(x_0)$的凸性假定知道无差别超曲面是凸的。一般地，我们假定它们是严格凸的。

常用的效用函数例子如

$$\Pi x_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant n) \qquad (1.9)$$

而更一般的是

$$\Pi X_j^{\alpha(j)} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n) \qquad (1.10)$$

其中$\alpha(j)$是正常数，除了“无差别超曲面$u(x) = 0$是严格凸”之外，这些函数都满足我们前面所作的假定。

设$v(x)$，$u(x)$是二个效用函数。当且仅当存在一

个严格增加的连续函数Φ使得：

$$v(x)=\Phi[u(x)] \quad (1.11)$$

时，这二个效用函数给出同样的偏好关系。理论上对这样的u与v不加区别，也就是说对于不同的商品组x，我们只述及u（x）之间相等或不相等的关系，而不涉及u（x）值本身的意义（我们的效用是序数效用而不是基数效用。事实上存在基数效用理论，艾奇渥斯在他的《数学心理学》中，基于“享受计算”首先建立了这个理论，近来被冯·诺伊曼和摩根思特恩应用于对策论。但是我们这里将不涉及到基数效用的概念）。

注意：虽然我们假定无差别超曲面是凸的，但是我们没有假定u（x）是x的凸函数。

2、预算约束

设一个和商品组具有相同维数的价格向量$p>0$，其中第j个分量p_j是第j种商品在标准单位下的价格。如果$p_j=0$，则商品j是免费的。为避免特殊情况，我们假定没有免费商品，价格向量是在商品组x的对偶向量空间中。特别，数量积px，是在价格p下x的费用（费用有时也用“价值”这个术语，但一般情况下，“价值”特指第五章第3节所引入的概念）。

预算约束常用不等式

$$px\leqslant R \quad (2.1)$$

给出的。其中价格p和预算$R>0$是已知的。个体就是要使他的效用函数在这约束下取得最大值，在上一节的条件下，存在唯一的

$$\zeta=\zeta(p, R) \quad (2.2)$$

使得在预算约束下效用最大化。此时 ζ落在超平面

$$px = R \qquad (2.3)$$

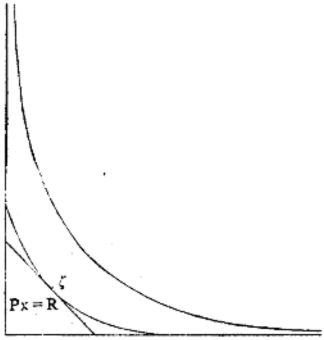

图 1

上。虽然超平面（2.3）是

$$V(\zeta) = \{x: u(x) \geqslant u(\zeta)\} \qquad (2.4)$$

的一个切平面。因此，如果 $\zeta >> 0$，则在且仅在 ζ 处相切，此时

$$P_j = \lambda u_j(\zeta) \qquad (2.5)$$

对于某些 $\lambda > 0$ 是成立的，其中

$$u_j(x) = \partial u(x)/\partial x_j \qquad (2.6)$$

如果对某些j有 $\zeta_j = 0$，则（2.5）式不一定成立。

反之，如果 ζ是任意一个商品组，且 $\zeta >> 0$，对于某些 λ，p由（2.5）式给出，则对于某些预算R有

$$\zeta = \zeta(p, R)$$

我们将进一步考察当p与R变化时，$\zeta(p, R)$的变化情况。

3、无差别超曲面

这一节，我们要考虑一个简单的无差别超曲面U，对于每一个价格$p > 0$，存在这样一个$z(p) \in U$，使得对于$x \in U$，费用px取得最小值。我们讨论以p为自变量的函数z(p)，这函数由下式定义

$$px \geqslant pz(p) \qquad (\forall x \in U) \qquad (3.1)$$

在严格凸的假定下，如果$x \neq z(p)$，则（3.1）式中的不

等号成立。

现在，设$p^*>0$，$p^\circ>0$是二个价格向量，令

$$z^*=z(p^*),\quad z^\circ=z(p^\circ) \tag{3.2}$$

由（3.1）式，我们有

$$p^\circ z^*\geqslant p^\circ z^\circ;\quad p^*z^\circ\geqslant p^*z^* \tag{3.3}$$

这样

$$(p^*-p^\circ)(z^*-z^\circ)\leqslant 0 \tag{3.4}$$

这就是替代定理。

特别地，如果p^*，p°只有一个分量不同，不妨设为

$$p^*_1>p^\circ_1,\quad p^*_j=p^\circ_j\quad(j>1) \tag{3.5}$$

则（3.4）式意味着$z_1^*\leqslant z^\circ$，因此

$$\partial z_j(p)/\partial p_j\leqslant 0,\quad(1\leqslant j\leqslant n) \tag{3.6}$$

这里，我们设偏导数是存在的。

我们可以把（3.6）式进一步推广。设l是任一向量，并且p°可以记为

$$p^\circ=p^*+\delta l$$

其中$\delta\to 0$，由（3.4）我们容易得到

$$\Sigma l_i l_j \partial z_i(p)/\partial p_j\leqslant 0\quad(\text{对}\forall l) \tag{3.7}$$

以下我们说明它的意义。

让价格p有微小的变化，即从p变化为$p+dp$，并且设$z=z(p)$，相应地z变化为$z+dz$，则$z+dz$是U在z处切平面。因此

$$pdz=0 \tag{3.8}$$

我们把$r(p)$定义为U中一个商品组在价格p下的最小费用，即

$$r(p)=p\,z(p) \tag{3.9}$$

由（3.8）式，我们有

$$dr = pdz + zdp$$
$$= zdp \qquad (3.10)$$

因为（3.10）是全微分，我们有

$$\partial z_j / \partial p_k = \partial z_k / \partial p_j \qquad (3.11)$$

这就是相互作用定理。

如果（3.11）的公共值为正，我们称商品j和k是可替代的（如果茶叶的价格上涨，我们就喝更多的咖啡，反之也是一样），如果（3.11）式是负的，则j和k是互补的（如果茶叶的价格上涨了，我们就食用更少的糖，反之也是一样）由（3.6）和（3.8）我们得到

$$\sum_{j \neq k} p_j(\partial z_j / \partial p_k) = -p_k(\partial z_k / \partial p_k) \geqslant 0 \qquad (3.12)$$

因此，在某种意义上说，可替代的情况要比互补的情况多些。

注1　由定义Z（P）是P的零次齐次函数

$$Z(\lambda P) = Z(P) \quad (\lambda > 0) \qquad (3.13)$$

由欧拉定理得：

$$\sum_k P_k(\partial Z_j / \partial P_k) = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \qquad (3.14)$$

它可由（3.8）和（3.11）导出。

注2　除证明Z（P）是由p唯一确定之外，我们不必用（1.7）式的凸性假定，而且确实许多命题（例如（3.4）式的证明）不需要它。我们假定无差别超曲面U是（1.7）式的前沿。如果不假定（1.7）是凸的，则Z（P）将落在（1.7）的凸复盖的前沿U^*上。换句话说，如果（1.7）是非凸的，我们无论如何无法得出全部结论。

注3　条件（3.7）基本上与凸函数的二阶导数矩阵的正定性，或半正定性是等价的（参看《附录A》）。与这些内容比较接近的可以参考K.Lancaste的《数理经济学》。也有人用Z来定义P，然后让Z取一个凸超曲面。

4、效用函数

现在我们回到第二节中所讨论的情况。设效用函数为 $u(x)$，对于给定的价格向量 $p>0$和预算 R，向量 $\zeta=\zeta(p, R)$ 使得$u(x)$在约束$px\leqslant R$下最大化。我们引用记号

$$V=\partial\zeta/\partial R \tag{4.1}$$

在第三节里，我们考虑一个无差别曲面U：$u(x)=$常数。当时所考虑的函数$Z(P)$由下式给出

$$Z(P)=\zeta(P, r(p)) \tag{4.2}$$

其中$r(P)$由（3.9）式给出。因此由（3.10）式推得：

$$\begin{aligned}\partial Z/\partial P_j&=\partial\zeta/\partial P_j+(\partial\zeta/\partial R)(\partial r/\partial P_j)\\&=\partial\zeta/\partial P_j+\zeta V\end{aligned} \tag{4.3}$$

在下式中

$$d\zeta=VdP+V(dR-\zeta dP) \tag{4.4}$$

其中V是矩阵（张量），而它的元素由下式给出：

$$V_{jk}=\partial Z_j/\partial P_k=(\partial\zeta/\partial P_k)_{u=\text{常数}} \tag{4.5}$$

由（3.11）知它是对称的。方程（4.4）称为斯鲁茨基方程。在解释它时，我们务必注意到 ζdp是当价格变化dp时为保持效用为一常数，预算R所产生的变化。（4.4）中的第二项称为收益项。（$(dR-\zeta dp)$称为收益补偿变化。）第一项是替换项，并且可以看作是由于价格变化而不是由于收益贴现作用所引起消费分配的变化。

由（4.4）和（4.5）我们有：

$$\partial\zeta_1/\partial P_1=(\partial\zeta_1/\partial P_1)_{u=\text{常数}}-\zeta_1(\partial\zeta_1/\partial R) \tag{4.6}$$

因此，由（3.6）知右边中的第一项是小于或等于零。一般说来，$\partial\zeta_1/\partial R\geqslant 0$，因而从直观看来应有$\partial\zeta_1/\partial p_1\leqslant 0$，

然而有可能出现$\partial \xi_1/\partial R<0$的情况，此时称商品1为劣等商品（例如当一个人收入增加时，他购买的人造奶油却减少了）。左边<0的情况也可能出现，此时商品1为吉芬商品：当价格下落时，它的销售量减少。这样的商品，在考试问题中经常出现，而现实生活中并不多见。例如，在爱尔兰饥荒以后，马铃薯的价格下降了，但马铃薯的销售量却减少了（农民的日常食品已不再是只有马铃薯了，他们买得起其他食品）。

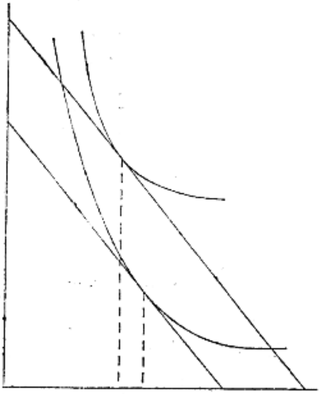

图2

练　习

1、在R^2的非负象限上按如下法测定义关系（$>$）：如果$a>c$或$a=c$，且$b>d$则(a, b)（$>$）(c, d)。试证明：（$>$）是一个序，但它不是由一个效用函数给出的。

2、设（$>$）定义在R^n的非负域中，试证明如下两个命题是等价的：

（i）存在一个连续函数$u(x)$使得恰好当$u(x)>u(y)$时x（$>$）y。

（ii）对任意x_0，集合$\{x: x(\geqslant)x_0\}$和集合$\{x: x_0(\geqslant)x\}$都是闭集。

〔提示：如果（ii）成立，首先对一个可列的稠密集（例如Q^n）中的x定义$u(x)$〕

3、（指数）设货物从A国运到B国。在A国有商品组

x^A和价格向量p^A，对B国有类似定义。B国对A国的拉斯伯尔指数L是在p^A下评价商品组的指数，它定义为

$$L=p^Ax^B/p^Ax^A$$

而派煦指数则是在p^B下的评价，它定义为

$$P=p^Bx^B/p^Bx^A。$$

现在设U是一无差别超曲面，并设x^A在U上最小化p^Ax；对B有类似假定（因此用第3节记号有$x^A=Z(p^A)$）。试证明

$$L\geqslant 1\geqslant P。$$

4、试证明如下“一般替代定理”。我们说商品1，2，…，r是有用的，只是因为它们包含某种“广义商品”G。设每单位j商品含G商品的量为W_j（$1\leqslant j\leqslant r$）；这样，在一个商品组x中含G商品的量即为$g=\sum_{j\leqslant r}W_jX_j$。设P是G的价格，则j的价格为$p_j=W_jP$（$1\leqslant j\leqslant r$）。用第3节的记号，设Z(p)在无差别超曲面U上使费用最小化。如果P增加，但对于$j>r$的P_j仍然保持不变，试证明G在z(p)中的量必减少。

5、用第3节的记号，设$d^{(1)}p$，$d^{(2)}p$是价格向量p的两个无穷小改变量，而$d^{(1)}z$，$d^{(2)}z$是$z=z(p)$的相应改变量。试证明：

$$d^{(1)}p\,d^{(2)}z=d^{(2)}p\,d^{(1)}z。$$

6、一个人在给定价格$p^{(j)}$和预算$R^{(j)}$（$j=1，2$）下选择商品组$x^{(j)}$。如果$p^{(1)}x^{(1)}>p^{(1)}x^{(2)}$，试证明$p^{(2)}x^{(1)}>p^{(2)}x^{(2)}$。如果$p^{(1)}x^{(1)}<p^{(1)}x^{(2)}$，试说明：无法对$p^{(2)}x^{(1)}$和$p^{(2)}x^{(2)}$的差的符号作出任何结论。

〔注：在第一种情况人们就说$x^{(1)}$对$x^{(2)}$有一显性偏好〕

7、用第4节（4.4）的记号，试证明$pv=1$。如果其中商品没有一个是劣等商品，试证明：对于每一个j均有$0\leqslant P_jV_j\leqslant 1$。

8、用第3节的符号。无差别曲面U和价格向量P固定。商品1（但没有其他商品）已合理化，就是说，选择商品1的x_1必须满足：$x_1<C$，对某些$C>0$，其中$C<Z_1(p)$。消费者在U上在条件$x_1\leqslant C$下在点$r=r(C)$处最大化pr。试证明：$r_1=C$。

如果C变化而p，U固定，试证明：$dr_2/dc>0$还是<0取决于商品2是商品1的互补商品还是替代商品。

〔提示：证明$r=z(\lambda, P_2, \cdots, P_n)$是C的减函数，其中$\lambda=\lambda(c)>p_1$〕

第二章　纯交换经济

1、引言

我们考虑由n个商品组成的商品组，存在一个由家计h组成的有限集合E，每一个h都有一个我们在第一章中所描述过的那种偏好关系：$(>)_h$特别是这种偏好关系可由效用函数$u_h(x)$导出。对于不同的$h\in E$，假定他们的偏好是独立的。今后我们不考虑不同家计h之间的效用函数的比较问题。下一章，当我们考虑"福利经济学"时，我们将考虑放宽这个限制，但是我们将发现，依靠现在所建立的理论可以得到令人惊奇的深刻结论。

设每一个家计h从一个商品组W_h（初始存量）开始，它们相互交换自己所缺少的物品，最后家计h得到物品a_h（即分配或最后分配）其中

$$\sum_h a_h = \sum_h W_h \qquad (1.1)$$

我们的目标是：考虑对于$h\in E$，根据他们的偏好关系，怎样分配才是最满意的（当然，"满意"的意义必须精确化）。

我们说一个分配a_h是**帕累托最优的**，指的是：不存在一个分配b_h，使得

$$b_h\ (\geqslant)_h\ a_h \quad （对\forall h成立） \qquad (1.2)$$

同时　$b_h\ (>)_h\ a_h$　（对某些h成立）　(1.3)

显然，一个分配要能成为是"令人满意的"分配，那么，它

首先必须是帕累托最优的。这当然是最低的要求：例如$n=1$时，存在两个家计使$W_1=W_2=(10)$，那么$a_1=(1)$，$a_2=(19)$是帕累托最优的，尽管它很难被看作是“令人满意的”。

对于帕累托最优的定义有各种不同的定义，例如阿罗-汉恩喜欢使用比较松的术语“帕累托有效”。这就是说不存在一个分配C_h，使得

$$C_h\ (>)_h a_h \qquad (\forall h) \tag{1.4}$$

在很弱的条件下，这与前面所述的定义是等价的。事实上，如果H是满足（1.3）的家计，由连续性，存在一个$C_H<b_H$，使得$C_H\ (>)_H a_H$，可把差b_H-C_H在$h\neq H$中重新分配，以得到一个分配$C_h>b_h\ (h\neq H)$

核概念是对帕累托最优分配所作的一个较大补充。设$\lambda_h>0\ (h\in E)$是任意的，则连续函数

$$\Sigma\ \lambda_h u_h(a_h) \tag{1.5}$$

在紧集（1.1）上取得最大值。任意取到的最大值$\{a_h\}$显然是帕累托最优。

艾奇渥斯对分配添加更加严格的条件，他引入了“核”的概念。设$\{a_h\}$是一个分配。我们说子集$S\subset E$是关于分配$\{a_h\}$的一个**反对联盟**是指：如果存在$b_s\ (s\in S)$使得：

$$\sum_s b_s=\sum_s W_s \tag{1.6}$$

$$b_s\ (\geqslant)_s a_s \qquad (\forall s\in S) \tag{1.7}$$

$$b_s\ (>)_s a_s \qquad (\text{某些}s\in S) \tag{1.8}$$

对于分配$\{a_h\}$，如果不存在任何反对联盟，则$\{a_h\}$属于核，而在核里的分配是帕累托最优的（取$E=S$）。考虑一个由单个家计形成的“联盟”我们可以发现，核分配满足