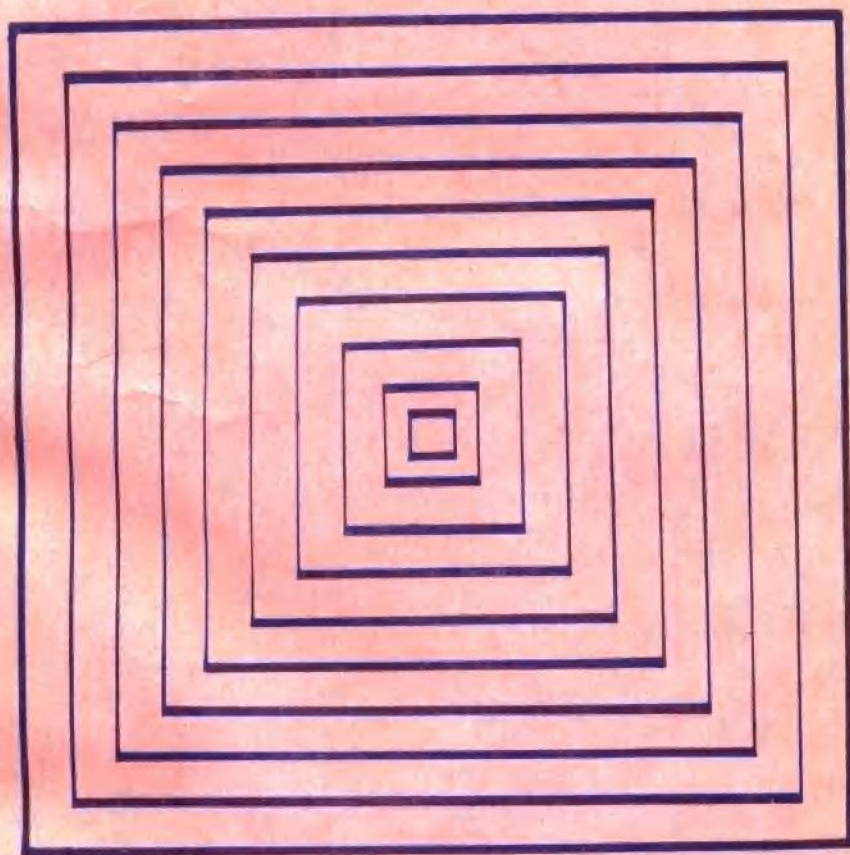


工程数学中的专门方法

[英] A·C·巴杰佩

L·R·穆斯托伊 D·瓦克尔 著



机械工业出版社

Specialist Techniques In
Engineering Mathematics

A.C.BAJPAI

L.R.MUSTOE

D.WALKER

John Wiley & Sons

1980

*

工程数学中的专门方法

A·C·巴杰佩

〔英〕 L·R·穆斯托伊 著

D·瓦克尔

裴君培 陈 虎 译
刘惠文 申 庚

*

机械工业出版社出版 (北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业登记证出字第 117 号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ ·印张 $12^{1/2}$ ·字数 329 千字

1986年1月北京第一版·1986年1月北京第一次印刷

印数 0,001—4,740·定价 3.60 元

*

统一书号: 15033·6094

译 者 序

本书原著是作者们所著工程数学第三部，其所含内容可作为一般工程数学教科书的扩充，故译出以供读者学习参考与应用。全书共九章，由陈虎、刘惠文、申庚、裴君培译出，最后由裴君培审校。在审校过程中，曾得到刘家沛同志的帮助，特此致谢。

原书中被发现的错误已予更正，不再另加注明。

限于译者水平，错误与不妥之处在所难免，敬希读者予以指正。

译 者

1984年7月

前 言

本书是特为工程师和科学工作者编写的一套丛书的第三卷。前两卷“工程数学”与“高等工程数学”是由相同的作者编写的。得到了英国国内外的赞许。它们是分别为大学一年级与二年级学生编写的。本卷则是面向国内外大学、学院中学习科学与工程的学生和研究生。如果读者已熟悉工程数学与高等工程数学这两卷的内容，那将是有帮助的。这第三卷自成体系，通过别的途径已具有预备知识的学生可以阅读。

本书的书名说明其所包括的论题是对个别学生只有某些需要的专门方法。它们是近年来用得越来越多的课题，也是研究工程与科学的新的分支所需要的。编写本教材的指导思想是给这些高级课题一个易读的概论。并不企图使每个课题包括得很全面，而是给读者一个好的基础能够继续研究每个课题中更为高级的内容。

开始研究工作的大学毕业年级和已毕业的学生将在这样的教程中得到好处。就我们的经验而言，在阅读标准教程之前，需要一些实实在在的了解，因为这些标准教程对没有经验的学生常常难于掌握。

对于从这一观点来探讨材料，我们不作辩解。举例来说，我们并不企望读者读了关于有限元的章节就会成为有限元方法的专家，但只希望他（或她）对此方法包含些什么有一个了解。

第一到第四章要按顺序学习，但其他的章都各自成章而不依赖前面各章的材料。参考书和参考文献将引导读者通晓所有章节。在本教程中，我们早先的著作“高等工程数学”（Advanced Engineering Mathematics）简写为A. E. M. 在可能的地方给出已解出的例题，并在大多数节末提供习题，它们是用来阐明理论及其应用的，在书末给出大部分习题的答案。

著者相信，包含有基本原理的证明是必要的，并试着在整个教程中保持严格性与应用的均衡。

（以下致谢部分从略。——译者注）

目 录

第一章 系统引论	1
1.1 引言	1
1.2 系统模型的几个例子	2
1.3 控制的概念	8
1.4 状态空间	13
1.5 复习例题	21
第二章 线性系统	25
2.1 引言	25
2.2 状态空间方程式的拉普拉斯变换解	25
2.3 基本定理	30
2.4 时不变方程式	37
2.5 简化成正则形式	51
2.6 状态空间方法与经典方法的比较	63
2.7 时不变系统的可控性和可观察性	66
2.8 线性反馈	75
2.9 离散系统	76
第三章 系统稳定性	80
3.1 引言	80
3.2 相平面图	81
3.3 稳定性的定义	94
3.4 常系数线性系统的判据	98
3.5 李雅普诺夫稳定性定理	104
3.6 李雅普诺夫函数的构造	113
3.7 离散系统	123
3.8 稳定性和控制	123
第四章 最优控制引论	126
4.1 引言	126
4.2 变分法简述	128
4.3 变分法的进一步研究	137

4.4	庞特里雅金极大原理	143
4.5	动态规划: 离散问题	151
4.6	动态规划: 连续情况	160
4.7	具有二次形式性能指标的线性系统 (LQP控制)	161
第五章 随机过程		168
5.1	引言	168
5.2	随机过程的描述	170
5.3	平稳和各态历经过程	176
5.4	功率谱密度	183
5.5	自相关函数的进一步讨论	189
5.6	高斯过程	193
5.7	随机过程通过线性系统	194
5.8	离散参数过程	198
第六章 笛卡尔张量		202
6.1	引言	202
6.2	笛卡尔坐标系的变换与变换矩阵	203
6.3	标量与向量	206
6.4	二阶张量	213
6.5	高阶张量	228
6.6	笛卡尔张量微积分	232
6.7	笛卡尔张量的应用	234
第七章 有限元法		244
7.1	引言	244
7.2	有限元法的综合观点	245
7.3	实例研究	249
7.4	单元及其性质的确定	254
7.5	插值函数的选择	265
7.6	方法中更深入的步骤	269
7.7	进一步情形的研究——输入和输出的实例	276
7.8	方法的推广	287
第八章 试验设计		290
8.1	概述	290

8.2	单因素试验、完全随机设计	293
8.3	随机分块设计	304
8.4	拉丁方格设计	312
8.5	因素设计引论	315
8.6	2^n 因素试验	329
8.7	随机分块设计的因素试验	336
8.8	补充	340
第九章 泛函分析		343
9.1	引言	343
9.2	度量空间	343
9.3	收敛性与完备性	348
9.4	收缩映射及其应用	350
9.5	线性赋范空间	360
9.6	线性算子	366
9.7	进一步的论述	370
附录 A 矩阵函数		373
附录 B 统计用表		377
参考文献		380
答案		382

第一章 系统引论

1.1 引言

“系统”一词是日常词汇的组成成分，可是它的广泛的使用意味着在试图以数学方式模拟和预计系统的行为时受到障碍。能否期望有处理工程系统，生物系统和经济系统的理论呢？本书集中讨论工程系统，但许多结论有普遍的用途。目前我们称系统是彼此有关系的事物的总体，特定的输入使它产生特定的输出。这是一个直观的叙述。工程系统可以是很大规模的：例如一个化工厂，或是一个水库网，而对系统行为的了解则是很重要的。为了有助于了解，需要数学模型。

以某种方式能够控制系统的行为，使得例如说维持或接近于维持所需的输出不变，是一个很自然的要求。因此本书中论及系统的许多地方是与控制有关的，虽然在讨论的最初阶段并不总是需要对控制作严谨的论述。

有时系统是离散的，它所采用的状态的数目是有限的。例如交通灯，一个循环经历四个状态：红灯与琥珀灯，绿灯，琥珀灯，红灯。用**状态**一词作为对系统行为的描述。在此例中，就说系统由一个状态到下一个状态有一个跃迁。一般地说，离散系统是以有限差分方程为模型，而连续的系统常是以微分方程为模型。由于很多系统是采样-数据系统，即测量是在特定时刻进行的，它们或许就不是真正连续的。单摆的振动可作为一个例子。从一个状态到下一个状态的过渡是连续的；可以用摆的位置和速度来确定系统的状态，因为它们和系统的支配方程（二阶微分方程）一起足可确定以后任一时刻的状态。

我们已提及的是**确定性系统**的两个例子。若有不确定的因素

介入，则讨论的是**或然系统**，我们用**概率模型**来估算未知常数，并且用**随机过程理论**来描述那些行为为未知的时变变量。在交通灯的例子中，系统的状态是由一条或几条通向交叉路口的道路的交通容量而改变的，而这容量是不可预计的。

系统的**控制**的概念是很多人所熟知的：热电偶控制中心热系统，开关控制电灯是闭合或是断开。有几类控制在 1.3 节中加以考察。

系统的**稳定性**显然是重要的。设处于稳态的系统受到小的扰动，至为重要的是这扰动要衰减掉。引入控制，不稳定的系统可以成为稳定的。在第三章中讨论稳定性。

很重要的一类系统是**线性系统**。系统被称为是线性的，如果输入 x_1 产生输出 y_1 ，输入 x_2 产生输出 y_2 ，则输入 $(\alpha x_1 + \beta x_2)$ 就产生输出 $(\alpha y_1 + \beta y_2)$ ，这里的 α 与 β 是标量。线性系统可以详细地分析。由于它们具有与非线性系统共同的特性(例如，稳态、暂态、稳定性)，它们的定量的分析使得有可能定性地了解类似的非线性系统。

第四章简要的考察**最优控制理论**。假定在控制下的系统性能的基本方面可以用称为**性能判据**的一个数来量度，于是系统的设计就与选择一个使性能判据最优化的控制有关了。

1.2 系统模型的几个例子

现在我们考察四个工程系统的例子以阐明系统理论的基本特征以及模型化的过程。

(i) 热系统

图1.1是一个简单炉子的示意图。设炉外空气的温度为 T_0 ，炉壁的均匀温度为 T_1 ，炉内的温度为 T_2 。来自加热线圈的输入电流 u 可以改变内部温度。

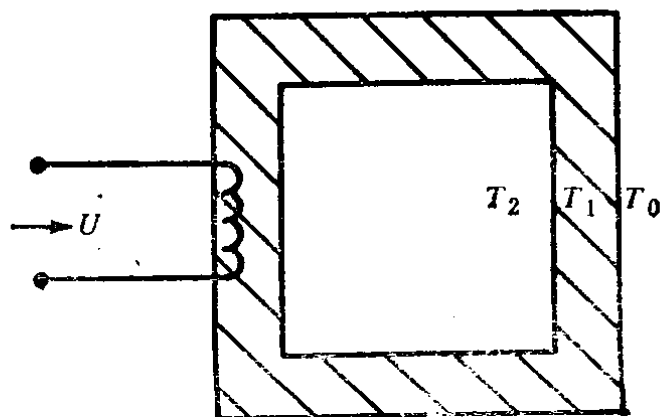


图 1.1

令外套与内套表面积分别为 A_0 与 A_2 ，表面的热传导系数分别为 h_0 与 h_2 ，炉内空间与炉壁的热容量分别为 C_2 与 C_1 。我们假设各个区域温度是均匀的，且温度的变化是瞬时分布的。进一步假设表面的热损失率与表面积以及其与周围环境的温度差成正比（如果你的工程专业是从事热传导的课题，你就能正确地判断这些假设，如果不是，你只好从字面上接受它们）。

现在建立两个热平衡方程。

(a) 对于炉壁，考虑热传导率，导致

$$C_1 \dot{T}_1 = -A_0 h_0 (T_1 - T_0) + A_2 h_2 (T_2 - T_1) + u \quad (1.1)$$

(b) 对于炉内

$$C_2 \dot{T}_2 = A_2 h_2 (T_1 - T_2) \quad (1.2)$$

炉外

$$\dot{T}_0 = 0 \quad (1.3)$$

符号上一个圆点·表示其时间导数。

(ii) 液动系统

研究图 1.2 中所绘系统。系统的目的是不管外流出量 Q 的变化如何，尽可能地保持第二水箱的水头 H_2 接近常数。用这样的方法，即使需求发生了变化仍保持等压供给。

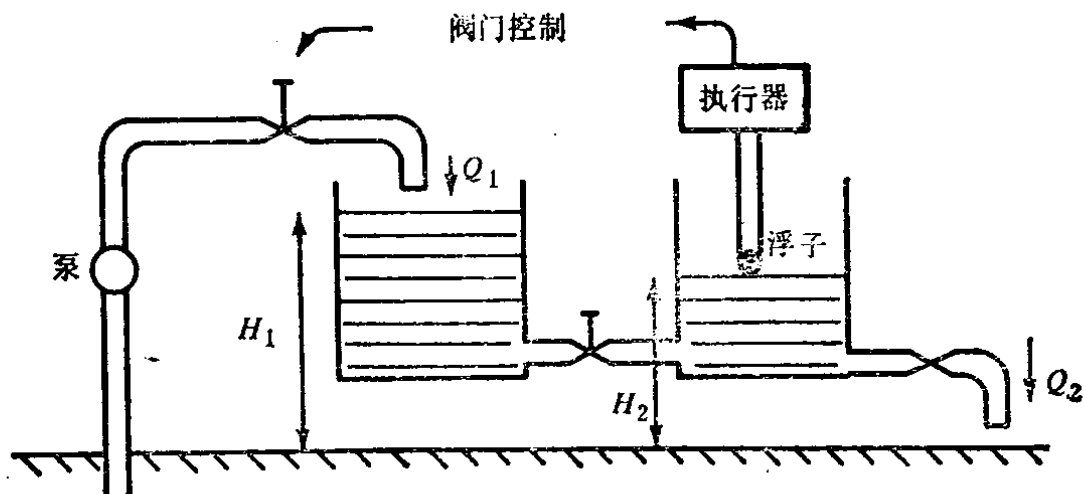


图 1.2

第二水箱由水头为 $h_1(t)$ 的第一水箱供水。当需用量 Q_2 增加时，第二水箱的水面下降。于是浮子将这一信息传给执行器，它是把信息转变成使更多的水进入第二水箱的作用的装置。在此

例中，执行器操作一个阀使更多的水进入第一水箱，并且由于此作用使得第一水箱有更高的水头，流入第二水箱的流量率就增大了。这里没有考虑执行器是怎样操作的。

目标是保持水头 H_2 尽可能地接近某一指定的常值 \bar{H}_2 。若在某时刻， $Q_2 > Q_1$ ，则必须增大 Q_1 ，因此输入改变了一个量 u ，这里 u 是一个控制变量（每秒的水容积），当 $H_2 < \bar{H}_2$ 时，它为正，当 $H_2 > \bar{H}_2$ 时，它为负。假设流入第二水箱的是 $K_2(H_1 - H_2)^{1/2}$ ， K_2 是对于第一水箱的一个常数，以及 $Q_2 = K_3 H_2^{1/2}$ ， K_3 是对于第二水箱的一个常数。

现在来研究每个水箱中水的容积变化率。令第一水箱的不变截面面积为 A_1 ，第二水箱的是 A_2 。

对第一水箱，利用流动的连续性，得出

$$A_1 \frac{dH_1}{dt} = Q_1 - K_2(H_1 - H_2)^{1/2} \quad (1.4)$$

对第二水箱

$$A_2 \frac{dH_2}{dt} = K_2(H_1 - H_2)^{1/2} - Q_2 \quad (1.5)$$

在此，稳定性的意思是什么呢？考虑 $Q_2 = Q$ 为常量（从而 Q_1 也是如此）， $H_2 = \bar{H}_2$ ，以及 $H_1 = \bar{H}_1$ 也是常数的情况，则另一状态可视为对此状态的扰动。由此可知在稳态时 $u = 0$ 。令 $Q_1 = Q + u$ ， $Q_2 = Q + q_2$ ， $H_1 = \bar{H}_1 + h_1$ ， $H_2 = \bar{H}_2 + h_2$ 。

则由于按定义 $\frac{d\bar{H}_1}{dt} = 0$ ，(1.4) 式成为

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q + u - K_2(\bar{H}_1 + h_1 - \bar{H}_2 - h_2)^{1/2} \quad (1.6)$$

现在， $(\bar{H}_1 + h_1 - \bar{H}_2 - h_2)^{1/2} = (\bar{H}_1 - \bar{H}_2)^{1/2} \left[1 + \frac{(h_1 - h_2)}{(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)} \right]^{1/2}$
 $\approx (\bar{H}_1 - \bar{H}_2)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(h_1 - h_2)}{(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)} \right]$

设扰动是微小的。

再有，(1.4) 式的稳态情况为

$$0 = A_1 \frac{d\bar{H}_1}{dt} = Q - K_2(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)^{1/2}$$

于是(1.6)式化为

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = u - \frac{K_2(h_1 - h_2)}{2(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)^{1/2}} \quad (1.7)$$

类似地, (1.5)式的稳态情况是

$$0 = A_2 \frac{d\bar{H}_2}{dt} = K_2(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)^{1/2} - Q$$

且(1.5)式成为

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{K_2(h_1 - h_2)}{2(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)^{1/2}} - q_2 \quad (1.8)$$

值得指出(1.7)与(1.8)式是线性的, 因而对系统进行分析现在就很容易了。当其稳态(或平衡状态)受扰时, 就是稳定性问题了。

(iii) 机电系统

图 1.3 是一系统的示意图, 此系统中有一直流电动机在固定场中旋转。电动机驱动一惯性为 J 受有粘性阻尼的负载。令 e_a 为电枢电压, e_b 是产生的反电动势, i_a 是电动机的电枢电流, 而 i_f 是固定场中的电流。 R 与 L 分别是电枢的电阻与电感, B 是粘性阻尼系数, 而 θ 是负载转过的角度。假设 (i) 输出转矩为 $K_t i_a$, K_t 是常数, (ii) 反电动势 $e_b = K_g \dot{\theta}$, K_g 是常数。(如有可能, 请在物理基础上证实这些假设。)系统的支配方程为

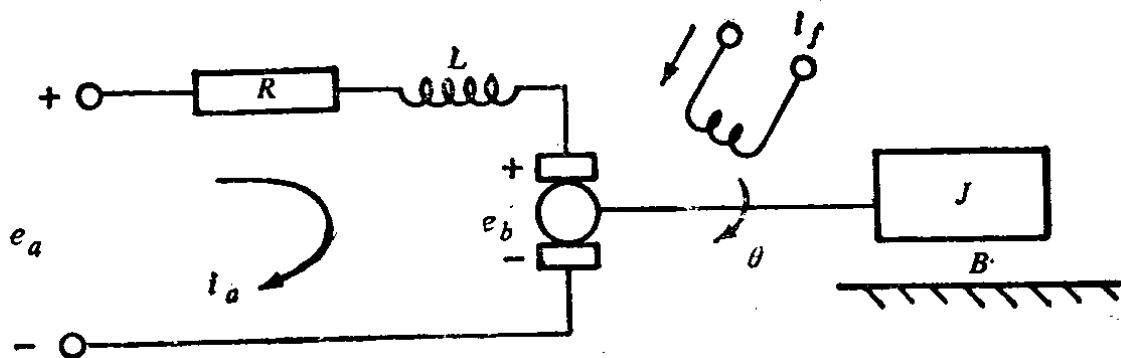


图 1.3

(a) 牛顿运动定律:

$$J\ddot{\theta} = -B\dot{\theta} + K_i i_a \quad (1.9)$$

(b) 基尔希荷夫(Kirchhoff)定律:

$$L \frac{di_a}{dt} + Ri_a + e_b = e_a \quad (1.10)$$

为了控制的目的, 设 i_f 不变且需要选取供给的电动势 e_a 以使得产生所要求的角度 θ (炮塔的控制就是一例)。为了简化, 写成 $e_a = u$, $f_1 = -B/J$, $f_2 = K_i/J$, $f_3 = -K_g/L$, $f_4 = -R/L$, $C = 1/L$ 使得(1.9)式与(1.10)式分别成为

$$\ddot{\theta} = f_1 \dot{\theta} + f_2 i_a \quad (1.11)$$

$$\frac{di_a}{dt} = f_3 \dot{\theta} + f_4 i_a + Cu \quad (1.12)$$

(iv) 逆摆 (Inverted pendulum)

图 1.4 所示为一质量为 m , 长 $2l$ 的均匀杆 AB 光滑的铰接于质量为 M 的小车顶部 A 点, 小车在直线上自由地运动。当小车在光滑的轨道上运动时, 而摆则在铅直平面内下落, 此铅直平面包含着表示小车质心运动方向的向量(即纸平面)。令小车质心距起始点的距离为 $x(t)$ 。杆 AB 与铅直线所成夹角为 $\theta(t)$ 。

在 $\theta = 0$ 处, 系统显然是不稳定平衡。问题是确定力 $u(t)$, 此力作用于小车(质心)以保持杆在铅直位置。(实际的应用是控制在推力台上火箭的位置。)

图 1.5 中画出了作用于杆的力。

分解到铅直方向,

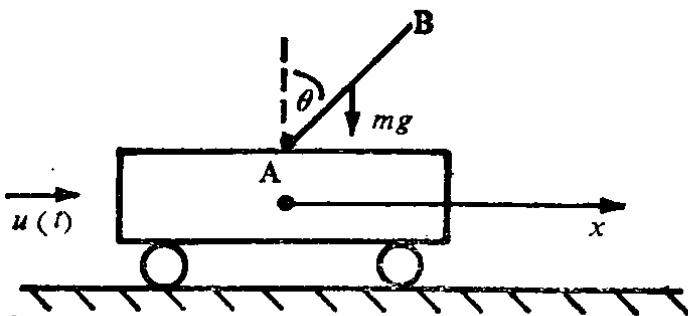


图 1.4

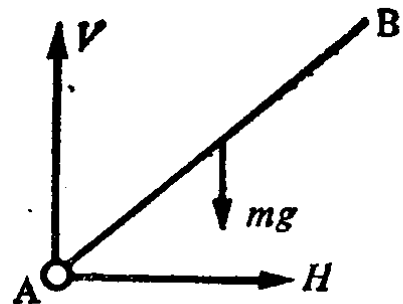


图 1.5

$$V - mg = m \frac{d^2(l \cos \theta)}{dt^2} \quad (1.13)$$

分解到水平方向,

$$H = m \frac{d^2(x + l \sin \theta)}{dt^2} \quad (1.14)$$

对杆的质心取矩,

$$I\ddot{\theta} = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} = V l \sin \theta - H l \cos \theta \quad (1.15)$$

对小车的质心

$$u - H = M\ddot{x} \quad (1.16)$$

共有四个未知量—— V , H , θ 与 x ——而需求的是后两个量的解。

消除 V 与 H , 得出

$$(m + M)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = u \quad (1.17)$$

$$\cos \theta \ddot{x} + \frac{4}{3}l\ddot{\theta} = g \sin \theta \quad (1.18)$$

假设 θ 很小, 因而 $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, 将方程线性化。略去 $\dot{\theta}^2 \theta$ 项, 因为它是高阶小量。这实际可以证实。于是得到

$$(m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (1.19)$$

$$\ddot{x} + \frac{4}{3}l\ddot{\theta} = g\theta \quad (1.20)$$

最后, 消除 \ddot{x} 并求得

$$\frac{l}{3}(m + 4M)\ddot{\theta} - (m + M)g\theta = -u \quad (1.21)$$

除非控制力 $u(t)$ 的性质为已知, 不然我们就不能再进行下去了。在下节中较为细致地讨论控制的概念。

习 题

1. 人造卫星绕其对称轴旋转。卫星在时刻 t 的角位置由 $\phi(t)$ 给出, 卫星对其对称轴的惯性矩为 J 。利用喷气可作用一变转矩 $\mu(t)$; 这是系统的输入变量。设无摩擦。试证系统的微分方程为

$$\phi = \frac{1}{J} \mu(t)$$

2. 溶液箱由时变率为 $F_1(t)$ 与 $F_2(t)$ 的两个注入流来充灌, 注入的溶液含有溶解物质的浓度不变, 分别是 c_1 和 c_2 。经均匀搅拌, 使得以 $F(t)$ 流出的溶液的浓度等于箱内的浓度 $c(t)$ 。令 $V(t)$ 为箱内流体的体积, S 为箱的不变横截面积。则

$$F(t) = k \left[\frac{V(t)}{S} \right]^{1/2}$$

其中 k 是实验确定的常数。

令稳态条件由 F_{10} , F_{20} , F_0 , V_0 与 c_0 确定。假设只出现对稳态的微小偏差, 并且 $F_1(t) = F_{10} + \mu_1(t)$, $F_2(t) = F_{20} + \mu_2(t)$, $V(t) = V_0 + x_1(t)$, $c(t) = c_0 + x_2(t)$ 。

首先建立溶液箱的质量平衡方程, 然后得出 3 个稳态方程, 再导出用“输入变量”表示的 x_1 与 x_2 的方程。

1.3 控制的概念

控制系统的基本分类是: 将系统分成是开环的与闭环的。

开环系统, 其控制的操作不考虑系统的状态。例如, 那些按照预定方式变化的交通灯。见图 1.6 a)。

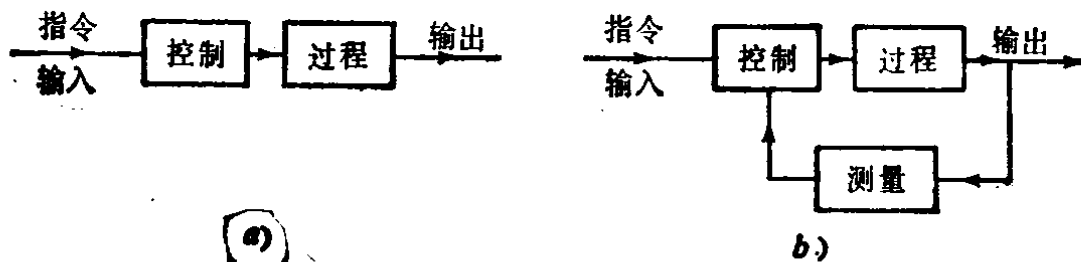


图 1.6

但若系统的状态有某些**反馈**于控制, 使得控制按照系统状态来操作, 则系统称为是**闭环**的。见图 1.6 b)。前节中的液动系统就是闭环系统的例子。

控制的目的是产生一个所要求的系统响应。控制形式的选取依赖于系统的性质, 输出所需的精度, 以及所考虑的每个控制的执行的费用和难易。

有时，控制可以是**手动的**：观察者注意量测并据此调整系统的某个元件。显然这是一个闭环系统，如果操作者是在特定的（通常是等距的）时间间隔进行观测，它常被称为**样本数据系统**。控制常常是**自动的**，且量测的结果被转换为变更系统的信号。有一类特殊的自动控制系统就是**伺服机构**，其输出信号被保持与给定的参考的输入信号尽可能地接近。如果参考信号是不变的，系统就称为**调节器**。液动系统是一个伺服机构，由于要求水头 H_2 保持不变，故系统确是一调节器。

控制的种类

描述这些控制的物理元件并不是我们的意图，可参见参考文献。

(i) 开关控制

唯一的控制是把一个装置拨到闭合或断开位置。例如，中心加热锅炉的时间开关。为使控制真正有效，需预知控制下的系统状态。

(ii) 比例控制

量测了所要求的输出与实际输出的误差并按与此误差成比例地进行调整。对于液动系统，这意思就是“额外”的输入 u 是由 $u = K_1(\bar{H}_2 - H_2) = -K_1 h_2$ 给定的，这里 K_1 是常数。因此若水头 H_2 小于所要求的值 \bar{H}_2 ，就提供一个超过稳态值 Q 的输入。若 H_2 超过 \bar{H}_2 ，输入就减小而低于值 Q 。然而，虽说设计这样一个控制装置相当简单，但误差一比例并不总是良好的控制方案。在此例中，把液体调节到新的所要求的水平，以及将此水平立即传递给控制，显然有时间的延迟。

(iii) 导数控制

为提供一个预计所要求的变化的方法，可以设计一个控制，它产生一个与输出的导数成比例的输入。为了看清这一形式的控制的好处，假设有一个突然增大的需要量，它使得水头 H_2 很快下降。此信息将反馈于控制以增大输入；然而，增大输入真正见效需要时间，由于这段时间，需要量可能已经降到稳态水平之下

了，而系统已经开始超额补偿了。不难想象，若需要量在其平均值上下波动，则与要求修正的作用恰好相反的情况就可能发生。水头的振荡就会逐步变大(猎振现象)，不稳定性就会自己显示出来。如果计入水头 H_2 的变化率，则消除振动产生的可能性是可以做到的。

(iv) 比例加导数控制 (PPD)

在实践中一般就是控制 (ii) 与 (iii) 的组合。

(v) 积分控制

在这种控制中，误差信号被积分，或者，在样本数据系统的情况下是被累加起来了。所作的修正与积分或总和成比例。所有液动系统都采用积分控制，有时甚至达到并不希望的程度。到此，只涉及稳态误差，积分控制是优于导数控制。对于调整过渡过程，导数控制常常是比较好的。有时必须采用这两种控制形式。

正反馈与负反馈

如果(在放大之前)从输入信号减掉量测信号，则这种方案称为负反馈。见图1.7。

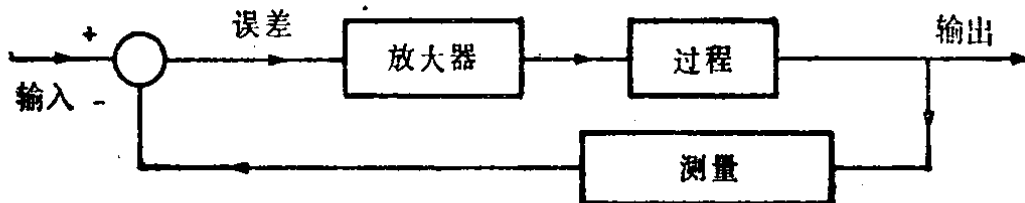


图 1.7

在前节的机电系统中，可以期望用给定的角速度来驱动电机。如果我们量测输出角速度并将误差信号反馈，并且改变电枢的电压 e_a 。(与转矩成比例)，将结果放大，则可使电动机按要求减慢或加快。若不是从所需值减去输出而是加上它，则得正反馈。这将导致不稳定，因为误差被放大了。

迄今尚未考虑系统的外扰动，而这很清楚，正反馈将仅是使扰动增大，而负反馈可能会把它衰减掉。