同伦论基础

廖山涛　刘旺金著

北京大学出版社

內 容 简 介

本书是代数拓扑中同伦论的基础。全书共分六章。包括：同伦羣，同伦羣的若干性质，阻碍类理论，纖维空间，谱叙列在纖维空间的应用。本书适于高等学校拓扑，几何等专业的师生、研究生，从事网络理论、近代物理等研究工作人员阅读、参考。

同 伦 论 基 础

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

850×1168毫米32开本9印张　215000字

1980年12月第一版　1980年12月第一次印刷

印数：10000册

统一书号：13209·2　平装定价：1,35元

序　言

代数拓扑是拓扑学的重要分支．它的特征是借助于一系列的代数的对象、方法，如群、环、同态等，进行研究拓扑空间在连续形变下的不变性质．

同调论、同伦论都是代数拓扑的基础．它们自本世纪形成以来（同伦论形成较晚），在数学各分支中的作用早已呈现出来，不仅表现在与微分方程、泛函分析、代数、微分几何、大范围分析等联系密切，甚至像电路网络、衍架分析等学科中也找到它们的应用．

这书基本上是一本教材．作者廖山涛于六十年代曾在北京大学多次讲授“同伦论”一课，本书的基本内容就是根据课程(1961—1962学年)的讲稿由作者刘旺金补充整理而成的．十几年来，代数拓扑的发展甚为迅速，内容和方法已有不少更新．然而，我们认为，本书的内容一方面可供初次接触过代数拓扑的或不准备专门研究同伦论的读者阅读；同时，也可以作学习更深一步的现代同伦论的阶梯，因此仍不失为同伦论的一个初步介绍．它对于阅读过江泽涵教授所著“拓扑学引论”一书的读者，当不会有多大的困难．

同伦论之所以得以兴旺发展，首先应归功于 W. Hurewicz 1935 年引进同伦群．稍迟，S. Eilenberg 用同伦群引进关于映射扩充的阻碍类．多少年来，同伦论实质上始终沿着同伦群及阻碍类的有效计算问题，及由此产生的同伦不变量的内在联系，以及它们的进一步引伸和应用等，而进行工作，尽管表面上看来有时不甚明显．这大部份因为，为了解决老的问题而产生新的理论和

工具，而这些新的理论和工具本身既饶有意义又有待于进一步研究。

正因为这原故，本书作为一介绍性读本，就直截了当地尽快先介绍同伦群和阻碍类。这办法是遵循历史上自然发展过程的，或者说是传统的。为了解决同伦论如上述的早期注意的问题所产生的理论和工具中，对后来最有广泛影响的，无疑地要推 J.-P. Serre 应用 J. Leray 谱理论于纤维空间来计算同伦群。因此，紧接着阻碍类论之后，我们介绍了纤维空间和谱叙列，进而择要介绍Serre 的工作。

在1961—1962学年我们进行同伦论课程时，已有内容相当丰富的、胡世桢写的“*Homotopy Theory*”，我们曾经借鉴过。后来在国内受到注意的又有E.H.Spanier著的“*Algebraic Topology*”及 R.M.Switzer 著的“*Algebraic Topology—homotopy and homology*”两本关于同伦论的书，内容尤其丰富。前者几乎一切从函子观点出发，不同于我们直截引进的办法；后者总结一部份重要而深刻的新成果，写得十分浓缩。这些书实际上都很难在一学年这样短的课程内全部介绍完，除非听众已有良好的基础。本书则要求在较短的时间内介绍同伦论这数学分支的要旨。这些年来，这分支内容虽已大大增添，然而要旨未变，这就是本书仍不失为同伦论的一个适宜的初步介绍的原因。

本书共分六章，每章之前都有内容提要。在提要和正文中还经常提到有关材料来源的文献。提到这些文献的目的仅仅是要引导读者习惯于查看图书资料，但决不能草率地认为这就是在表明同伦论历史上的重要进展过程。细心的读者当会逐渐明白，有的同伦论科研工作在当时受到主要的注意，后来又产生大的影响，但在本书中甚至还没有涉及到。考虑到教学的需要，本书在每章末选择了部份练习题。如果由于课程较紧或为非拓扑专业开设时，可删去第五、六章的内容。

本书的叙述、安排及内容肯定会有许多不妥之处，恳切盼望

数学界的专家及各位读者提出宝贵意见。

最后，说明书中采用的记号。如“ 】”表示一个定理、命题或推论的证明完毕，或证明显明，或此处不给出证明。“定理1.5”表示同一章中的1.5定理，而“定理Ⅱ.1.2”或“定理B.1.2”则分别表示第二章或附录B中的1.2定理。正文中简单而类似的推理有时省去，留给读者自己补出，在省去的地方往往紧接着在一括号内写有“复习题”字样。书末附有参考书目及部分文献目录、索引等。

廖山涛（北京大学）

刘旺金（四川师范学院）

1980年2月

《北京大学数学丛书》编委会

说　　明

此丛书是以数学、計算数学、应用数学、概率统計及有关各专业的高年级、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物。丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期三学时研究生课程的取材。我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，也为提高本科生的教学质量贡献一份力量。

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考。

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

目　录

第一章　同　伦　群

第二章　同伦群的若干性质

第三章　阻碍类理论

第四章 纤 维 空 间

第五章 谱叙列的代数理论

第六章 谱叙列在纤维空间的应用

第一章　同　伦　群

〔内容提要〕

拓扑空间是最基本的拓扑概念，群是基本的代数概念。本章对任意正整数 n，当给定拓扑空间 X 的某一基点 $x_0 \in X$ 时联系一群 $\pi_n(X,x_0)$，称为 X 在 x_0 处的第 n 个同伦群（§2，§3）。同伦群最初是1935年W. Hurewicz 引入并加以讨论的〔23〕；当 $n=1$ 时，即是早期由H. Poincaré 提出的基本群。基点的改变对同伦群的影响在§4中得到论证，从而说明，路径连通空间 X 在任一基点的同伦群是同构的。对于拓扑空间偶 (X,A)，当 $n\geqslant 2$，相应地有相对同伦群 $\pi_n(X,A,x_0)$ 的概念（§5）。并于§6证明，同伦群（相对同伦群）是空间（空间偶）的伦型不变量。

与同调论类似，拓扑空间 X 及其子空间 A，由同论群 $\pi_n(X,x_0)$，$\pi_n(A,x_0)$，$\pi_n(X,A,x_0)$ 等组成的正合叙列在同伦论中是重要的，§7中将作叙述。

§1中关于映射的同伦、空间的伦型等概念是本章及全书必需的预备知识。

§1　预备

设 X 与 Y 是拓扑空间，连续函数 $f:X\to Y$ 以后称为映射。设 X' 与 X'' 是 X 的子空间，Y' 与 Y'' 是 Y 的子空间，如果映射 $f:X\to Y$ 适合 $f(X')\subseteq Y'$，$f(X'')\subseteq Y''$，则记 $f:(X,X',X'')\to(Y,Y',Y'')$。

以后，I 总表示实直线上的闭线节 $[0,1]$。

定义1.1　设 f 与 $f':(X,X',X'')\to(Y,Y',Y'')$ 是两个映射。如果存在映射 $F:(X\times I,X'\times I,X''\times I)\to(Y,Y',Y'')$，

使 $F(x,0)=f(x)$，$F(x,1)=f'(x)$ 对任意 $x\in X$ 成立，则称 f 与 f' 相对于 (X',X'')，(Y',Y'') 来说是同伦的，并记作

$$f\simeq f':(X,X',X'')\to(Y,Y',Y'').$$

在不产生误解的情况下，简记 $f\simeq f'$。

此时映射 F 称为从 f 到 f' 的**同伦**或伦移，记为 $F:f\simeq f'$。

附记1. 当 X',X'',Y',Y'' 都是空集时，即通常所指的(绝对)同伦，记为 $f\simeq f':X\to Y$。

当 $X''=X'$，$Y''=Y'$ 时，记为 $f\simeq f':(X,X')\to(Y,Y')$。特别地，伦移 F 在子集 X' 上保持不动，即适合 $F(x,t)=f(x)$，对任意 $x\in X'$，$t\in I$，则记 $f\simeq f'\operatorname{rel}X'$。

附记2. 映射 f 与 f' 同伦有明显的几何直观，即连接 f 至 f' 有一连续形变。事实上，对于 $(x,t)\in X\times I$，我们可以把 t 理解为时间，则 $f_t(x)=F(x,t)$ 定义了一族映射 $f_t:X\to Y$。对于 $t\in I$，$f_t(X)$ 表示在时刻 t，X 在 Y 中的像。特别地，$t=0$ 时为映射 f，$t=1$ 时为映射 f'；而 $f_t(x)$ 同时连续地依赖于点 $x\in X$ 及时间 $t\in I$。这种表示同伦的方法今后常用。

注意，定义 1.1 要求对任意 $t\in I$，$f_t(X')\subseteq Y'$，$f_t(X'')\subseteq Y''$。

下面是映射(绝对)同伦的例子：

例1.1 设 $X=Y=E^n$ (n 维欧氏空间)。记 $i:E^n\to E^n$ 是恒同映射；$c:E^n\to E^n$ 是常值映射，对任意 $x\in E^n$，$c(x)=0$，则 $i\simeq c$。因为由 $F(x,t)=(1-t)x$ 定义的映射 $F:E^n\times I\to E^n$，使 $F:i\simeq c$。几何上，映射 F 即是将 E^n 缩成为一点0。

例1.2 设 X 是任意拓扑空间，Y 是 E^n 的凸子集。对于映射 f 与 $f':X\to Y$，命 $F(x,t)=(1-t)f(x)+tf'(x)$，则 $F:X\times I\to Y$ 是连接 f 到 f' 的同伦。

例1.3 拓扑空间 Y 中连接点 y_0 至 y_1 的**路径**是一映射 $f:(I,(0),(1))\to(Y,y_0,y_1)$。$Y$ 中可用路径来连接的点偶

给出点偶间等价关系，因而Y分成一些**路径连通分支**，使得点y_0及y_1属于同一分支，当且仅当有路径连y_0至y_1。若Y只包含这样的一个分支，则称Y是**路径连通的**。

取$X=\{x_0\}$是由一点构成的拓扑空间，则拓扑空间Y是路径连通的，当且仅当任意两个映射f与$f':\{x_0\}\to Y$都是同伦的(显然)。

记Y^X是从拓扑空间X到拓扑空间Y的一切映射的集合，X',X'',Y',Y''如前。

命$(Y,Y',Y'')^{(X,X',X'')}=\{f\in Y^X|\, f(X')\subseteq Y',\ f(X'')\subseteq Y''\}$为$Y^X$的子集。自然，当$X',X'',Y',Y''$都是空集时，即为$Y^X$自身。

命题1.1　在集合$(Y,Y',Y'')^{(X,X',X'')}$中，映射的同伦关系"$\simeq$"是等价关系，即对任意$f,f',f''\in(Y,Y',Y'')^{(X,X',X'')}$，有

（1）$f\simeq f$；

（2）如果$f\simeq f'$，则$f'\simeq f$；

（3）如果$f\simeq f'$，$f'\simeq f''$，则$f\simeq f''$。

证明　（1）命$F(x,t)=f(x)$，易见F是f到自身的同伦；

（2）假设F是连接f至f'的同伦。易见，由$F'(x,t)=F(x,1-t)$给出的映射F'是连接f'至f的同伦；

（3）假设$F_1:f\simeq f'$，$F_2:f'\simeq f''$，即映射F_1与F_2: $(X\times I,X'\times I,X''\times I)\to(Y,Y',Y'')$，使得$F_1(x,0)=f(x)$，$F_1(x,1)=f'(x)=F_2(x,0)$，$F_2(x,1)=f''(x)$，其中$x\in X$。

命

$$F(x,t)=\begin{cases}F_1(x,2t), & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2},\\ F_2(x,2t-1), & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

知$F:(X\times I,X'\times I,X''\times I)\to(Y,Y',Y'')$,使得$F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=f''(x)$,其中$x\in X$（见图1.1）. 而F的连续性由下面的粘接引理即可得到，故$F:f\simeq f''$. 】

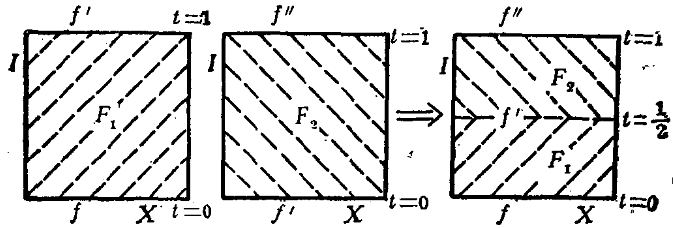

图 1.1

设X与Y是拓扑空间. X'为X的子空间，$g:X\to Y$为映射，记$g|X':X'\to Y$为g限制在X'上所得的部份映射. 设$X=X_1\cup X_2$，映射$f_i:X_i\to Y$，$i=1,2$，适合$f_1|X_1\cap X_2=f_2|X_1\cap X_2$。于是可定义单值对应$f:X\to Y$，使得

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in X_1,\\ f_2(x), & x\in X_2.\end{cases}$$

引理1.2（粘接引理） 设X_1与X_2是X的闭子集，则上述对应f是一个映射.

证明 设M是Y的任意闭子集，有

$$f^{-1}(M)=f^{-1}(M)\cap(X_1\cup X_2)=[f^{-1}(M)\cap X_1]$$
$$\cup[f^{-1}(M)\cap X_2]=f_1^{-1}(M)\cup f_2^{-1}(M).$$

根据f_1的连续性及X_1是X的闭子集，$f_1^{-1}(M)$在X_1中,因而在X中是闭集. 同理$f_2^{-1}(M)$是X的闭集，故$f^{-1}(M)$在X中亦为闭集. 】

推论1.3 设X,Y,X_1,X_2如引理1.2. 又设对映映f与$f':X\to Y$，有同伦$F_1:f|X_1\simeq f'|X_1,F_2:f|X_2\simeq f'|X_2$，且适合$F_1|(X_1\cap X_2)\times I=F_2|(X_1\cap X_2)\times I$. 则由式

$$F(x,t)=\begin{cases}F_1(x,t), & x\in X_1,\ t\in I,\\ F_2(x,t), & x\in X_2,\ t\in I\end{cases}$$

给出的映射$F:X\times I\to Y$是连接f到f'的同伦。（复习题）】

命题1.1表明，集合$(Y,Y',Y'')^{(X,X',X'')}$(特别地Y^X)按映射的同伦关系分成一些互不相交的等价类，其中每一类称为一个**同伦类**。

从例1.2看出，当Y是E^n凸集时，Y^X仅有一个同伦类。

命题1.4　设X,Y,Z是拓扑空间，X',X'',Y',Y''如前所述，Z'与Z''是Z的子空间。如果$f\simeq f':(X,X',X'')\to(Y,Y',Y'')$，$g\simeq g':(Y,Y',Y'')\to(Z,Z',Z'')$，则合成映射亦然，即$g\cdot f\simeq g'\cdot f':(X,X',X'')\to(Z,Z',Z'')$。

证明　由命题1.1中的（3），只须注意下述两点：

（1）如$F:f\simeq f'$，则$G=g\cdot F:g\cdot f\simeq g\cdot f'$；

（2）如$H:g\simeq g'$，则由$K(x,t)=H(f'(x),t)$给出连接$g\cdot f'$至$g'\cdot f'$的同伦$K:(X\times I,X'\times I,X''\times I)\to(Z,Z',Z'')$。】

命题表明，在合成映射中如果把其中的因子换成与之同伦的映射，其结果与原来的合成映射同伦。

定义1.2　拓扑空间X与Y称为**同伦等价的**(**具有相同伦型**)，如果存在映射$f:X\to Y$，及$g:Y\to X$，使得$g\cdot f\simeq 1_X:X\to X$，$f\cdot g\simeq 1_Y:Y\to Y$，这里$1_X$与$1_Y$分别表示$X$与$Y$上的恒同映射。

此时f称为从X到Y的一个同伦等价(映射)，g称为f的一个**同伦逆**(映射)，并记$f:X\simeq Y$，或简记$X\simeq Y$。

定理1.5　在全体拓扑空间这一集合中，同伦等价是一等价关系。

证明　由定义1.2，反身性、对称性明显。现在证明传递性。

设$f:X\simeq Y$，$h:Y\simeq Z$，而$g:Y\to X$，$k:Z\to Y$分别是f与h的同伦逆。根据命题1.4，知

$$(gk)(hf)\simeq g1_Yf=gf\simeq 1_X:X\to X,$$
$$(hf)(gk)\simeq h1_Xk=hk\simeq 1_Z:Z\to Z.$$

故 $hf:X\simeq Z$. 】

定理告诉我们，拓扑空间按同伦等价关系分成许多等价类。易见，同胚的空间具有相同的伦型；反之，具有相同伦型的空间不一定是同胚的。例如$X=E^n$，$Y=\{y_0\}$就是如此。（复习题）

现今代数拓扑中的许多内容都是讨论空间的**伦型不变性**，即具有相同伦型的空间的共同性质，比如多面体的同调群、上调环以及本章将讨论的同伦群等。

定义1.3 拓扑空间X称为**可缩**的，如果恒同映射$1_X:X\to X$同伦于某一个常值映射，即对某 $x_0\in X$, $c(X)=x_0$，有$1_X\simeq c$。此时亦称 1_X 零伦。

命题1.6 拓扑空间X是可缩的，当且仅当X与由一点组成的空间同伦型。

证明 设X是可缩的，有 $1_X\simeq c:X\to X$。记$f=c:X\to\{x_0\}$，$g:\{x_0\}\to X$，使得 $g(x_0)=x_0\in X$。则 $gf=c\simeq 1_X$, $fg=1_{\{x_0\}}$，故X与$\{x_0\}$同伦型。

反之，如X与$\{y_0\}$同伦型，有映射 $f:X\to\{y_0\}$，$g:\{y_0\}\to X$，使 $gf\simeq 1_X$，$fg\simeq 1_{\{y_0\}}$。记$x_0=g(y_0)$，$c:x\to\{x_0\}$是常值映射，则 $c=gf\simeq 1_X$。按定义1.3，X是可缩的。

命题说明，在伦型的意义下，可缩空间是最简单的拓扑空间。例如 E^n 等。

§2 同伦群

设X是拓扑空间。

$I^n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in E^n|\ 0\leqslant t_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\}$ 是n维方体，$n\geqslant 1$。特别地 $I^1=I$。①

① 我们认为，当 $n<m$，E^n是 E^m 的子空间，其中的点，后$(n-m)$个坐标值为零。

定义2.1 设映射 f 与 $g:I^n \to X$，适合 $f(1,t_2,\cdots,t_n)=g(0,t_2,\cdots,t_n)$。则由式

$$h(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases} f(2t_1,t_2,\cdots,t_n), & 0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2}, \\ g(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant 1 \end{cases}$$

给出映射 $h:I^n \to X$（根据引理1.2），记作 $h=f+g$（见图2.1）。

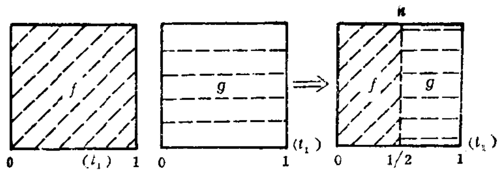

图 2.1

以下取定 $x_0\in X$，称为基点。

$\partial I^n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in I^n \mid \prod_{i=1}^{n} t_i(1-t_i)=0\}$是 I^n 的边界点集。

记 $M_n(X,x_0)=\{f\in X^{I^n} \mid f:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)\}$。

命 $\pi_n(X,x_0)$ 表示 $M_n(X,x_0)$ 中就映射的同伦关系 $f\simeq g:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$ 所分成的同伦类的集合。我们在 $\pi_n(X,x_0)$ 中引入运算“+”。

定义2.2 设 $\alpha=[f]$，$\beta=[g]\in\pi_n(X,x_0)$，其中 f 与 $g:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$ 是 α 与 β 的代表映射。命 $\alpha+\beta=[f+g]\in\pi_n(X,x_0)$，则“+”是 $\pi_n(X,x_0)$ 中的代数运算。

事实上，由于 f 与 $g\in M_n(X,x_0)$，易知 $f+g\in M_n(X,x_0)$。根据推论1.3，$\alpha+\beta$ 的定义与 α，β 的代表映射 f，g 的选取无关。（复习题）

定理2.1 $\pi_n(X,x_0)$就定义 2.2 中的运算"+"组成一个群，称为以x_0为基点X的第n个同伦群（或称n维同伦群）.

证明 验证:

（1）结合律的成立. 设f, g, $h\in M_n(X, x_0)$，则映射$p=(f+g)+h$, $q=f+(g+h)$分别由下式定义:

$$p(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}f(4t_1,t_2,\cdots,t_n), & 0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{4},\\ g(4t_1-1,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1}{4}\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2},\\ h(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant 1;\end{cases}$$

$$q(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}f(2t_1,t_2,\cdots,t_n), & 0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2},\\ g(4t_1-2,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant\frac{3}{4},\\ h(4t_1-3,t_2,\cdots,t_n), & \frac{3}{4}\leqslant t_1\leqslant 1\end{cases}$$

（见图2.2）.

记$l:I\to I$为映射，使

$$l(t)=\begin{cases}2t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{4},\\ t+\frac{1}{4}, & \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}(t+1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

知l将$\left[0,\frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},1\right]$分别线性变换至$\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$, $\left[\frac{3}{4},1\right]$上，且$l\simeq 1_I:(I,\partial I)\to(I,\partial I)$（见图2.3）.

命$r:I^n\to I^n$为映射，使得$r(t_1,t_2,\cdots,t_n)=(l(t_1),t_2,\cdots,t_n)$. 知$r\simeq 1_{I^n}:(I^n,\partial I^n)\to(I^n,\partial I^n)$. 于是$p=qr\simeq q:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$