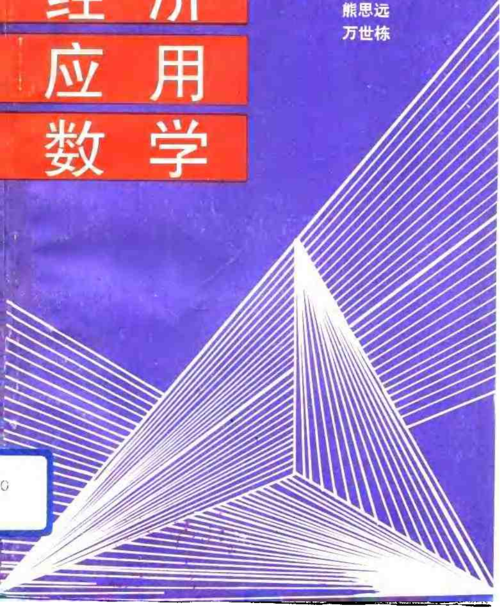
经济应用数学

主　编　曾进德
副主编　吴　东
熊思远
万世栋



(滇)新登字 07 号

经济应用数学

主　　编　曹进德
副 主 编　吴　东　熊思远　万世栋
责任编辑　李继毛

云南大学出版社出版发行
(云南大学校内)
云南省计算中心科技彩印厂印刷

开本: 787×1092　1/32　印张: 11.35　字数: 277 千
1993 年 10 月第 1 版　1993 年 10 月第 1 次印刷
印数: 0001-2600

ISBN 7-81025-374-3/O·18　定价: 5.40 元

前　言

本书是为财经、管理、旅游外贸类各专业编写的公共必修基础理论课教材。

全书共分五篇，计十一章。主要介绍一元函数微分学，一元函数积分学。还介绍了多元函数和微分、差分方程的一些基础知识，并在最后一章对经济学中常见的经济数学模型作了简单的阐述。本书不仅可供财经、管理、旅游外贸类及其相近专业的大学本科、专科、夜函大、职工大学、业余大学、电视大学等选作教材使用，而且可作为相关专业的教学参考书。

本书由云南大学成人教育学院讲师、应用数学硕士曹进德同志任主编，经济学院讲师吴东同志，马列部副教授熊思远同志，成人教育学院教授万世栋同志共同编写完成。

承蒙云南省应用数学研究所副所长昆明工学院李继彬教授认真审阅书稿，并提出了不少改进意见和建议，为本书作序，编者表示衷心的感谢。

借此机会，编者们还要感谢云南大学成人教育学院、经济学院的领导和同志们的支持和关怀，感谢云南大学出版社编辑李继毛同志为本书的出版所付出的辛勤努力。

限于编者们的学识水平和经验，且编写时间仓促，书中倘有不妥之处，恳请同行和读者们批评指正。

编　者

1993 年 8 月 12 日于云南大学

序　言

国家的繁荣富强，关键在于高超的科技和高效率的经济管理。这是当代有识之士的一个共同见解，也已为许多发达国家的发展历史所证实。经济是实现社会所必需的物质资料的生产、分配、交换和消费的社会系统，经济过程的实现及决策控制等离不开数学，数学对经济学的发展起着很大作用。今天，一位不懂数学的经济学家决不可能成为杰出的经济学家。纵观从 1969 至 1981 年间颁发的 13 个诺贝尔经济学奖中，就有 7 个获奖者实际上是数学家，这一事实充分说明了数学的重要性。

在经济学中用到非常广泛和高深的数学分支。为了学习和理解较高深的经济数学，有一本好的入门书是十分重要的。曹进德同志等所编写的《经济应用数学》一书就是一本基本的入门教材，作为本书的审查者，笔者认为该书有以下特点：

1. 在教材内容的选取上，该书紧扣大纲，力求简明扼要，通俗易懂、深入浅出，便于自学。

2. 在基本概念的处理上，该书基本概念的引入力求自然，形象和生动直观，并兼顾严格性。

3. 特别注重学生基本运算能力的培养和训练。配有较多例题解释解题的基本方法和技巧，并尽可能地联系经济领域中的实际，培养学生的解决实际问题的能力。

4. 作为教学改革的新实践，该书在编排顺序和章节安排等方面也作了新的探索。

笔者乐于向读者们推荐此书。相信本书的出版将为经济管理等领域的专家的培养和成长作出新的贡献。

李继彬

1993 年 8 月 10 日

目　录

第一篇　函数与极限

第二篇 导数、微分及其应用

第三篇 一元积分学

第四篇 多元函数

第五篇　微分、差分方程及经济数学模型简介

第一篇　函数与极限

函数与极限是整个微积分学的基础，它首先介绍了函数的有关概念及性质，并对微积分学的基本研究手段—— 极限的概念和基本求法进行了阐述，最后利用极限对函数进行了初步研究，即函数的连续性。

第一章　函　　数

§1.1　实数集

一、集合

集合是具有某种共同性质的事物全体。

构成集合的事物称为集合的元素。

a 是集合 A 的元素，称为 a 属于 A，记为 $a\in A$，否则记为 $a\overline{\in} A$。

集合通常有两种表示方法：

1、列举法：将集合所含的全部元素列举出来，并用花括号括住。

例如，$A=\{0,1,2\}$

2、描述法：设集合 A 为满足条件 $p(a)$ 的一切元素 a 构成的集合，则记 $A=\{a|p(a)\}$

例如、$x^2-1=0$ 的根构成的集合 A 可以记为 $A=\{x|x^2-1=0\}$，而所有正数构成的集合为 $\{x|x>0\}$。

以下将有关概念及结论简要列出：

1、不含任何元素的集合称为空集，记为 Φ。

2、称集合 A 是集合 B 的子集当且仅当任取 $a\in A$，则 $a\in B$；即 A 的所有元素均是 B 的元素。记为 $A\subset B$，读作"A 含于 B"

集合 $A=B$ 当且仅当 $A\subset B$ 且 $B\subset A$。

3、$A\bigcup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为集合 A 与 B 的并集。

4、$A\bigcap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的交集。

5、$A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\overline{\in} B\}$ 称为 A 与 B 的差集。

6、$\overline{A}=\{x|x\overline{\in} A\}$ 称为 A 的余集。

7、运算律:

(1) 交换律 $A\bigcap B=B\bigcap A$，$A\bigcup B=B\bigcup A$

(2) 结合律 $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$

$$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$$

(3) 分配律 $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$$

(4) 对偶律 $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$

$$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$$

二、实数与数轴

实数可分为有理数和无理数，有理数是可以表示为分数的数。全体实数构成的集合称为实数集，记为 R；全体有理数构成的集合称为有理数集，记为 Q。这样 $Q=\{q/p|p,\ q$ 为整数，$p\neq 0\}$，而无理数集就是 $R-Q$。

实数与数轴上的所有点一一对应，即每一实数对应数轴上的一个点，数轴上每一点也对应一个实数。称有理数对应的点为有理点，无理数对应的点为无理点。

三、绝对值

绝对值是一个很重要的概念。

实数 x 的绝对值 $|x|$ 定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$|x|$表示数轴上的点x到原点的距离。

其性质如下：

1. $\sqrt{x^2} = |x|$

2. $|x| \geqslant 0$

3. $|-x| = |x|$

4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

因为，当 $x > 0$ 时 $-|x| < x = |x|$

当 $x < 0$ 时 $-|x| = x < |x|$

当 $x = 0$ 时 $-|x| = x = |x|$

总之，$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

5. $\{x \mid |x| < a, a > 0\} = \{x \mid -a < x < a, a > 0\}$

即 x 至原点的距离小于 a 当且仅当 x 落在点 $-a$ 与 a 之间。

6. $\{x \mid |x| > b, b > 0\} = \{x \mid x < -b\} \bigcup \{x \mid x > b\}$

7. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

由 4 知 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

$-|y| \leqslant y \leqslant |y|$

所以 $-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$，

由 5 知 $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

显然$|x - y| \leqslant |x| + |y|$，

8. $|xy| = |x| \cdot |y|$

9. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \cdot y \neq 0$

四、区间与邻域

1. 开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$
2. 闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$
3. 半开区间 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$

   $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$
4. $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$

   $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$
5. $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$

   $(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$
6. $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=R$

集合 $\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，因为由 $|x-x_0|<\delta$ 知

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

故 $\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 是一个以 x_0 为中心，δ 为“半径”的区间。

如果在 x_0 的 δ 邻域内“挖去”点 x_0，则变为集合 $\{x|0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\bigcup(x_0,x_0+\delta)$，称为 x_0 的去心 δ 邻域。

§1.2 函数关系

一、概念

函数作为客观世界中普遍存在的数量关系是微积分学研究的对象。

定义 1.1 设 $D\subset R$，且 $D\neq\Phi$，若对于每一个 $x\in D$，按照某种对应规则 f，可以确定唯一的实数 y 与之对

应，则称变量 y 是变量 x 的函数。记作 $y=f(x)$，$x\in D$。其中 x 称为自变量，y 称为因变量。

自变量 x 的变化域 D 称为函数的定义域，记作 $D(f)$，因变量的取值集合称为函数的值域，记为 $Z(f)$，即 $Z(f)=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$。

以自变量 x 作为横坐标，因变量 $y=f(x)$ 作为纵坐标在平面上描绘出来的轨迹称为函数 $y=f(x)$ 的图形，即面平点集

$$\{(x,y)|y=f(x),x\in D(f)\}$$

当自变量 x 在 $D(f)$ 内取某一值 x_0，函数 y 的对应值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$。

注意：不同的函数要用不同的字母表示，以区别其对应规则，常用 f，g，h，Φ，Ψ，F 等表示。

定义域和对应规则是函数的两个基本要素，但一般只给出对应规则，而未指明定义域。在实际问题中，由函数的实际意义可以确定其定义域；当函数无实际背景时，函数的定义域就是使对应规则有意义的自变量 x 的全体取值。

例 1 求 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域。

解：$\because$ 当 $x-1\geqslant 0$ 时 $\sqrt{x-1}$ 才有意义，

$\therefore\{x|x\geqslant 1\}$ 是函数的定义域。

例 2 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是否同一函数

解：$y=x$ 的定义域是全体实数

而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是全体非零实数，它们的定义域不同，因此不是同一函数

例 3　求 $y=\dfrac{1}{lg(2x-1)}$ 的定义域

解：欲使对应规则有意义，须

$$2x-1>0，且\ 2x-1\neq 1$$

这是因为 0 和负数无对数，且 $lg1=0$，而分母不能为零，于是定义域为 $\left\{x\,|\,x>\frac{1}{2},且x\neq 1\right\}=(\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$

二、函数的表示法

1. 公式法：对应规则用数学式子给出。

例如 $y=\sin x$。

如果一个函数在其定义域的不同部分用不同的式子表示，则这种函数称为分段函数。

例如 $y=|x|=\begin{cases} x & 当x\geqslant 0时 \\ -x & 当x<0时 \end{cases}$

其图象为图 1.1

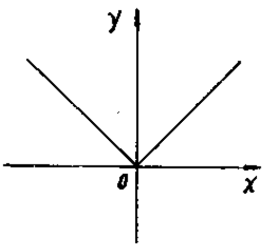


图 1.1

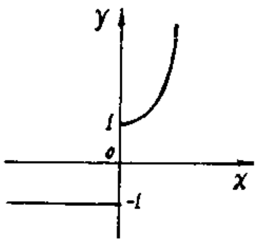


图 1.2

再如 $y=\begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

其图象为图 1.2

2. 列表法：将自变量和因变量的对应值列成表格，以反映对应规则。

3. 图象法：即用曲线反映对应规则。

三、隐函数

形如 $y=f(x)$ 的函数称为显函数，例如 $y=x^2+\sin x$，与此相对照，当变量 x 与 y 的对应规则是用一个方程 $F(x, y)=0$ 表示时，其关系是不明显的，它隐藏在式子 $F(x, y)=0$ 中，这样的函数关系称为隐函数，例如 $y-x\ln y=0$ 确定的函数、$x^2+xy+y^2=4$ 确定的函数均是隐函数。注意，勿将 $F(x, y)=0$ 这一式子称为稳函数。

§1.3 经济学中的常用函数

一、需求函数与供给函数

在假定其他因素不变的条件下，商品的需求量 Q 是其价格 P 的函数，称为需求函数，记为

$$Q=f(P) \text{ 或 } p=g(Q)$$

一般来说，商品的需求量随价格上升而减少。常见的需求函数有

$$Q=a-bp \quad (a>0,\ b>0)$$

$$Q=\frac{a}{p+c}-b \quad (a>0)$$

$$Q=\frac{a-p^2}{b} \quad (b>0)$$

$$Q=ae^{-bp} \quad (a>0,\ b>0)$$

供给函数是讨论在其他因素不变的前提下，供应商品的价格与相应的供给量的关系。仍用 Q 表示供给量，P 为价格，其一般形式为

$$Q = h(p)$$

常见的供给函数有

$$Q = -d + cp \qquad c > 0,\ d > 0$$

$$Q = \frac{ap - d}{cp + d} \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c > 0)$$

二、收益函数与成本函数

若某产品的市场需求量为 Q，价格为 P，则它们的乘积 PQ 称为总收益。即总收益 $R = PQ = pf(p)$，其中 $Q = f(p)$ 是需求函数。

某产品的总成本由固定成本与可变成本构成，可以表示为

$$C = C(Q) = C_1 + C_2(Q)$$

其中 C_1 是固定成本，不随产量 Q 变化，而可变成本 $C_2(Q)$ 是产量 Q 的函数。

$L = R - C$ 称为利润。

三、生产函数

生产函数是生产过程中投入与产出之间的对应关系。一般某企业的最大生产能力 Q 常可视为劳动力 L 和固定资产 K 的函数

$$Q = f(K,\ L)$$

例如著名的 $Cobb - Douglus$ 生产函数 $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$。