矿业运筹学基础

中国有色金属工业总公司教育局 组编

中南工业大学出版社

有色金属继续教育丛书

序

继续教育，是对在职专业技术人员不断进行知识技能补充、更新、拓宽和提高的一种追加教育，这种与科研、生产任务密切结合的教育形式，对于专业技术人员提高科技水平和创造能力，并使最新的科技成果迅速转化为生产力，具有重要的意义。总公司教育局根据有色金属企事业单位专业技术人员在职学习的特点，组织有关企业、科研院所、高等学校的专家，编写了这一套有色金属继续教育教材丛书，为广大专业技术工作者在职学习提供了方便，这是一件很有意义的工作。

邓小平同志曾经精辟地指出："科学技术是第一生产力"。我们搞改革、搞开放、搞建设，不抓科学技术这一生产力是没有出路的。有色金属工业的发展也必须重视教育和科学技术。随着有色金属企业经营机制的转换，企业要直接在商品经济的海洋中搏击，没有科学技术这一第一生产力做后盾是不行的。发展科技，最重要的是人才，企业的竞争最终是人才的竞争。当前科学技术发展迅猛，日新月异，仅靠在大学里学到的知识是远远不够的。经济发达国家的教育模式正在从"一次教育"向"终身教育"过渡。

需要指出的是，各单位要积极创造条件，采取有力措施，为广大专业技术工作者学习提供条件，支持他们不断提高水平；同时，从事专业技术工作的同志要勤于学习，学习本专业、本岗位需要的新理论、新技术、新工艺以及新的管理方

法。只有勤于学习，才能适应改革开放的新形势，才能为有色金属工业的发展更好地贡献自己的聪明才智。

中国有色金属工业总公司
副　总　经　理　**何伯泉**
1992年7月24日

前　言

运筹学是近50年里成长起来的一门新兴学科，它的许多分支目前还处于发展阶段，线性规划、图与网络是其中理论和方法都比较成熟、应用又非常广泛的两个分支，因此本书用了较多的篇幅论述了这两个分支的基本内容以及在矿业中的应用。

本书以矿业中的实际问题为实例，导出运筹学各分支数学模型的建立和求解方法的基本思想，并在此基础上给出求解的方法。

运筹学在矿业中的应用起步较晚，国外60年代初期开始应用，而我国在60年代中期才开始研究，到了70年代中期比较活跃。特别是近些年来，随着电子计算机的广泛应用，运筹学在矿业中的应用越来越广泛。在矿山应用较多的运筹学分支是线性规划、动态规划、图与网络、统筹法和排队论等，本书只介绍一些简要的应用实例。

运筹学的教材种类很多，但结合矿山实际问题的很少，本书编者于1986年参考运筹学有关专著和文献，并结合矿山实际问题，编写了《矿业运筹学基础》讲义，并多次作为中南工业大学以及兄弟院校采矿专业的教材。本书就是在该讲义的基础上精简改写而成。

本书的编写，作者力求简明扼要，易懂实用并结合矿山实际。在编写过程中，潘长良、王妙钦等同志提了许多建设性意见。中条山矿务局陈隐慧，德兴铜矿汪关杰，大厂矿务局游

象贤，黄沙坪铅锌矿刘松鹤，中南工业大学孟廷让、吴超等同志参加了本教材的会审，并提出宝贵的意见。特在此表示衷心的谢意。

由于编者水平有限，本书难免有错误之处，对此恳请读者给予批评指正。

编 者

1992年5月于长沙

目　录

1 线 性 规 划

在生产中常常遇到一些实际问题，即如何利用现有人力、物力、资源才能完成最大可能的任务。或者在已给定任务之下，如何合理地安排生产工艺和生产组织管理，尽量做到用最少的人力、物力、资源，出色地完成任务。总之，当制定一个经济计划或安排一项生产过程时，在条件已确定的情况下，如何根据量与量之间的内在关系，做出一个最合理、最恰当的安排，使其效果达到最佳。这些问题，构成了线性规划的主要研究内容。

线性规划是运筹学的一个重要分支，早在1939年，数学家康特罗维奇就用它解决运输和下料等生产问题，并出版了一本名为《生产组织与计划中的数学方法》一书。然而，在一段时间内，他的工作并未引起人们的注意。

自1947年丹捷克提出了一般线性规划问题的单纯形方法后，线性规划在理论上趋向成熟。它的应用范围广、适应性强，计算技术比较简便。

1.1 线性规划问题及数学模型

一、引例

为了说明什么是线性规划，先通过一个例子来认识这类问

题的数学模型是怎样建立起来的，以及它具有哪些特点。

某矿山炸药厂采用硝酸铵、梯恩梯和木粉为原料、生产2号岩石铵梯炸药和3号露天铵梯炸药。这两种炸药的配比列于表 1-1，2 号岩石炸药售价 1200元/t，3 号露天炸药的售价是 800元/t。国家每月供给该厂硝酸铵 400t，梯恩梯 44t，木粉 36t，炸药厂如何计划两种炸药的产量，使它们的总产值最高？

表1-1

料 %) 药名称	硝酸铵	梯恩梯	木粉
2# 岩石炸药	85	11	4
3# 露天炸药	88	3	9

设该厂每月生产2号岩石炸药 x_1 t，生产3号露天炸药 x_2 t，该厂每月消耗的原料量不超过国家的供应量，即

$$\begin{cases} 0.85x_1+0.88x_2\leqslant 400, \\ 0.11x_1+0.03x_2\leqslant 44, \\ 0.04x_1+0.09x_2\leqslant 36。\end{cases}$$

两种炸药的产量不能为负值，x_1 和 x_2 还要满足，$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$。

生产两种炸药的总产值是（$1200x_1+800x_2$）元，目标是使总产值最高。即

$$\max Z=1200x_1+800x_2$$

这样该问题就建立成如下的数学模型，即

求 $\max Z=1200x_1+800x_2$

满足 $\begin{cases}0.85x_1+0.88x_2\leqslant 400\\0.11x_1+0.03x_2\leqslant 44\\0.04x_1+0.09x_2\leqslant 36\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$

二、线性规划的数学模型

从上述例题可以看出，它受一组限制条件的限制（如炸药加工受原料的限制），这些限制条件，称为约束条件。约束条件可以是等式或不等式。该问题要达到一定的目的（如炸药加工要求产值最大），这称为目标函数。另外它要求求解一组非负变量x_j。

考察上面所举例题，可以将其写成如下数学模型通式：

求 $\max Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

满足 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\x_j\geqslant 0\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{cases}$

其中，a_{11}，a_{12}，$\cdots a_{mn}$；c_1，c_2，$\cdots$，c_n；b_1，b_2，b_3，$\cdots$，b_m均为常数。

为了书写简便，通常把上述线性规划的数学模型简写成

求 $\max Z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$

满足 $\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i=1,\ 2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1,\ 2,\cdots,n) \end{cases}$

也可以用矩阵的形式来表示线性规划问题

求 $\max Z = cx$

满足 $\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

其中 $C = (c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$ 为 n 维行向量；

$x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$ 为 n 维列向量；

$b = (b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m)^T$ 为 m 维列向量；

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ 为 $m \times n$ 阶矩阵。

任何一个线性规划的数学模型都包含3个内容：

（1）一组决定不同方案的非负变量 x；

（2）一组由 x 系数 a 所给定的技术状况和 b 所表示的特定要求所构成的约束条件；

（3）一个作为选择各种可能方案所依据的判别准则（目标函数）。

在线性规划的数学模型中，约束条件变量 x 前的系数 a，称为约束条件系数（或技术系数）；约束条件右端常数 b，称为限制常数（或要求常数）；目标函数变量 x 前的系数 c，称为价值系数。

在平面解析几何中，一次方程 $ax+by=c$ 表示一条直线。

因此，两个变量x和y的一次函数 $ax+by$ 称为线性函数。把两个变量的情况，推广到多个变量 x_1，x_2，…，x_n 一次方程

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$

就称为线性方程；相应的不等式

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1$，或者$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1$，就称为线性不等式。通常把线性方程和线性不等式统称为线性约束。一次函数$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$称为线性函数。

上述问题转化成为代数问题后，有一个特点：求一组非负变量，满足一组线性方程或线性不等式，并使一个线性目标函数达到最大值（或最小值）。这样的数学规划问题称为线性规划。

三、线性规划问题的解

满足约束条件的解称为线性规划问题的解，满足约束条件和变量限制条件的解称为线性规划问题的允许解（可行解）。使目标函数达到最大值（或最小值）的允许解称为线性规划问题的最优解。从生产上来说一个允许解是一个安排方案，一个最优解就是一个最优方案。

1.2 线性规划的图解法

对于只有两个变量的线性规划问题，可以用图解法来求解，下面用图解法来求解上节引例中的线性规划问题。

求 $\max Z=1200x_1+800x_2$

满足：$\begin{cases} 0.85x_1+0.88x_2\leqslant 400 \\ 0.11x_1+0.03x_2\leqslant 44 \\ 0.04x_1+0.09x_2\leqslant 36 \\ x_1,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$

在坐标平面上，一个线性方程式表示一条直线。例如，图1-1中直线BC上的点都满足方程$0.85x_1+0.88x_2=400$。满足线性不等式$0.85x_1+0.88x_2<400$的点，是这条直线以下的半个平面上所有的点。$x_1\geqslant 0$是x_2轴右面半个平面（包括x_2轴上）所有的点；$x_2\geqslant 0$是x_1轴上面半个平面（包括x_1轴上）所有的点。满足$x_1\geqslant 0$和$x_2\geqslant 0$的点都位于第一象限内。

上面五个线性不等式分别表示五个半平面，由直线OA、AB、BC、CD和DO所围成的五边形$OABCD$区域中（包括边界）的所有点，都满足该线性规划问题的约束条件，都是该问题的允许解。该五边形内（包括边界）所有点是该线性规划问题允许解的集合，称为约束集合（可行区）。A、B、C、D、O称为约束集合的极点（角点）。显然，在这个区域内有无穷多个点，说明线性规划问题通常有无穷多个允许解。如何从无穷多个允许解中寻找最优解呢？

首先考察一下目标函数的变化，设目标函数的取值为$Z_。$，即$Z_。=1200x_1+800x_2$，直线$Z_。=1200x_1+800x_2$上的每一个点$(x_1,\ x_2)$，都使目标函数取值$Z_。$。$800x_2=-1200x_1+Z_。$，这条直线的斜率为$-3/2$。如果让$Z_。$取不同值，例如$Z_。=0$、80,000、160,000、240,000等等，则方程$Z_。=1200x_1+800x_2$在坐标平面上产生许多条平行直线，如图1-1虚线所示。

从图上可以看出，离坐标原点0距离越远直线上的点，使目标函数取值越大，把直线$1200x_1+800x_2=0$沿着箭头所指的

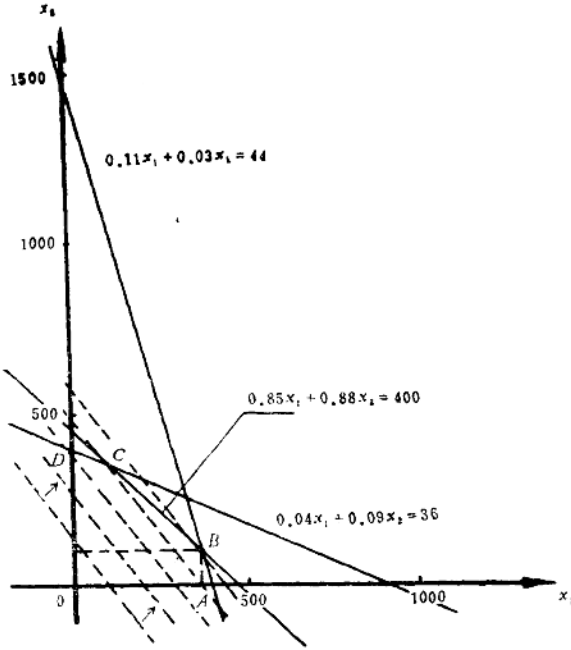

图1-1

方向平行移动，使目标函数值逐渐增大，直到它与允许区至少有一个接触点，这个接触点（图中是B点）。就是最优解。

由此可以判定，最优解一定是可行区的边界点。数学上可以证明，这个结论对于多于两个变量的情况也是适用的，这就使求解范围大大缩小，计算大为简化。

图中目标函数的最优值是 $Z_{。}=523348$；最优解在 B 点达到，B点的坐标$x_1=374.4$，$x_2=92.6$，这就是说，在国家供应

原料限量的条件下，炸药厂生产2号岩石炸药374.4t，生产3号露天炸药92.6t时，可以达到523348元的最高总产值。

此例中约束集合是有固定边界的，即五边形$OABCD$，故称该约束集合为有界集合，且目标函数直线与约束集合只有一个切点B，故最优解只有一个，若将目标函数方程改为，

求 $\max Z=850x_1+880x_2$

那么此目标函数直线就平行约束集合的一边BC，因此该问题的最优解不只是一点，而是BC边上的所有点。当然这种情况是极为特殊的。

如果某线性规划问题的约束集合是无界的，例如

求 $\max Z=x_1+3x_2$

满足 $\begin{cases}-x_1+x_2\leqslant 1\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$

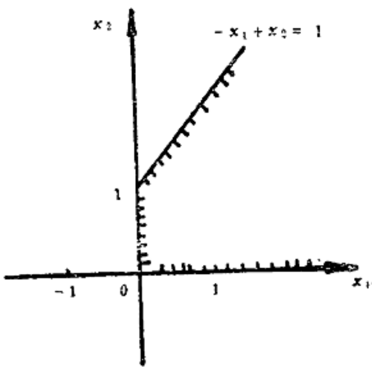

图1-2

其约束集合如图1-2所示。因为约束条件所得到的集合没有边界限制，因此该问题虽有允许解，但没有最大值。

如某线性规划问题的约束集合是空集，如

求 $\max Z=x_1+3x_2$

满足 $\begin{cases}-x_1+x_2\leqslant 1\\ x_1+x_2\leqslant -1\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$

因约束条件和变量限制条件得不到一个约束集合（空集）。如图1-3所示，因此该问题不仅没有最优解，而且也无允许解。

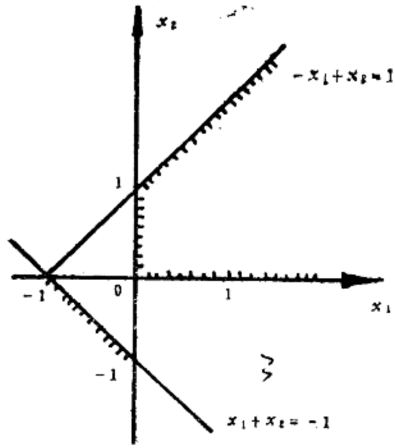

图1-3

通过上述分析可知线性规划有3种约束集合：

(1) 有界集合、线性规划问题有最优解；

(2) 无界集合，线性规划问题有允许解，但没有极大值（或无极小值）；

(3) 空集，线性规划问题无解。

1,3 单纯形法

一、线性规划的标准形式

对于多于两个变量的线性规划问题，图解法无能为力。但是，可以从图解法的角点找最优解得到启示，给多个变量线性

规划的求解方法提供了理论依据。

求解多变量线性规划的方法称为单纯形方法。它的实质是：从允许区域的一个角点开始，通过代数运算转到另一个角点；后一个角点使目标函数值上升（如果是求最小值问题，使目标函数取值下降）。从一个角点到另一个角点的运算称为迭代。通过逐次迭代，最后找出最优解。

为了便于计算和讨论，线性规划问题统一为标准的数学表达式。即目标函数为求极大值；约束条件为线性等式；全部变量恒为正；约束条件的限制常数恒为正；即有

求 $\max Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{cases}$$

线性规划问题的所有非标准形式，都可以通过一定的数学变换化为标准形式

1. 目标函数求最小值

如果问题的目标函数是求$\min Z$，可以化为求 $\max(-Z)$，例如，原问题的目标函数是：

$$\min\ Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,$$

可以化为

$$\max\ Z'=-c_1x_1-c_2x_2-\cdots-c_nx_n。$$

2. 线性不等式约束

如果问题的约束条件是线性不等式≤（或≥），则可以加上另外一些非负变量（对于≤）或减去另外一些非负变量（对