

高等学校试用教材

叶轮机械气体动力学基础

上海机械学院刘高联 王甲升 主编

机械工业出版社

叶轮机械气体动力学基础

上海机械学院 刘高联 主编
王甲升

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ · 印张 $12^{3/4}$ · 字数 307 千字

1980 年 7 月北京第一版 · 1980 年 7 月北京第一次印刷

印数 00,001—2,800 · 定价 1.35 元

*

统一书号: 15033 · 4866

前 言

本书根据1978年高等学校一机部对口专业天津会议的决定以及同年透平机械专业黄山会议上制定的教学大纲，以上海机械学院为“三元流动学习班”编写的《叶轮机机械气体动力学》讲义为基础改编、整理、补充而成。

为了使读者较系统地掌握叶轮机机械气体动力学有关基础知识，概括了解叶轮机机械气动问题的求解方法，本书先从绝对、相对概念入手，介绍两类坐标系下各类物理量的相互转换，按一元、二元、三元流动的顺序，详细阐述和推导了气动基本方程和求解方法。本书内容着重于阐明物理概念，力求深入浅出，便于自学，但由于本课程较多地涉及理论力学、流体力学以及矢量分析等有关知识，因此，要求学生在学本课程之前对这些内容有较好的掌握。

在实际教学过程中，本教材内容可以有所取舍，对高年级学生可选取第1~4章及第5章的基本理论部分，第5章的气动问题提法及其数学表述部分和第6章可以删去，对于研究生则可包括后者。

本书由上海机械学院刘高联同志、王甲升同志主编，黄希程同志编写第六章最后一节。哈尔滨工业大学焦德勇同志主审、陶城同志及赵肃铭同志也参加了审阅工作。

在本书编写过程中，上海汽轮机厂技术员任润昌同志协助整理抄写稿件，在此致以深切谢意。

编者

一九七九年九月

目 录

第一章 叶轮机械气体动力学的一般知识	1
§ 1-1 概述	1
一、叶轮机械中流场的一般概念	1
二、相对坐标系与绝对坐标系	2
§ 1-2 相对运动与绝对运动的相关分析	4
一、相对与绝对坐标系下矢量、标量及其导数的相互转换关系	4
二、相对与绝对坐标系下,速度与加速度表达式及其相互关系	11
三、相对和绝对坐标系下,作用力和功的概念	15
四、相对与绝对坐标系下,热力学诸参数的相互转换关系	19
§ 1-3 两类坐标系下,流体微团变形运动的分解	19
附表 相对坐标系与绝对坐标系中流场参数的转换关系式一览表	25
附录 哥氏加速度 $2\omega \times w$ 的力学解释	26
第二章 相对坐标系下的一元流动	28
§ 2-1 沿流向一元流动的气动基本方程组	28
一、封闭式转轮内一元流动的气动基本方程组	28
二、半开式(或开式)转轮内一元流动的气动方程组	39
§ 2-2 旋转的变截面管中一元流动分析	42
一、适当的无量纲化的方法	43
二、无量纲速度 λ 同马赫数 M 的关系	45
三、亚音速流与超音速流的判别准则	47
四、质量密度 $(\rho\lambda)$ 的极值和 $\lambda_{\max}$	47
五、变截面管一元流的分析	48
§ 2-3 流动的相似律	51
§ 2-4 简单径向平衡(一元流动)	53
一、基本方程与主要流型	53
二、内外壳为圆柱面的级	56
第三章 叶轮机内的准二元流动	58
§ 3-1 无叶间隙内任意准正交方向的气流平衡问题	58
一、准二元流动气动方程组	59
二、准正交向平衡方程的另一形式	62
三、流动损失的估计方法	66
四、通过准正交面 γ 的流量方程	68
五、流线迭代法求解简介	68
§ 3-2 任意旋成面叶栅流动的准二元理论	71
一、正命题解法	71
二、反命题解法	73
第四章 叶轮机内三元流动的普遍理论	75
§ 4-1 理想气体运动的基本方程	77
一、连续方程	77

二、理想气体运动微分方程	79
三、柱坐标系下理想气体的能量方程	82
§ 4-2 粘性气体运动的基本方程	83
一、粘性气体的运动微分方程——纳维尔-斯托克斯方程	83
二、柱坐标下粘性气体的能量方程	86
三、粘性气体热力学第二定律表达式	88
§ 4-3 运动微分方程的积分, 三元流动基本方程组的分析和讨论	90
一、理想气体运动微分方程的积分	90
二、关于熵、焓和功率的讨论	91
三、关于旋度的讨论	92
§ 4-4 柱坐标系下的势函数、流函数及其方程、边界条件	93
一、柱坐标系下的势函数和势函数方程	93
二、柱坐标系下的流函数和流函数方程	96
§ 4-5 气动基本方程组的其它形式	101
一、守恒型微分方程	101
二、气动基本方程的积分形式	102
三、基本方程的微分形式和积分形式的关系	105
四、积分形式的应用	107
§ 4-6 叶轮机各种气动理论概述	107
第五章 基于两类相对流面的三元流动理论	112
§ 5-1 任意旋成面叶栅(S_1 流面的特例)的气动理论	112
一、气动方程组	112
二、气动方程组的其它形式	117
三、流函数、“势”函数和矩函数	119
四、气动问题的提法及其数学表述	122
§ 5-2 S_2 流面的气动理论	126
一、概述	126
二、 S_2 流面的气动方程组	129
三、气动问题的提法及其数学表述	136
第六章 两类相对流面的气动问题的解法	142
§ 6-1 损失的近似模型	142
§ 6-2 任意旋成面叶栅气动命题的解法	145
一、正命题解法	146
二、杂交型命题解法	157
三、最优化命题解法	166
§ 6-3 S_2 流面气动命题的解法	172
一、有限元法	172
二、流线迭代法	180
附录	190
I 样条插值与光顺方法	190
II 追赶法	192
III 守恒型方程的特点	194
参考文献	195

第一章 叶轮机械气体动力学的一般知识

§ 1-1 概 述

近十余年来,为了适应叶轮机械不断提高其性能指标(高的级负荷、大容量、高效率等)的要求,给叶轮机械气体动力学的理论研究和试验提出了新的课题;另一方面,又由于高速电子计算机技术的发展,为理论研究和试验提供了有利条件,使一些复杂的计算成为可能。在今天,二元流和准三元流理论已不仅是科研的对象,而且已逐渐成为实际工程设计的工具。近几年来,还出现了一些直接求解三元流动的新尝试。

随着计算数学和计算机技术的发展,在流体力学中形成了一个新分支——计算流体力学,这一分支的出现展示了用计算机代替实验装置作“计算实验”的现实前景。计算机的应用和发展,无论在研究规模、问题的提法、考虑问题的观点以及求解方法等方面都给叶轮机械气动理论的研究带来很大的变革。在解法方面,目前已广泛应用的两类方法——有限差分法和流线曲率法——都是由于适应计算机特点而得到迅速发展的,而以前曾经占统治地位的保角变换法则已被淘汰。近来,新兴的有限元法也正在迅速向叶轮机械气动问题渗透,呈现出充沛的生命力。

“千里之行,始于足下”,由于叶轮机械气体动力学的研究正在迅猛发展,作为一个叶轮机械气动设计人员来说,较系统地掌握叶轮机械气体动力学的基础知识更显得十分必要,为此,本章根据叶轮机械内部气体运动的特点,着重介绍绝对系统和相对系统下,叶轮机械气体动力学诸物理量及其相互转换,以此作为以后各章讨论的基础。

一、叶轮机械中流场的一般概念

和一般的气体运动相比,叶轮机械内部气体的运动有着许多特点,这主要是由于叶轮机内部有相间排列的动轮和静轮;有功能输出或输入以及流道形状复杂所引起的。叶轮机械内部气体运动的特点是:

(i) 必须考虑动轮与静轮内相对流动与绝对流动,它们之间的相互关联、转换和衔接的问题;

(ii) 旋转的叶轮内的流动必然是非定常的;

(iii) 由于流域的有限性和周期性,因而边界条件复杂、特殊、多样化。在一定的超音速入口马氏数(但轴向分速为亚音速)下,入气角还具有唯一性;

(iv) 附面层与主流的相互干扰作用显著(还有叶端附面层干扰、二次流、附面层与激波的干扰);

(v) 大弯度,大梯度,高负荷。

由于存在上述特点,我们不能完全直接套用,甚至完全不能移植一般气体动力学的许多成熟而有效的研究方法,而必须发展一套适合自己的理论模型和处理方法。例如两类相对流面理论、无限多叶片理论、流道法等。

二、相对坐标系与绝对坐标系

在气体动力学研究中,坐标系的选取是非常重要的,如果坐标系选择得当,可以使所研究的问题得以简化。根据叶轮机械的工作特点和结构特点,我们通常采用柱坐标系来确定叶轮机械内部工质的流场。在选定坐标系时,为简单起见,通常取柱坐标系 (r, φ, z) 的 z 轴和叶轮机械的转动轴重合, φ 角的增加方向和动轮的旋转方向相一致。

当工质在动轮中运动时,工质既有相对于动轮的相对运动,又随动轮以角速度 ω 作旋转运动。根据这一特点,我们常常把柱坐标系和动叶固连在一起,而观察者也随同动轮一起运动,这样,他所观察到的工质的运动,显然是工质相对于动轮的相对运动。

对于和动轮固连在一起的坐标系,我们称相对坐标系,通常用 (r, φ, z) 表示,而随同相对坐标系一起运动的观察者称相对观察者。

如果所取的坐标系和地面固连在一起,观察者又站在地面上观察工质在动轮流道内的运动,那么,他所观察到工质的运动实际上是另一种运动,这种运动我们称为绝对运动,而固连在地面上的柱坐标系就称为绝对坐标系[用 (r, θ, z) 表示],而此观察者称绝对观察者。

这两种坐标系各有特点,对于静轮内工质的运动,不言而喻,相对与绝对是一致的。对于动轮内工质的运动,既可采用相对坐标系也可采用绝对坐标系。

采用绝对坐标系,由于它和地面固连在一起,因而可以认为是惯性系统,可以直接应用牛顿定律。但是,在以后的讨论将会看到,在动轮中采用绝对坐标系,其运动的非定常性是必然的。

采用相对坐标系,则由于它是非惯性系统,不能直接应用牛顿定律,但它的优点是,由于动轮和观察者一起运动,在这一观察者看来,固体边壁(如叶片表面)的表面方程与时间无关,即边界条件成为定常。

既然相对坐标系和绝对坐标系同时用来确定同一流场,因而,它们之间必然存在一定的联系,我们的任务之一就是找到它们之间的相互关联、建立起两种坐标系下,流场诸参数的相互转换关系式。

利用绝对坐标系可直接应用牛顿定律的特点,我们可得出绝对坐标系下工质运动的微分方程组,然后通过流场诸参数的相互转换关系式,将它们转换为相对坐标系下工质运动的微分方程组。至于其它支配方程也可以应用转换关系式来实现转换。

由此看来,无论是相对坐标系还是绝对坐标系,在叶轮机械气体动力学研究中,都有其重要地位,两者相辅相成,互相补充。

为便于建立两种坐标系的相互关系,我们通常认为不仅两种坐标系的原点始终重合,而且初瞬时($t = 0$),各对应的坐标轴也重合一致,这样,如图 1-1 所示,在空间任取一点 P ,为了区别两类柱坐标系,我们以 r, θ, z 表示 P 点的绝对坐标,以 r', φ, z' 表示 P 点的相对坐标,则两种坐标的相互关系为:

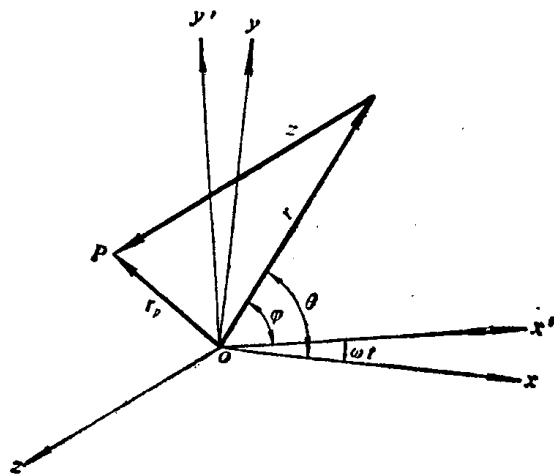


图 1-1

$$r = r', \quad z = z', \quad \theta = \varphi + \omega t \quad (1-1)$$

此外, 如以 i_r 、 i_θ 、 i_z 表示绝对坐标系的座标单位矢量, 以 i_r' 、 i_φ 、 i_z' 表示相对坐标系的座标单位矢量, 则

$$i_r = i_r', \quad i_\theta = i_\varphi, \quad i_z = i_z' \quad (1-2)$$

由上式可知, 两种坐标系除方位角不同以外, 其余各量都相同。因此, 在以后的叙述中, 省去撇号以简化书写; 两坐标系的单位矢量, 除专门指明外, 亦可相互通用。

其实, 在叶轮机械气体动力学的研究中, 除采用柱坐标系以外, 也还采用笛卡尔直角坐标系作为基本坐标系。笛卡尔直角坐标系的优点在于: 座标单位矢量的方向不因空间位置的改变而变化。对于笛卡尔直角坐标系, 同样可以分绝对坐标系和相对坐标系两种, 它们和柱坐标系之间存在着一定的关系。如以 i 、 j 、 k 表示绝对笛卡尔直角坐标系的座标单位矢量, 以 i' 、 j' 、 k' 表示相对笛卡尔直角坐标系的座标单位矢量, 则由座标选取的特点, 我们有:

$$i_z = i_z' = k = k'$$

至于其它座标单位矢量之间的关系可由图 1-2 应用矢量分解式得到

$$\left. \begin{aligned} i_r &= \cos\theta i + \sin\theta j = \cos\varphi i' + \sin\varphi j' \\ i_\theta &= -\sin\theta i + \cos\theta j = -\sin\varphi i' + \cos\varphi j' \\ i &= \cos\theta i_r - \sin\theta i_\theta, \quad j = \sin\theta i_r + \cos\theta i_\theta \\ i' &= \cos\varphi i_r - \sin\varphi i_\theta, \quad j' = \sin\varphi i_r + \cos\varphi i_\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

至于相对笛卡尔直角坐标系与绝对笛卡尔直角坐标系的座标单位矢量之间, 也有下列关系

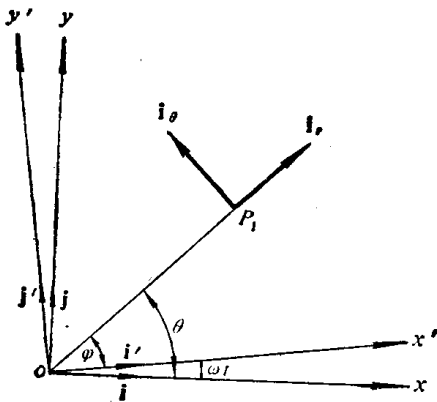


图 1-2

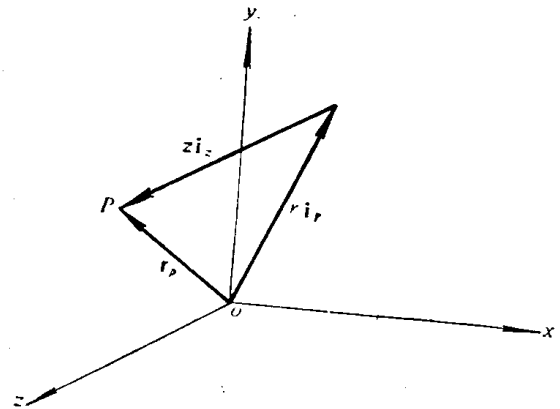


图 1-3

$$\left. \begin{aligned} i &= \cos\omega t i' - \sin\omega t j' \\ j &= \sin\omega t i' + \cos\omega t j' \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

同理

$$\left. \begin{aligned} i' &= \cos\omega t i + \sin\omega t j \\ j' &= -\sin\omega t i + \cos\omega t j \end{aligned} \right\} \quad (1-4 a)$$

以上结果对我们进行坐标转换将起着重要作用。

笛卡尔直角坐标系与柱坐标系的座标之间也存在下列关系

$$\left. \begin{aligned} x' &= r \cos \varphi, \quad y' = r \sin \varphi, \quad z' = z \\ \varphi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{y'}{x'}, \quad r = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \quad z = z' \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \\ \theta &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = z \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

空间一点的位置也可以用位置矢量 $\mathbf{r}_P$ 来表示, 如图 1-3 所示, 取空间一点 P , 连接原点 O 及 P , 则 P 点的位置可用 $\mathbf{r}_P$ 表示, 对于绝对笛卡尔直角坐标系, 有

$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{i}_r + z\mathbf{i}_z = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}' \quad (1-7)$$

对于相对笛卡尔直角坐标系, 则有

$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{i}'_r + z\mathbf{i}'_z = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' \quad (1-7a)$$

§ 1-2 相对运动与绝对运动的相关分析

上面介绍了两类坐标系的一般知识。提出两类坐标系是叶轮机械气体动力学研究的实际需要。但是, 它给我们带来了新的问题。由于观察者所处的地位不同, 他们所观察到的流场诸参数也将不同。

解决这一问题的根本出发点是, 无论是绝对观察者还是相对观察者, 他们所观察的都是同一流场, 因而我们有可能运用理论力学的知识, 应用绝对、相对和牵连运动之间的关系, 建立起它们之间的联系。很明显, 牵连运动是绕 z 轴转动。

在本书所讨论范围内, 流场参数总可以归结为标量和矢量两大类, 由于同一瞬时这两类流场参数均可能随空间位置不同而变化, 因而形成标量场和矢量场。我们的目的就是要确定标量场和矢量场变化规律的一般表示方式, 确定两种坐标系下这些表示方式间的联系。

本节先讨论标量场参数和矢量场参数的各种导数之间的相互转换, 然后分析速度、加速度、能量与热力学参数、力与功等的相互转换。

一、相对与绝对坐标系下矢量、标量及其导数的相互转换关系

在讨论时, 假定两类坐标系在初瞬时重合一致; z 轴与转动轴重合且转动角速度 ω 为常数。

在这些条件下, 上一节建立起来的坐标关系式均成立。

以 q 表示标量场参数而以 $\mathbf{A}$ 表示矢量场参数。显然, q 和 $\mathbf{A}$ 均应是各类坐标和时间的函数。例如:

$$q = q(r, \theta, z, t) = q'(r', \varphi + \omega t', z', t')$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(r, \theta, z, t) = \mathbf{A}'(r', \varphi + \omega t', z', t')$$

以后, 简称 q 为标量函数, $\mathbf{A}$ 为矢量函数。

既然 q 和 $\mathbf{A}$ 都是坐标和时间的函数, 那么, 表征 q 和 $\mathbf{A}$ 变化的应当是 q 和 $\mathbf{A}$ 对坐标和时间的偏导数。我们称 q 和 $\mathbf{A}$ 对时间 t 的偏导数为局部偏导数, 对坐标的偏导数则称为迁移偏导数。

如果把 q 和 $\mathbf{A}$ 看成某气体微团的物理量。那么, 当气体微团运动时, 其坐标位置将随时间变化, 即此时

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad z = z(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

而气体微团的物理量 q 及 $\mathbf{A}$ 亦将改写成

$$q = q[r(t), \theta(t), z(t), t]$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}[r(t), \theta(t), z(t), t]$$

在这种情况下, q 和 $\mathbf{A}$ 成为参变量 t 的函数。因而也必然存在 q 和 $\mathbf{A}$ 对时间的全导数, 这一全导数是气体微团在运动中, 观察者注视气体微团而得出的。

无论是标量函数 q 还是矢量函数 $\mathbf{A}$, 一般讲, 它们对时间和座标的偏导数以及对时间的全导数都和观察者所处的地位有关。为了区别起见, 我们用 $\frac{\partial_a}{\partial t}, \frac{\partial_a}{\partial r}, \dots$ 等表示在绝对坐标系下标量函数或矢量函数对时间和座标的偏导数, 而用 $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r}, \dots$ 表示在相对坐标系下对时间和座标的偏导数。采用 $\frac{D_a}{Dt}, \frac{D}{Dt}$ 分别表示在绝对和相对坐标系下对时间的全导数。这里要着重指出, $\frac{D_a}{Dt}, \frac{D}{Dt}$ 所表示的全导数应理解为在绝对、相对坐标系下的观察者, 当他们注视气体微团由一位置运动到另一与其无限接近的位置时, 对时间的变化率。

(一) 标量函数对时间和座标的偏导数

首先, 任一标量函数, 它的值与所选取的座标无关, 在我们所讨论的情况下, 应有

$$q(r, \theta, z, t) = q'(r', \varphi + \omega t', z', t')$$

应用复合函数求偏导数的规则, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial r'} &= \frac{\partial q}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r'} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r'} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r'} \\ \frac{\partial q}{\partial \varphi} &= \frac{\partial q}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial q}{\partial z'} &= \frac{\partial q}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z'} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z'} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'}\end{aligned}$$

应用(1-1)可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial r'} &= 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r'} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r'} = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} &= 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial z'} &= 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z'} = 1\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial q}{\partial r'} = \frac{\partial q}{\partial r}, \quad \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{\partial q}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial q}{\partial z'} = \frac{\partial q}{\partial z} \quad (1-8)$$

式(1-8)表明, 对于标量函数而言, 其对座标的偏导数对应相等。按照上面规定符号, 式(1-8)实际上应改写成

$$\frac{\partial_a q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial r'}, \quad \frac{\partial_a q}{\partial \theta} = \frac{\partial q}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial_a q}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z'} \quad (1-8a)$$

其次, 我们来分析标量函数对时间的偏导数。

仍应用复合函数求导规则,

$$\frac{\partial q}{\partial t'} = \frac{\partial q}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t'} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t'} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t'} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'}$$

由于 $t = t'$, r 、 φ 、 z 都是自变量, 因而 $\frac{\partial t}{\partial t'} = 1$, $\frac{\partial r}{\partial t'} = \frac{\partial z}{\partial t'} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t'} = 0$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t'} = \frac{\partial \varphi}{\partial t'} + \omega = \omega$$

于是, 根据偏导数的定义, 上式可改写成

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\substack{\varphi=\text{const} \\ r'=\text{const} \\ z'=\text{const}}} = \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\substack{\varphi=\text{const} \\ r=\text{const} \\ z=\text{const}}} + \left(\frac{\partial q}{\partial \theta}\right) \omega$$

或简写成

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\varphi=\text{const}} = \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\theta=\text{const}} + \left(\frac{\partial q}{\partial \theta}\right) \omega \quad (1-9)$$

根据定义 $\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\varphi=\text{const}}$ 相当于相对坐标系中的局部偏导数, 也就是观察者位于相对坐标系中, 他所观察到的标量函数 q 随时间的局部 (或当地) 变化率, 由上面规定, 这一偏导数应是:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\varphi=\text{const}} = \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)$$

至于 $\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\theta=\text{const}}$ 则相当于绝对坐标系中的局部偏导数, 也是观察者位于绝对坐标系中, 他所观察到的标量函数 q 随时间的局部 (或当地) 的变化率, 由上面规定它应是:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\theta=\text{const}} = \frac{\partial_a q}{\partial t}$$

于是

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial_a q}{\partial t} + \left(\frac{\partial q}{\partial \theta}\right) \omega = \frac{\partial_a q}{\partial t} + \left(\frac{\partial q}{\partial \varphi}\right) \omega \quad (1-9a)$$

这一结果表明, 观察者所处的位置不同, 他们所观察到的标量函数对时间 t 的偏导数是不相等的。这一点, 我们利用图 1-4 说明如下:

如图 1-4 所示, 设在 t 瞬时, 在流场中任取一点 P , 它在 xoy (或 $x'oy'$) 坐标平面上的投影为 P_1 , OP_1 和 ox' 的夹角为 φ , 与 ox 的夹角为 θ , 经过 dt 以后, 由于相对坐标系以 ω 转动, 故 P_1 移动到 P'_1 (对绝对坐标系而言)。此时, φ 角保持不变, 但 θ 角则由 θ 增加到 $\theta + \omega dt$ 。这样, 要保证 $\varphi = \text{const}$ 则无法保证 $\theta = \text{const}$, 在

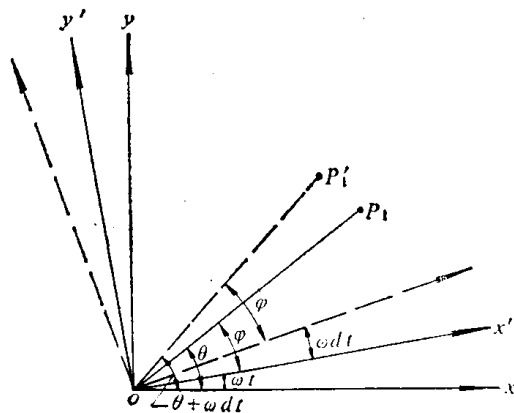


图 1-4

相对观察者看来, dt 时间内局部增量是 $\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\varphi=\text{const}} dt$, 但对绝对观察者看来, 除在 dt 内有局部增量 $\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\theta=\text{const}} dt$ 以外, 还应附加一项由于 θ 角的迁移而增加的增量, 即应加上 $\left(\frac{\partial q}{\partial \theta}\right) \omega dt$ 这一项, 这样就有:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\varphi=\text{const}} = \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{\theta=\text{const}} + \left(\frac{\partial q}{\partial \theta}\right) \omega$$

或

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial_a q}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial q}{\partial \theta} \right) \omega$$

对于绝对坐标系及相对坐标系下对时间的全导数, 可分别写出:

$$\begin{aligned} \frac{D_a q}{Dt} &= \frac{\partial_a q}{\partial r} \frac{Dr}{Dt} + \frac{\partial_a q}{\partial \theta} \frac{D\theta}{Dt} + \frac{\partial_a q}{\partial z} \frac{Dz}{Dt} + \frac{\partial_a q}{\partial t} \\ \frac{Dq}{Dt} &= \frac{\partial q}{\partial r} \frac{Dr}{Dt} + \frac{\partial q}{\partial \varphi} \frac{D\varphi}{Dt} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{Dz}{Dt} + \frac{\partial q}{\partial t} \end{aligned}$$

利用以上讨论结果, 不难直接得出

$$\frac{D_a q}{Dt} = \frac{Dq}{Dt} \quad (1-10)$$

式(1-10)表明, 标量函数对时间 t 的全导数相等。

(二) 矢量函数对坐标和时间的偏导数

令矢量函数 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

式中 A_x, A_y, A_z 为矢量 $\mathbf{A}$ 在绝对笛卡尔直角坐标系上的投影, 由于 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 方向不变, 于是

$$\frac{\partial_a \mathbf{A}}{\partial r} = \frac{\partial_a A_x}{\partial r} \mathbf{i} + \frac{\partial_a A_y}{\partial r} \mathbf{j} + \frac{\partial_a A_z}{\partial r} \mathbf{k}$$

由式(1-8 a), 上式可改为

$$\frac{\partial_a \mathbf{A}}{\partial r} = \frac{\partial A_x}{\partial r} \mathbf{i} + \frac{\partial A_y}{\partial r} \mathbf{j} + \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r}$$

同理可证

$$\frac{\partial_a \mathbf{A}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial_a \mathbf{A}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$$

(1-11)

这一结果表明, 任一矢量函数 $\mathbf{A}$ 对两类坐标系的坐标偏导数对应相等。

至于矢量函数 $\mathbf{A}$ 对时间的偏导数, 我们可利用绝对、相对这两类笛卡尔直角坐标系的坐标单位矢量。对于在绝对坐标系中的观察者而言, 他观察到的绝对坐标系的坐标单位矢量对时间的偏导数应为零。但他观察到的相对坐标系则不同。对绝对观察者而言, 相对坐标系的坐标单位矢量对时间的偏导数并不为零, 这是因为相对坐标系以 ω 绕 z 轴转动之故。事实上, 由式(1-4 a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial_a \mathbf{i}'}{\partial t} &= \frac{\partial_a}{\partial t} (\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}) \\ &= \omega (-\sin \omega t \mathbf{i} + \cos \omega t \mathbf{j}) \\ &= \omega \mathbf{j}' \end{aligned}$$

(1-12)

同理

$$\frac{\partial_a \mathbf{j}'}{\partial t} = -\omega \mathbf{i}'$$

为了利用式(1-11)我们先将矢量函数 $\mathbf{A}$ 表示成相对笛卡尔直角坐标系下的分解式, 即

$$\mathbf{A} = A_x' \mathbf{i}' + A_y' \mathbf{j}' + A_z' \mathbf{k}'$$

式中 A_x', A_y', A_z' 为矢量函数 $\mathbf{A}$ 在相对笛卡尔直角坐标轴上的投影。于是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_a \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{\partial_a}{\partial t} (A_x' \mathbf{i}' + A_y' \mathbf{j}' + A_z' \mathbf{k}') \\
&= \frac{\partial_a A_x'}{\partial t} \mathbf{i}' + \frac{\partial_a A_y'}{\partial t} \mathbf{j}' + \frac{\partial_a A_z'}{\partial t} \mathbf{k}' \\
&\quad + A_x' \frac{\partial_a \mathbf{i}'}{\partial t} + A_y' \frac{\partial_a \mathbf{j}'}{\partial t} + A_z' \frac{\partial_a \mathbf{k}'}{\partial t}
\end{aligned}$$

利用式(1-9 a), (1-12), 同时, 由于 $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, 故

$$\frac{\partial_a \mathbf{k}'}{\partial t} = \frac{\partial_a \mathbf{k}}{\partial t} = 0$$

于是

$$\frac{\partial_a \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \omega \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varphi} + \omega (A_x' \mathbf{j}' - A_y' \mathbf{i}')$$

但由 $\omega = \omega \mathbf{k}'$, $\mathbf{A} = A_x' \mathbf{i}' + A_y' \mathbf{j}' + A_z' \mathbf{k}'$, 可证

$$\omega (A_x' \mathbf{j}' - A_y' \mathbf{i}') = \omega \times \mathbf{A}$$

于是最后可得

$$\frac{\partial_a \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \omega \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varphi} + \omega \times \mathbf{A} \quad (1-13)$$

由于矢量函数 $\mathbf{A}$ 是任意选取的, 因而式(1-13)是一个普遍关系式。

至于矢量函数 $\mathbf{A}$ 对时间 t 的全导数, 我们仍然应用绝对与相对笛卡尔直角坐标系坐标单位矢量之间的关系。这里值得注意的是, 对绝对观察者而言, 绝对坐标系坐标单位矢量对时间的全导数为零, 但在绝对观察者看来, 相对坐标系坐标单位矢量对时间的全导数不为零。事实上

$$\left. \begin{aligned}
\frac{D_a \mathbf{i}'}{Dt} &= \frac{D_a}{Dt} (\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}) = \omega \mathbf{j}' \\
\frac{D_a \mathbf{j}'}{Dt} &= \frac{D_a}{Dt} (-\sin \omega t \mathbf{i} + \cos \omega t \mathbf{j}) = -\omega \mathbf{i}'
\end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

利用以上结果, 我们来建立绝对、相对坐标系下, 矢量函数 $\mathbf{A}$ 对时间全导数的转换关系式。

$$\begin{aligned}
\frac{D_a \mathbf{A}}{Dt} &= \frac{D_a}{Dt} (A_x' \mathbf{i}' + A_y' \mathbf{j}' + A_z' \mathbf{k}') \\
&= \frac{D_a A_x'}{Dt} \mathbf{i}' + \frac{D_a A_y'}{Dt} \mathbf{j}' + \frac{D_a A_z'}{Dt} \mathbf{k}' \\
&\quad + A_x' \frac{D_a \mathbf{i}'}{Dt} + A_y' \frac{D_a \mathbf{j}'}{Dt} + A_z' \frac{D_a \mathbf{k}'}{Dt}
\end{aligned}$$

由式(1-10)及式(1-14)以及 $\frac{D_a \mathbf{k}'}{Dt} = 0$, 可得

$$\frac{D_a \mathbf{A}}{Dt} = \frac{D \mathbf{A}}{Dt} + \omega \times \mathbf{A} \quad (1-15)$$

有了以上结果, 可以求得任何标量场参数和矢量场参数之间的相互转换关系。作为初步应用, 我们来求柱坐标单位矢量 $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta$ 对时间的偏导数、全导数以及对座标的偏导数。

由式(1-11)以及式(1-3)可得 $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta$ 对座标的偏导数如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial_a i_r}{\partial r} &= \frac{\partial i_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (\cos \varphi i' + \sin \varphi j') = 0 \\ \frac{\partial_a i_r}{\partial \varphi} &= \frac{\partial i_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi i' + \sin \varphi j') = i_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-11)^*$$

同理, 有

$$\frac{\partial_a i_\theta}{\partial r} = \frac{\partial i_\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial_a i_\theta}{\partial \varphi} = -i_r$$

由式(1-13), 令 $\mathbf{A} = i_r$, 则可得

$$\frac{\partial_a i_r}{\partial t} = \frac{\partial i_r}{\partial t} - \omega \frac{\partial i_r}{\partial \varphi} + \omega \times i_r$$

但 $\frac{\partial i_r}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial i_r}{\partial \varphi} = i_\varphi$, $\omega \times i_r = \omega i_\varphi$, 代入上式, 即得 $\frac{\partial_a i_r}{\partial t} = 0$ 。同理可得 $\frac{\partial_a i_\theta}{\partial t} = \frac{\partial i_\theta}{\partial t} = 0$ 。

利用式(1-15), 令 $\mathbf{A} = i_r$, 可得

$$\frac{D_a i_r}{Dt} = \frac{D i_r}{Dt} + \omega \times i_r$$

由式 $i_r = \cos \varphi i' + \sin \varphi j'$, 故

$$\frac{D i_r}{Dt} = \frac{D \varphi}{Dt} i_\varphi$$

又因 $d\theta = d\varphi + \omega dt$, 于是

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_a i_r}{Dt} &= \frac{D \varphi}{Dt} i_\varphi + \omega i_\varphi = \frac{D \theta}{Dt} i_\varphi = \frac{D \theta}{Dt} i_\theta \\ \frac{D_a i_\varphi}{Dt} &= -\frac{D \theta}{Dt} i_r \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

同理可得

在前面曾经谈到, 笛卡尔直角坐标系是基本坐标系, 我们常常利用笛卡尔直角坐标系下的一些方程, 通过转换得到柱坐标系下的一些关系式 (为了便于讨论, 这里只限于绝对笛卡尔直角坐标系和绝对柱坐标系之间的相互转换)。

由多元函数求偏导数的规则以及式(1-6), 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta}{r} \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

于是式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

可改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

式(1-17)可当作一种偏导数转换因子来利用,例如,我们要求得柱坐标下的哈密尔顿算子 ∇ ,则由

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

及式(1-3),立即可得

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} &= (\cos \theta i_r - \sin \theta i_\theta) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + (\sin \theta i_r + \cos \theta i_\theta) \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + k \frac{\partial}{\partial z} \\ &= i_r \frac{\partial}{\partial r} + i_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + i_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

即,柱坐标系下的哈密尔顿算子是

$$\nabla = i_r \frac{\partial}{\partial r} + i_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + i_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-17 a)$$

应用式(1-17 a),我们不难运用矢量运算的一般规则,求得绝对柱坐标系下几个在气体动力学中广泛应用的关系式如下:

标量函数 $q(r, \theta, z, t)$ 的梯度为

$$\nabla q = \text{grad } q = i_r \frac{\partial q}{\partial r} + i_\theta \frac{\partial q}{r \partial \theta} + i_z \frac{\partial q}{\partial z} \quad (1-17 b)$$

矢量函数 $\mathbf{A}$ 的散度可由算子 ∇ 的运算规则及式(1-11)*得出

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{\partial A_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-17 c)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 的旋度为

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial z} \right] i_r \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) i_\theta + \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] i_z \end{aligned} \quad (1-17 d)$$

拉普拉斯算子 Δ 为

$$\Delta = \nabla^2 = \text{div}(\text{grad}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1-17 e)$$

以上结果请读者自证。

至此,我们讨论了两类坐标系的相互转换关系,在这许多关系中,我们应当着重掌握下列几个重要关系式

$$1. \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial_\theta q}{\partial t} + \omega \frac{\partial q}{\partial \varphi} \text{ 或 } \frac{\partial_\theta q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} - \omega \frac{\partial q}{\partial \varphi}$$

$$2. \frac{D_a q}{Dt} = \frac{Dq}{Dt}$$

$$3. \frac{\partial_a q}{\partial \theta} = \frac{\partial q}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial_a q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial r}, \quad \frac{\partial_a q}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z}$$

$$4. \frac{\partial_a \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\omega} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varphi} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

$$5. \frac{D_a \mathbf{A}}{Dt} = \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

只要掌握这些关系式, 则所有互相转换问题均可迎刃而解。

有关两类坐标系的相互转换公式, 本章最后附表备查。

二、相对与绝对坐标系下, 速度与加速度表达式及其相互关系

令 $\mathbf{r}_p$ 为座标位置矢量, 则根据速度的定义, 如以 $\mathbf{C}$ 表示气体微团的绝对速度, 则

$$\mathbf{C} = \frac{D_a \mathbf{r}_p}{Dt}$$

而相对速度 $\mathbf{w}$ 则为:

$$\mathbf{w} = \frac{D\mathbf{r}_p}{Dt}$$

我们再假定绝对速度 $\mathbf{C}$ 在 r 、 θ 、 z 方向的投影分别是 C_r 、 C_u 、 C_z 而相对速度 $\mathbf{w}$ 在 r 、 φ 、 z 方向的投影为 w_r 、 w_φ 、 w_z 则:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C} &= C_r \mathbf{i}_r + C_u \mathbf{i}_\theta + C_z \mathbf{i}_z \\ \mathbf{w} &= w_r \mathbf{i}_r + w_\varphi \mathbf{i}_\varphi + w_z \mathbf{i}_z \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

另一方面, 我们从速度的定义出发,

$$\mathbf{C} = \frac{D_a \mathbf{r}_p}{Dt} = \frac{D_a}{Dt} (r \mathbf{i}_r + z \mathbf{i}_z) = \frac{D_a}{Dt} [r (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) + z \mathbf{i}_z]$$

或

$$\mathbf{C} = \frac{Dr}{Dt} \mathbf{i}_r + r \frac{D\theta}{Dt} \mathbf{i}_\theta + \frac{Dz}{Dt} \mathbf{i}_z \quad (1-18 a)$$

将上式与式(1-18)比较, 可得,

$$C_r = \frac{Dr}{Dt}, \quad C_u = r \frac{D\theta}{Dt}, \quad C_z = \frac{Dz}{Dt} \quad (1-18 b)$$

此外, 由

$$\mathbf{i}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{i}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

因而

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{D_a \mathbf{r}_p}{Dt} = \frac{D_a}{Dt} [r (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) + z \mathbf{i}_z] \\ &= \frac{D_a}{Dt} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \\ &= \frac{D_a x}{Dt} \mathbf{i} + \frac{D_a y}{Dt} \mathbf{j} + \frac{D_a z}{Dt} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1-18 c)$$

或

$$\mathbf{C} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}$$

由式(1-3)和式(1-18 b), 不难建立柱坐标系下和笛卡尔直角坐标系下速度之间的关系如

下:

$$\left. \begin{aligned} C_r &= C_x \cos \theta + C_y \sin \theta \\ C_u &= -C_x \sin \theta + C_y \cos \theta \\ C_z &= C_z \end{aligned} \right\} \quad (1-18 d)$$

式中 C_x 、 C_y 、 C_z 是速度 $\mathbf{C}$ 在绝对笛卡尔直角坐标系中的投影分量。注意, 上式也可由速度分量间的几何关系直接求得。

同理, 由 $\mathbf{w} = \frac{D\mathbf{r}_p}{Dt}$, 可得

$$\mathbf{w} = \frac{Dr}{Dt} \mathbf{i}_r + r \frac{D\varphi}{Dt} \mathbf{i}_\varphi + \frac{Dz}{Dt} \mathbf{i}_z \quad (1-19)$$

于是

$$w_r = \frac{Dr}{Dt}, \quad w_\varphi = r \frac{D\varphi}{Dt}, \quad w_z = \frac{Dz}{Dt} \quad (1-19 a)$$

式中 w_r 、 w_φ 、 w_z 表示相对速度沿 r 、 φ 、 z 方向的分量。它们和相对笛卡尔直角坐标系下, 各速度分量 $w_{x'}$ 、 $w_{y'}$ 、 $w_{z'}$ 之间的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} w_r &= w_{x'} \cos \varphi + w_{y'} \sin \varphi \\ w_\varphi &= -w_{x'} \sin \varphi + w_{y'} \cos \varphi \\ w_z &= w_{z'} \end{aligned} \right\} \quad (1-19 b)$$

$w_{x'}$ 、 $w_{y'}$ 分别表示相对速度在 x' 、 y' 方向的分速度。

利用以上结果, 可将式 (1-16) 改写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\mathbf{i}_r}{Dt} &= \frac{w_\varphi}{r} \mathbf{i}_\varphi, \quad \frac{D\mathbf{i}_\varphi}{Dt} = -\frac{w_\varphi}{r} \mathbf{i}_r \\ \frac{D\mathbf{i}_r}{Dt} &= \frac{C_u}{r} \mathbf{i}_\theta, \quad \frac{D\mathbf{i}_\theta}{Dt} = -\frac{C_u}{r} \mathbf{i}_r \end{aligned} \right\} \quad (1-16)^*$$

由式 (1-18 b) 及式 (1-19 a) 及 $d\theta = d\varphi + \omega dt$, 得

$$C_r = w_r, \quad C_u = w_\varphi + r\omega, \quad C_z = w_z \quad (1-20)$$

又由式 (1-15), 令 $\mathbf{A} = \mathbf{r}_p$, 即得

$$\mathbf{C} = \mathbf{w} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p \quad (1-20 a)$$

式 (1-20 a) 表明, 气体微团的绝对速度是相对速度和牵连速度之和。

观察者所在地位不同, 其所观察到的气体速度也将不同, 这一点已从上面的讨论中得出, 不难设想, 随之而来的与速度直接有关的动能也将有所区别。在绝对观察者看来, 气体微团具有速度 $\mathbf{C}$, 其质量为 m , 那么, 动能将是 $\frac{1}{2} m C^2$, 这一动能是绝对观察者所观察到的, 我们称为绝对动能; 完全类似, 对相对观察者而言, 他所观察到的速度为 $\mathbf{w}$, 因而其动能为 $\frac{1}{2} m w^2$, 这一动能我们称为相对动能。

由于转轮以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转, 因而迫使转轮中气体形成一牵连速度场。这一牵连速度场 $\mathbf{u}(\mathbf{r}_p, t)$ 的分布为 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p$ 。这样, 由于牵连运动形成的动能是 $\frac{1}{2} m (r\omega)^2 = \frac{1}{2} m u^2$, 我们称它为牵连动能 (这里 $u = r\omega$, 为牵连速度矢量的模)。

上面我们分析了速度的相互转换关系。在此基础上, 再进一步分析加速度。

从加速度的定义, $\frac{D\mathbf{C}}{Dt}$ 表示绝对加速度而 $\frac{D\mathbf{w}}{Dt}$ 则是相对加速度。下面, 我们先求得它们