财经应用数学

程红 主编

24.0

哈尔滨出版社

(黑)新登字第12号

责任编辑：丁朝江
封面设计：王　东

财经应用数学
主　编　程　红
副主编　吕作东　路国富

哈尔滨出版社出版发行
群力印刷厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/16. 印张 13 · 字数 300 千字
1994 年 10 月第 1 版　1994 年 10 月第 1 次印刷
印数 1—3000

ISBN　7-80557-722-6/G · 157　定价：8.00 元

前　言

本书是作者受哈尔滨市教委的委托，为财经类成人高校所开设的财经应用数学课程而编写的教科书。本书也可做为经济工作者的参考资料。

财经应用数学做为一门基础课，一般都需要180－240学时的时间，而我们现在大多只安排57－114学时的时间。这就需要恰当地设计课程体系、组织教学内容。为此我们编写了这本融基础与应用为一体，可在57－114学时内学完的财经应用数学教科书。

在本书编著上作者根据多年来针对财经应用数学所进行的教学研究和教学改革两方面的工作经验，本着“既要体现现代科学的发展水平，又要适合社会发展、专业需要和成人特点”的宗旨，采取了“精、新、实”的编写方针，这正是本书有别于其它相关出版物的重要特征。

本教程分别选用了线性代数、线性规划和概率统计这三科现代应用数学的内容。而且正像本书的名字一样，我们是有所侧重地分别精选了这三个学科的基础知识、基本方法和经济应用这三方面的内容，以满足目前经济数学的研究和应用之急需。

本教程采用“模块式”结构设计，不论是通篇、或是单篇，还是重新组合“模块”，都能构成一个完整的教学体系。其中第一篇需要15～21学时，第二篇需要42～60学时，第三篇需要30～40学时，三篇通讲需要114学时。若在三篇中去掉第四章、第八章等内容后可用于90学时的教学；选择第一篇前三章和第二篇可用于76学时的教学；选择第一篇前三章和第二篇五～七章，或选择第一篇和第三篇可用于57学时的教学。

本教程采用一套“公理化体系”，即将一些必须的基本定理用公理的形式给出。从而避免了一系列令人生畏的定理证明，由此也省掉了为了这些定理的推理所用的另一些定理及其证明。如此作法之目的，不仅是为了使本教程更加简明易读，更重要的是为了突出“应用”这个特点。

本教程的教学重点与其它出版物的区别在于它不是侧重于原理推导和各种计算方法的技巧性训练，而是侧重于如何运用这些方法解决社会实际中的经济问题；以及利用实际问题加深理解和掌握有关概念和方法。为此我们除了例题和练习题侧重于实际应用问题之外，还增加了大量有关经济方面的知识和实例。

在本书编著过程中，作者参考了若干有关方面的教科书和研究论文，而且有些内容为本书所引用，在此向有关作者表示感谢。由于本作者水平有限，在应用数学这一领域内的学识也很肤浅，书中难免会有谬误，恳请读者批评指正。

编者

1994. 5.

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　线性规划

第三篇　概率统计

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一篇　线性代数

第一章　行列式

行列式是线性代数的一个基础内容。本章将引进二阶、三阶行列式以及 n 阶行列式的概念，并介绍行列式的主要性质和行列式按行（列）展开法等内容。

§1.1　二阶、三阶行列式

我们先给出 n 阶行列式的一个形式定义：

定义 1.1　将由 n 行、n 列共 n^2 个元素组成的形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的式子称为 n **阶行列式**，记为 D（或特别地记为 D_n）。其中 a_{ij} 称为行列式 D 的位于第 i 行、第 j 列的元素。

比如

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

分别为二阶和三阶行列式，这是行列式中最简单、最基本的行列式。

为了计算上的方便，我们在行列式的两条对角线中，特别地称“$a_{11} \leftarrow\ \rightarrow a_{nn}$”为**主对角线**，而称“$a_{1n} \leftarrow\ \rightarrow a_{n1}$”为**次对角线**，如图 1－1 所示。

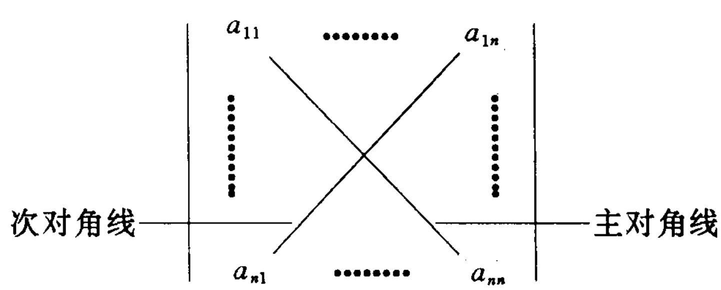

图 1－1

定义 1.2　二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

由(1.1)式可以看出,二阶行列式可以表示为两项的代数和,而且每一项都是它的对角线上的两个元素乘积。因此,定义1.2也可叙述为:二阶行列式等于两项乘积的代数和,主对角线上两元素乘积取正号,次对角线上两元素乘积取负号。这就是所谓二阶行列式的**对角线法则**。

例1.　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -4\end{vmatrix}$$

解:　$D=-8-15=-23$

定义1.3　三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}\quad(1.2)$$

三阶行列式所表示的的六项的代数和,也可用对角线法则来叙述:主对角线三个元素相乘取正号,次对角线三个元素相乘取负号,如图1－2所示。

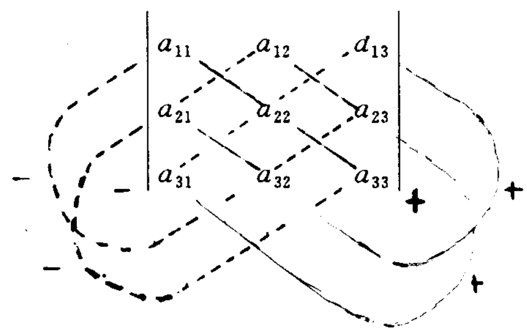

图1－2

例2.　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

解:$D=1\times2\times1+2\times1\times2+3\times3\times3-3\times2\times2-2\times3\times1-1\times3\times1$

$=2+4+27-12-6-3=12$

例3　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

解:$D=3\times(-1)\times(-1)+1\times2\times1+2\times1\times(-1)-(-1)\times(-1)\times1-1\times2\times(-1)-2\times1\times3=-2$

§1.2　n阶行列式

在这一节里,将给出一般的n阶行列式的定义。为此,我们先介绍几个相关的概念——即四个名词:

排列:由n个不同的元素$1,2,3,\cdots,n$排成的任一有序数组,称为一个n级全排列,简称n级

列。

例如　1　2　3　4 是一个 4 级排列，

　　　4　3　2　1 也是一个 4 级排列，

　　　5　2　3　4　1 是一个 5 级排列。

排列总数：n 级排列的总数用符号 P_n 表示。我们自然会提出这样的问题：n 级排列的总数共有多少个？例如 4 级排列的总数有多少个？

一般地有以下结论：

n 级排列的总数 P_n 为 $n!$ 个。

这是很容易理解的，因为从 n 个不同的元素 $1,2,\cdots,n$ 中任取一个作为 n 级排列的第一个元素，共有 n 个取法；然后从余下的 $n-1$ 个元素中任取一个作为 n 级排列的第二个元素，共有 $n-1$ 个取法；…；最后余下一个元素取作 n 级排列的最后一个元素，所以总共有 $n(n-1)\cdots 1 = n!$ 个取法。

例如由 1,2,3 这三个数码可以排出 $3! = 6$ 个 3 级排列，它们是：1　2　3，1　3　2，2　1　3，2　3　1，3　1　2，3　2　1。

一般地，我们将一个 n 级排列记为 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，其中 i_1 是 $1,2,\cdots,n$ 中的某一个数，i_2 是余下的 $n-1$ 个数中的某一个数，…。例如当排列为 3　2　4　1 时，表示 i_1 为 3，i_2 为 2，i_3 为 4，i_4 为 1；当排列为 5　1　4　2　3 时，表示 i_1 为 5，i_2 为 1，i_3 为 4，i_4 为 2，i_5 为 3。

排列的逆序：在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有某个较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面，就称 i_t 与 i_s 构成了一个逆序。

例如在 5 级排列 1 2 3 5 4 中，较大的数 5 排在较小的数 4 之前，就称 5 与 4 为一个逆序。

又如在 3 级排列 3 1 2 中，较大的数 3 排在较小的数 1 之前为一个逆序，3 在 2 之前也是一个逆序。即 3 级排列 3　1　2 中有两个逆序。

排列的逆序数：一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数，称为此排列的逆序数，记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$

由于 5 级排列 1　2　3　5　4 中，只有一个逆序，所以

$$N(1\quad 2\quad 3\quad 5\quad 4) = 1$$

又由于 3 级排列 3　1　2 中，共有两个逆序，所以

$$N(3\quad 1\quad 2) = 2$$

求一个排列的逆序数的方法是：先求第一个元素 i_1 的逆序数 N_1，再求第二个元素 i_2 的逆序数 N_2，…，最后求第 $n-1$ 个元素 $i_n - 1$ 的逆序数 $N_n - 1$，将它们加起来即为已知排列的逆序数。即

$$N(i_1i_2\cdots i_n) = N_1 + N_2 + \cdots + N_{n-1}$$

奇排列、偶排列：如果 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 为奇数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列；如果 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 为偶数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为偶排列等。

例如 n 级排列 1　$2\cdots n$ 为偶排列，3 级排列 3　1　2 为偶排列，5 级排列 1　2　3　5　4 为奇排列。

例 1　计算 $N(3\quad 2\quad 1\quad 4\quad 5)$ 和 $N(3\quad 4\quad 1\quad 2\quad 5)$

解：$N(3\quad 2\quad 1\quad 4\quad 5) = 2 + 1 = 3$

　　$N(3\quad 4\quad 1\quad 2\quad 5) = 2 + 2 = 4$

由前一节讲的二阶、三阶行列式的定义，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

我们可以从中找出以下的规律性：

(1) 二阶行列式是两项的代数和，三阶行列式是 6 项的代数和；

(2) 二阶行列式中每一项是两个元素的乘积，它们分别取自不同的行和不同的列，三阶行列式中每一项是三个元素的乘积，它们也是分别取自不同的行和不同的列元素之积；

(3) 每一项的符号是：当这一项中元素的行指标按自然数顺序排列后，如果元素的列指标排列为偶排列，则取正号；为奇排列，则取负号。

于是我们可以根据这个规律给出 n 阶行列式的定义。

定义 1.4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3}$$

其中记号 $\sum$ 为连加号(求和号)，$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项。

n 阶行列式有时简记为记号 $|a_{ij}|$。

n 阶行列式表示 $n!$ 项的代数和，每一项是取自不同行和列的 n 个元素的乘积，各项的符号是：当这一项中各元素的行指标按自然数顺序排列后，如果列指标为偶排列，则取正号；为奇排列，则取负号。

当 $n = 2$ 和 $n = 3$ 时，这样定义的二阶、三阶行列式与前一节用对角线法则定义的是一致的。

当 $n = 1$ 时，一阶行列式为 $|a_{11}| = a_{11}$，例如 $|5| = 5$，$|-2| = -2$。此时记号与绝对值的记号容易混淆，要根据它在不同的场合来区别。

当 $n = 4$ 时，4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

是 $4! = 24$ 项的代数和(而不是 8 项)，因为取自不同行和列的 4 个元素的乘积的项恰为 $4!$ 项(排列总数)。在总共 24 项中，除了按对角线法则所确定的 8 项之外，还有另外 16 项，例如 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 也是它的一项，因为它是取自不同行不同列的 4 个元素的乘积。但 $a_{11}a_{21}a_{32}a_{43}$ 就不是 4 阶行列式的一项，因为元素 a_{11} 和 a_{21} 都取自第 1 列。

这就是说，根据 n 阶行列式的定义，4 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

$$= (-1)^{N(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^{N(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + \cdots + (-1)^{N(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

关于 n 阶行列式的定义，读者必须弄清它的三个要点：

(1) 是 $n!$ 项的代数和；

(2) 每一项是取自不同行和列的 n 个元素的乘积(这样的项恰有 $n!$ 项);

(3) 每一项的符号是:当其元素的行指标按自然数顺序排列后,如果列指标排列为偶排列,则取正号;如果为奇排列,则取负号。

为了熟悉这个定义,让我们看看下面的几个例题。

例 1　在 4 阶行列式中,$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项应取什么符号?

解:这一项各元素的行指标是按自然数顺序排列的,而列指标排列为 4　3　2　1。

$\because N(4\ \ 3\ \ 2\ \ 1)=3+2+1=6$,$\therefore (-1)^{N(4\ 3\ 2\ 1)}=(-1)^6=+1$。

即排列 4　3　2　1 为偶排列,所以这一项应取正号。

请注意:这一项是次对角线上的元素之积,如按对角线法则应取负号。这就矛盾了!那么到底应取什么符号?答案是应按 n 阶行列式的定义而确定为正号。这一点是最容易弄错的。

显然,当 n 阶行列式的所有一般项的列指标均按自然数排列时,(1.3) 式将表示成:

$$D=\sum(-1)^{N(i_1i_2\cdots\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots\cdots a_{i_nn} \tag{1.4}$$

而当各项的行指标和列指标均不是按自然数顺序排列时,(1.3) 式将表示为:

$$D=\sum(-1)^{N(i_1i_2\cdots\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.5}$$

例 2　计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值(其中 $a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n$)。

解:由定义,它的值应是 $n!$ 项的代数和。但在这些项中,也只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不等于零,其余各项的值均等于零,因为其余各项中至少有一个元素为零。

事实上,当我们在第一列中取不为零的元素 a_{11} 作为某项的第一个元素后,此项的第二个不为零的元素就只能取 a_{22} 了(虽然 a_{12} 可能不为零,但它与 a_{11} 在同一行,不是行列式的一项,不能取),同理,第三个不为零的元素只能取 a_{33},…,最后取 a_{nn}。所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

结论:上三角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积。

这是行列式计算的基本原理。同时由行列式的定义不难看出:如果一个行列式有一行(或一列)的元素全为零,则此行列式的值必为零。

§1.3　行列式的性质

除了二阶、三阶行列式之外,直接用定义去计算行列式的过程大都比较麻烦,为了能够简便地计算行列式的值,我们在这节里将介绍行列式的一些主要性质,以便化简行列式的计算。

我们先引进行列式转置的概念。

定义 1.5　将行列式 D 的行与列依次对调后,所得行列式称为行列式 D 的**转置**,记为 D^T。

例如:设

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$D=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&2&5\\4&7&6\end{vmatrix}=-8$$

则

$$D^T=\begin{vmatrix}2&1&4\\3&2&7\\4&5&6\end{vmatrix}=-8$$

性质 1. $D=D^T$

性质 1 说明了在行列式中，行与列的地位是对称的、平等的。即凡是有关行的性质，对列也同样成立。反之亦然。

性质 2. 在行列式中，某两行(或两列) 交换位置后，行列式的值反号。

例如：设

$$D=\begin{vmatrix}2&1&5\\3&4&7\\0&8&6\end{vmatrix}=38$$

则
$$D_1=\begin{vmatrix}3&4&7\\2&1&5\\0&8&6\end{vmatrix}=-38$$

$$D_2=\begin{vmatrix}7&3&4\\5&2&1\\6&0&8\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4&3&7\\1&2&5\\8&0&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4&7\\2&1&5\\0&8&6\end{vmatrix}=D_1=-38$$

又如：设

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\-4&5&7\end{vmatrix}$$

由于 D 中第一、二两行元素相同，对调 D 的第一、二行后 D 不变，然而由性质 2 又知，对调后的行列式应与原行列式 D 符号相反。即

$$D=-D$$

从而

$$D=0$$

一般地有

推论：若行列式的两行(列) 元素相同，则行列式的值为零。

性质 3. 用数 k 乘行列式的一行(列)，等于以数 K 乘以行列式。

比如：$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\kb_1&kb_2&kb_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$

即：行列式中某一行(列) 元素的公因子，可以提到行列式的前面。

性质 4. 将行列式某一行(列) 的所有元素同乘数 k 后，加到另一行(列) 的对应元素上去、行列式的值不变。即：

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\times k=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\ka_2+a_3&kb_2+b_3&kc_2+c_3\end{vmatrix}$$

性质 4 常用来将行列式主对角线以下的元素全化成零，形成一个"上三角形行列式"，我们已经知道这种行列式的值等于主对角线上的元素之积。这是行列式计算的基本方法，在用电子计算机计算行列式的值时，也是用这种方法，这种算法被称为"信号流计算法"。

例 1. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

解：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} \times(-2), \times(-4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -14 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 8$

例 2. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

解：$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} \times 2, \times(-3), \times(-1)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -17 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & -5 \end{vmatrix} \times 7, \times 6$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -11 \end{vmatrix} \times 3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -60$$

§1.4 行列式按行(列)展开

四阶和四阶以上的行列式统称为"高阶行列式"，必须注意，高阶行列式的求值不适用"对角线法则"(这个法则是二、三阶行列式的特有法则)。在这一节里我们将介绍如何用高斯定理来计算这种行列式的值。这种计算方法又称为行列式按行(列)展开法。

为了给出高斯定理，首先引进余子式和代数余子式的概念：

定义 1.6　在 n 所行列式 $|a_{ij}|$ 中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素划去后，所剩下的元素按原次序所构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；并称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{1.6}$$

例如:对于三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} & & \vdots & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & & \vdots & \\ \cdots a_{21} \cdots & a_{22} \cdots & a_{23} \cdots & \\ & & \vdots & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ & & \vdots & \end{vmatrix}$$

元素 a_{23} 的余子式为:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

代数余子式为:

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式中各元素的代数余子式前的正负号,可由该元素在行列式中的位置从下列记号中确定

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

四阶行列式中元素的代数余子式的正负号可由

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

确定.这里左上角的元素 a_{11} 的代数余子式前的符号恒为正,其它的符号都是正负相间排列的,这个规律对 n 阶行列式中元素的代数余子式也是正确的.

根据三阶行列式的定义,

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \end{aligned}$$

又由(1.6)式,于是有

$$D_3 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{1.7}$$

此式亦称为三阶行列式按第一行展开式。利用(1.7)式及行列式的性质2(两行互换),又有

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}.$$

即

$$D_3 = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \tag{1.8}$$

此式称为三阶行列式按第二行展开式，同理可得按第三行展开式为

$$D_3 = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \tag{1.9}$$

综合(1.7)～(1.9)式，即得三阶行列式按各行展开式为

$$D_3 = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \quad (i = 1,2.3) \tag{1.10}$$

利用性质1，又可得三阶行列式按各列展开式：

$$D_3 = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \quad (j = 1,2,3) \tag{1.11}$$

由此可以看出，三阶行列式等于某一行(或列)的三个元素与其代数余子式的乘积之和。可以验证，某一行(或列)元素与另一行(或列)元素的代数余子式的乘积之和为零。比如

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{33} = 0$$

$$a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} = 0$$

例1　对于

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

取第二行元素：$a_{21} = 4, a_{22} = -1, a_{23} = 2$，它们的代数余子式分别为：

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

于是

$$D = 4 \times 7 + (-1) \times (-5) + 2 \times (-3) = 27.$$

又

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, A_{32}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8, A_{33}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

则

$$4 \times 5 + (-1) \times 8 + 2 \times (-6) = 0.$$

更一般地，对于 n 阶行列式，我们有

公理1.1　对于 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$，有

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1,2\cdots,n) \tag{1.12}$$

或

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1,2\cdots,n) \tag{1.13}$$

其中(1.12)式和(1.13)式分别称为 D 按第 i 行和第 j 列的展开式。

公理1.2　对于 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$，有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{sk} = 0 \quad (i \neq s) \tag{1.14}$$

和

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kt} = 0 \quad (i \neq t) \tag{1.15}$$

将公理1.1和1.2的(1.12)～(1.15)四个式子归纳在一起，即得

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{sk} = \begin{cases} D & i = s\text{ 时} \\ 0 & i \neq s\text{ 时} \end{cases} \tag{1.16}$$

和

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kt} = \begin{cases} D & j = t \text{ 时} \\ 0 & j \neq t \text{ 时} \end{cases} \tag{1.17}$$

这就是所谓的**高斯定理**。

在利用高斯定理的第一部分——即行列式按行(列)展开式计算行列式时,常针对零元素较多的某一行(或列)来展开之,有时也常结合行列式的性质 4 一起用,这样计算起来会更简便一些。

例 2　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -10 & 9 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

解:先按第三行展开,注意余子式前面的符号,则

$$D = -2\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ -10 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

再按第一行展开,于是得

$$D = -2 \times 6\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

例 3　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

的值。

解:观察并分析行列式 D,发现 D 的第三行有一个零元,而且其它三个元素也较简单,因此取第三行为"基准行",并以 $a_{33} = 1$ 为"主元素"。利用性质 4,在基准行中除主元素外,其余元素均化成零,然后再按第三行展开,即

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -10\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

注意,若此题直接按第三行展开,将展成三个三阶行列式的代数和,如此以来,非但没有简化,反而加繁了行列式的计算,因此不足取。

习题一

1. 单项选择题:

(1)　当 $n = ($　　$)$ 时,$1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\ \cdots(2n)$ 为奇排列。

A. $2k$　　B. $4k$　　C. $4k+1$　　D. $4k+2$

(2)　在 n 阶列式的定义

$$D=\sum(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

中 $\sum$ 为(　　)项的求和号。

A. n　　B. $n!$　　C. n^2　　D. $2n$

(3)　对于元素 a_{i6} 的余子式和代数余子式，有(　　)成立。

A. $A_{i6}=M_{i6}$　B. $A_{i6}=-M_{i6}$　C. $A_{i6}=(-1)^iM_{i6}$　D. $A_{i6}=(-1)^{i+1}M_{i6}$

(4)　对于 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$，有 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=($　　$)$

A. 0　　B. D　　C. $0(i=j)$ 或 $D(i\neq j)$　　D. $0(i\neq j)$ 或 $D(i=j)$

(5)　设 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$，则　$D_1=\begin{vmatrix}2a_{11}&2a_{13}&2a_{12}\\2a_{31}&2a_{33}&2a_{32}\\2a_{21}&2a_{23}&2a_{22}\end{vmatrix}=($　　$)$

A. $2D$　　B. $-2D$　　C. $8D$　　D. $-8D$

2. 计算下列二阶、三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix}8&6\\2&-5\end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix}\dfrac{1+t^2}{1-t^2}&\dfrac{2t}{1-t^2}\\\dfrac{2t}{t^2-1}&\dfrac{1+t^2}{t^2-1}\end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix}1&1&1\\3&1&4\\8&9&5\end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix}4&-4&2\\6&-1&3\\5&-3&2\end{vmatrix}$

3. 求下列各排列的逆序数，并确定其奇偶性：

(1)4　2　3　1　5　　(2)6　5　8　2　7　1　3　4

4. 决定以下各项在相应行列式中所带的符号：

(1)$a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$　(2)$a_{51}a_{32}a_{63}a_{44}a_{15}a_{26}$　(3)$a_{25}a_{34}a_{51}a_{72}a_{66}a_{17}a_{43}$

5. 用行列式的性质计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&1&1\end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix}3&1&0\\2&-1&2\\1&1&1\end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\-2&3&-8&-1\\3&1&-2&4\\1&4&2&-5\end{vmatrix}$

6. 自选方法计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix}1&3&5&-2\\1&5&-9&8\\5&18&4&5\\2&7&3&1\end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix}7&1&3&7\\0&0&-4&0\\1&1&-1&-2\\4&2&0&-5\end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix}1&2&2&3\\0&0&-2&-2\\-1&-1&-1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix}1&2&0&0&\cdots&0\\1&3&2&0&\cdots&0\\0&1&3&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&3\end{vmatrix}$　(n 阶)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com