

高等学校试用教材

误差理论与实验设计

天津大学 杨惠连 编

GAO DENG XUE
XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

目 录

绪论	1	§ 4-7 微小误差取舍原则	100
第一章 基本概念	3	思考题与习题	101
§ 1-1 测量的定义及分类	3	第五章 误差的合成	103
§ 1-2 计量的基本单位和单位制	6	§ 5-1 概述	103
§ 1-3 有关测量误差的基本概念	10	§ 5-2 随机误差的合成	104
思考题与习题	24	§ 5-3 系统误差的合成	120
第二章 随机误差	25	§ 5-4 误差的综合	124
§ 2-1 概述	25	思考题与习题	125
§ 2-2 随机误差的统计特性	25	第六章 实验数据的处理	126
§ 2-3 测量列的精度参数	29	§ 6-1 有效数字	126
§ 2-4 测量结果的表示方法	37	§ 6-2 可疑数据的剔除	129
§ 2-5 对测量列标准误差的其它估计	40	§ 6-3 实验结果的表示方法	134
§ 2-6 仪器灵敏阈对标准误差的影响	47	§ 6-4 插值法	157
§ 2-7 测量次数的确定	49	思考题与习题	161
§ 2-8 权与不等精度测量	53	第七章 实验的设计	162
思考题与习题	57	§ 7-1 概述	162
第三章 系统误差	58	§ 7-2 单因素方法	163
§ 3-1 系统误差的性质和分类	58	§ 7-3 多因素方法与正交实验设计	171
§ 3-2 发现系统误差的简单方法	60	§ 7-4 实验结果的分析	179
§ 3-3 消除或减弱系统误差的方法	76	思考题与习题	192
思考题与习题	83	附表	193
第四章 误差的传递理论	84	附表一 误差函数 $\text{erf}(h)$ 表	193
§ 4-1 概述	84	附表二 χ^2 分布表	194
§ 4-2 间接测量中误差的传递	84	附表三 标准误差的置信限 (χ^2 分布)	195
§ 4-3 不等精度间接测量误差的计算	91	附表四 t 分布表	195
§ 4-4 间接测量中直接被测量的相关问题	92	附表五 F 分布表	196
§ 4-5 误差传递定律在函数关系未知 情况下的应用	96	附表六 正交表	199
§ 4-6 间接测量中误差的分配	97	参考文献	203

绪 论

随着科学技术的飞速发展和生产建设规模的不断扩大,在进行各种测量工作中,误差理论所涉及到的问题越来越得到人们的重视。为了明确学习“误差理论与实验设计”的目的,现从几个方面介绍它们的意义。

掌握误差理论的基本概念和有关知识,可以对所进行的各种测量做进一步的理解,并对测量结果作出科学的评价。例如,首先应当明确所进行的测量是否能够考虑和研究测量误差问题。若进行测量的精度过低就无法考虑测量误差。若所进行的测量具有一定的精度,则要根据测量误差的需要来确定如何安排测量?需要进行几次测量?对测得值应如何处理?用什么形式给出测量结果的最佳表达式等。

掌握误差理论还能指导我们对测量提出合理的要求。若对测量提出过高的不合理的精度要求,就会造成人力、物力的浪费,严重时甚至无法实现测量。若对测量忽略了精度要求或提出的测量精度过低就不能满足实际需要。从满足需要的测量精度来考虑,选用合适的测量仪器和仪表,使其具有合适的测量范围,并能充分利用测量仪表所具有的精度,这些都是误差理论所研究的内容。

在工业自动化仪表行业的发展过程中,当前也面临着被测参数不断增加、对测量精度的要求不断提高、被测参数的绝对值向“两极”发展的趋势。为了满足各种工业对测量提出的这些新要求,自动化仪表就不断采用新原理,新技术和新型元器件,进行新产品的开发和研制,同时对老产品也要进一步提高和完善。在这些工作中都需要对测量仪表的精度进行标定。为了考核和校对各种测量装置的技术性能,在进行仪表设计时必须对仪表内部各环节允许误差进行合理的分配。这些都需要用到误差理论的有关知识。我国计量法的颁布与实施,作为工业自动化仪表的技术工作者,在执行和贯彻计量法的工作中,若不能很好地掌握误差理论方面的有关知识,就很难胜任自己所承担的工作。

误差理论也是各种学科的科技工作者需要掌握的基础技术知识。过去进行的不考虑精度指标的实验,在科学技术向高、精、尖发展,对实验要求不断提高和研究问题不断深化的情况下,已不能满足实际需要。目前,进行任何科学实验都应对实验装置进行精度的标定和考核,对实验的条件参数进行测定,并根据实际需要来选用能满足精度要求的测量仪表。这样才能对实验结果做出可信程度的评定。显然,从实验测得数据到得出结论,还需要具备有关数据处理的知识,这样才能保证实验结果符合客观实际。所以误差理论应该是科技工作者都应掌握的知识。

误差理论是伴随着测量学不断丰富和发展而建立起来的一门学科。它既是一门古老的学科,又是一门新的学科。由经典的概率论应用到实践开始,就确立了误差理论的基础,随着概率论、数理统计学的发展,误差理论也得到不断的充实和完善。但是到目前仍有许多误差理论问题,还有待于做进一步的研究。例如,对于服从非正态分布规律的随机误差、对于未定系统误差以及对于误差合成问题等,都还不能得到令人满意的研究结果。有一些问题还只能用原始的办法来解决实际问题。再就是各种行业在应用误差理论过程中,造成了误差理论

的名词术语、基本概念的不统一,有些过去应用的概念今天看来还有不确切的地方,目前国内也正在做这方面的工作,以达到名词术语统一、基本概念确切的目的。

掌握误差理论。过去只是被动地处理测量和各种实验所获取的数据。为了节约人力和物力,若能够在进行实验之前,主动地考虑实验方案的安排,就能用较少的实验或测量次数得到所要求的结果。因此把实验的设计也列入本课的内容。

本课程从内容上大致可分为四类:第一类是一些基本概念,如对测量的分类,测得值的表示方法,计量单位,测量误差及其表示方法,有关精度及不确定度的概念等。第二类是误差理论中比较成熟、理论系统性较强、长期应用得到比较公认的内容,其中包括固定量测量的随机误差、间接测量的误差传播理论等。第三类是资料较少、理论系统性较差、甚至如何处理目前还存在意见分歧的内容,如未定系统误差和误差合成问题。第四类就是有关实验数据处理和实验方案的设计。由于有关这类问题内容十分丰富,本书只能本着实用的原则,在内容上进行了许多删简。

通过对本课程的学习,应达到下述目的:

- (1) 正确理解测量精度及测量误差的有关概念。
- (2) 熟练掌握对一固定量进行静态测量的测量误差评定方法。
- (3) 了解各种精度参数计算公式的确立前提条件和所得结论的物理意义。
- (4) 掌握对静态测量所得实验数据的一般处理方法。
- (5) 初步掌握实验方案设计方法,对常规的实验能够进行实验方案的设计。

本教材基本上是按循序渐进的原则编写的,但有些概念很难一次交待清楚,必须通过后面有关章节的学习才能加深对它的理解。因此在学习过程中要加强前后章节在内容上的联系,不仅要学懂,更重要的是联系实际会用。这样才能达到学以致用目的。

第一章 基本概念

在介绍有关理论误差之前，需要把研究测量误差应当明确的前提条件和必须掌握的基本概念加以说明。

§ 1-1 测量的定义及分类

测量是研究测量误差的前提。研究测量误差的目的就是设法评价测量结果的可信程度。可信程度的高低是与测量误差的大小直接相关的，测量误差越小，结果越可信，反之，可信程度就低。下面介绍与误差有关的测量问题。

一、测量的定义

测量就是人们借助专门设备，通过实验的方法，对客观事物取得测量结果的认识过程。它是通过物理实验把一个量（被测量）和作为比较单位的另一个量（标准）相比较的过程。

根据实际需要，测量结果不外乎有下面三种形式：

1. 带有单位的数值；
2. 在固定坐标上给出的曲线；
3. 按一定比例给出的图形。

以上任一形式的测量结果都可用下式表示：

测量结果 = 数值（被测量与标准的比值）× 单位（量纲）

从这个测量的基本公式可以看出，测量结果应包括两部分：

数值是被测量的测得值，它可以是具体的数值，也可以用线段的长度或图形的大小来表示，实质上它就被测量与其计量标准（单位）的比值。在测量中还应包括表示测量误差大小的精度参数。

单位就是得到公认的、根据定义能得到数值为 1 的被测量的基本量。目前多数国家都采用国际单位制。它是由国际计量大会批准，由各国计量权力机关执行。我国已颁布计量法，确定了法定计量单位。同一被测量可用不同的测量单位来表示，但应注意根据单位间的换算关系，相应的改变测得值。

测量单位都有名称，作为测量结果一般都是有各数。所以给出的测量结果，绝对不能忽略测量单位。虽然在一些特殊情况下给出的测量结果，直观看可不带测量单位，例如分贝数、光的折射率等，但是这些物理量本身的定义，仍包含与标准量相比的内容，故一般不带单位的数值，不能明确的表示测量结果。

二、测量方法的分类

为了对各种要求的测量有个系统的了解，特别是由于对测量的不同要求，处理测量误差也有不同的考虑，故将与处理误差有关的各种测量方法介绍如下：

根据对测量结果精确度要求不同，可把测量分为：

1. 工程测量 工程测量是一般工作中所进行的测量，对测量结果只要求取得测量值就

能满足对测量的要求，不需要考虑测量误差的大小或估计测得值的可信程度。用于这种测量的设备或仪器，其灵敏度及精确度都比较低，对进行测量环境几乎没有什么特殊要求，给出的测得值也比较稳定。它经单次测量或多次测量给出的测量结果完全是一样的，所以这种测量不需要考虑测量误差问题。

另一种工程测量是对测量结果只需要考虑误差的上限值（误差存在的最大变化范围）的测量。对取得的测量结果，不需要对测量误差做精细的分析和考虑，只需给出测量误差的极限值就能满足要求。用于这种测量的仪器和设备，是在出厂前或长期使用后经过标定或校对而得到测量误差极限值，并在铭牌或说明书中标注出来。所以用这种仪器或设备经过单次测量所得值即为测量结果，把标注出的测量误差极限值作为测量结果的误差。在一般生产现场或一般科学实验中所进行的测量，多为工程测量。

2. 精密测量 凡是经过测量取得测量结果后，并要求估计出测量结果的误差确切值的测量，则为精密测量。这种测量是在误差理论指导下，需要经过反复多次的测量过程，所用的测量仪器和设备应具有一定的精度和灵敏度，在每次测量中能够反映出测量误差的变化和存在。在测量完成后把所得数据根据误差理论进行处理，计算出最佳测量结果，并估计出表示测量误差的确切值。进行精密测量的条件（环境）要求比工程测量的严格，多是根据测量仪器的使用条件，在实验室内进行，所以也叫实验室测量。

所以在测量之前，首先应当明确对测量结果的精度要求，应当属于哪种测量。这对于考虑测量方案、选用测量仪表和设备、对测得值进行处理，都是很重要的。采用精密测量得到的测量结果精度较高，但它所用的测量设备精度也高，测量设备对其工作环境的要求也比较严格，因此所付的代价也大。而工程测量得到的测量结果精度较低，所用的测量设备简单，价格便宜，操作也比较简便，故所付的代价也比较小。在实际工作中，不仅要考虑所付代价大小问题，而且要选择合适的测量仪表和测量方法，否则会得到事与愿违的结果。例如，工程测量所用的测量设备（如日常用的各种量具）得不到精确的测量结果，根据测得值也无法估计测量误差的确切值。反之，采用精密测量的测量设备，在进行工程测量的环境下也不能正常地进行工作，甚至会造成测量设备的损坏。所以采用精密的测量设备进行测量，若不能保证测量设备对环境提出的要求，也不会得到精确的测量结果。因而根据实际的需要和可能，合理地确定采用哪种测量是极为重要的。

根据取得测量结果的方法不同，可把测量分为：

1. 直接测量 把被测量与作为测量标准的量直接进行比较，或用预先按标准校对好的测量仪器对被测量进行测量，通过测量能直接得到被测量数量大小的测量结果，称此种测量为直接测量。直接测量可用下面一般公式来表示：

$$y = x$$

式中 y ——被测量；

x ——测得值。

在工程测量中，如对时间、长度、质量进行的测量和用专用仪表对压力、温度、湿度进行的测量都是直接测量。

2. 间接测量 被测量不能用直接测量的方法得到，而必需通过一个或多个直接测量值，利用一定的函数关系运算才能得到，此种测量称为间接测量。间接测量可以用下面的一般公式来表示：

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

式中 y ——被测量;

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ——各直接测量值。

间接测量在科学研究中用得最多,因为在许多情况下,用直接测量的方法不能得到被测量,或是能够测得但测量过程比较复杂,不如采用间接测量方便、精确,例如,天文学方面各种参数的测量,核子物理研究中对原子内部结构参数的测量等。在工业自动化仪表中,对流量计的标定也是通过测量重量或容积与测定时间相比而得到流量值的,这将在误差传递理论中详细地介绍。

3. 组合测量 被测量不能通过直接测量或间接测量得到,而必须通过直接测量的测得值或间接测量的测得值建立联立方程组,通过求解联立方程的办法,才能得到最后的测量结果。这样的测量称为组合测量,它可以用下面的一般公式来表示:

$$F_1(y_1, y_2, y_3, \dots, y_m, x_{11}, x_{21}, x_{31}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{n1}) = 0$$

$$F_2(y_1, y_2, y_3, \dots, y_m, x_{12}, x_{22}, x_{32}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{n2}) = 0$$

...

$$F_m(y_1, y_2, y_3, \dots, y_m, x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{nm}) = 0$$

式中 $F_1, F_2, \dots, F_m$ ——组合测量中 y 与 x 构成的已知函数关系;

$y_1, y_2, \dots, y_m$ ——组合测量中的 m 个被测量;

x_{ij} ——组合测量中第 j 个直接(或间接)被测量的第 i 次测得值,其中
 $i = 1, 2, 3, \dots, n, j = 1, 2, 3, \dots, m$ 。

上述联立方程可通过改变测量条件列出,也可以把被测量 y 用不同的组合参加测量过程而列出,使方程的数目 m 与被测量 y 的个数相等,这样就可以解此联立方程而求得各被测量。

组合测量只用于实验室里和其它特殊场合作为一种特殊的和精密的测量方法,一般用到这种测量方法的机会不多(在大地测量或标准砝码的校对中会用到这种测量方法)。为了熟悉组合测量,现举一例来说明这种测量方法的应用。

一个标准线圈的电阻值,与温度变化呈非线性关系,它们的关系可用下式表示:

$$R_t = R_{20} + \alpha(t - 20^\circ\text{C}) + \beta(t - 20^\circ\text{C})^2$$

式中 R_t ——在温度为 t 时的电阻值;

R_{20} ——温度为 20°C 时的电阻值;

α 和 β ——线圈的电阻温度系数;

t ——温度值。

把 α 、 β 和 R_{20} 作为被测量,改变测量条件,取三个不同的温度 t_1 、 t_2 和 t_3 , 相应测得 R_{t1} 、 R_{t2} 和 R_{t3} , 则 t 及对应的 R_t 即为直接测量值。这样列出三元联立方程式,就可求解得到 α 、 β 和 R_{20} 的数值,同时又可避免测量 20°C 时的准确 R_{20} 值。

在 α 、 β 和 R_{20} 已知的情况下,即可用间接测量法测量不同温度 t 时的电阻 R_t 值。而在 α 、 β 和 R_{20} 为未知时,则要用组合测量法求取它们的具体值。

总之,对被测量进行测量不外上述三类测量方法。对某些被测量用一种测量方法就能得出测量结果;但也有些被测量要用上述两种,甚至三种测量方法才能得出测量结果。究竟采用哪种测量方法,需从对测量结果要求的差别、所用测量设备造价是否昂贵、进行测量的操

作是否简便、对测量条件的要求是否苛刻及所付代价的大小等因素来考虑决定。

根据测量条件不同，可把测量分为：

1. 等精度测量 对某一固定被测量进行重复测量，所取得的测量数据，可以认为是在相同的测量精度条件下得到的，这种测量称为等精度测量。对一固定被测量作等精度测量，所得测量数据允许有一定范围的大小变化。但对偏大或偏小的数值，不能判定哪种数值更加接近被测量的真实值，只能取一视同仁的态度，同等对待，即对取得数据的信赖程度是相同的。这是判定是否为等精度测量的重要依据。

2. 不等精度测量 对一被测量进行测量得到的数据，其精确度可判定是不等的，这种测量称为不等精度测量。不等精度测量造成精度不等，可能是由于条件的改变、所用测量设备的不同或更换，也可能数据是用不同的来源得到的。对不等精度的数据应当有特殊的处理方法。

根据被测对象在测量过程中所处的状态，可把测量分为：

1. 静态测量 被测量在测量过程中可以认为是固定不变的，对这种被测量进行的测量称为静态测量。实际上，静态测量就是不需要考虑时间因素对测量的影响，把被测量或是测量误差作为随机变量来研究。

2. 动态测量 被测量是处在随时间不断变化的状态，对这种被测量进行的测量称为动态测量。进行这种测量和处理这种测量得到的数据，就要考虑时间因素对测量的影响，即把测得值或测量误差作为随机过程来进行研究。

上面介绍的四种对测量的分类方法，只是涉及到以后研究测量误差问题首先要弄清楚的基本概念，对各种专业所进行的测量具有共性的问题。有关各种专业的测量学的详细内容，还应当查阅有关的专门著作。根据研究问题的需要也会有不同的分类方法，这一点是应当明确的。

§ 1-2 计量的基本单位和单位制

计量单位是测量结果的重要组成部分，也是不同数量的物理量相互比较的基础。对任何被测量，经过测量能得到被公认的数量概念，其依据就是有得到公认的单位。而单位就是根据定义得到数量值为1的量，现把有关内容简介如下：

一、单位制的由来和发展

以一些基本单位为基础，通过各种物理量之间的联系就组成了单位制。

自1795年4月7日法国颁布了米制条例，到1875年17个国家签定“米制公约”后，世界各国仍无统一的计量制度，各国所使用的单位制仍然比较混乱。解放前，我国根据米制为基础，制定了市制单位制，但与其并行使用的还有英制单位制、静电单位制和电磁单位制。国际间这种计量制度的严重混乱状况妨碍着生产、科学技术和经济文化的交流和发展，因此整顿和建立国际上统一的单位制，则成为比较紧迫的任务。

我国于1959年由国务院正式发布了“关于统一计量制度的命令”确定米制为我国的基
本计量制度。1977年5月27日又颁发了“中华人民共和国计量管理条例（试行）”，确定我国逐步向国际计量单位制过渡。1984年2月27日国务院又颁发了“关于在我国统一实行法定计量单位的命令”明确规定1990年底以前要完成向国家法定计量单位的过渡。而中华人

民共和国法定计量单位的主要内容即国际单位制和国家选定的非国际单位制单位。1985年9月6日由全国人民代表大会常务委员会第12次会议通过,并由国家主席正式命令自1987年7月1日起开始实施的“中华人民共和国计量法”,就是把国际单位制和国家选定的非国际单位制单位,用法律给予确认。

国际单位制的代表符号为SI,即Standard International Unit的缩写。它是经过一段时间逐步建立起来的。

1948年第9届国际计量大会上确定以m(米)、kg[千克(公斤)]、s(秒)、A(安培)为基本单位的单位制。1954年第10届国际计量大会决定采用m、kg、s、A、K(开)和cd(烛光)六个基本单位的单位制。由国际计量委员会专门成立了单位制委员会,经过该委员会1954~1956年的工作,在1956年国际权度局决定将这种单位制命名为国际单位制,并通过了辅助单位和导出单位。此后经过进一步研究和实践,在1960年第11届国际计量大会上正式通过建立国际单位制。后来又经历届大会的修正和补充,到1971年第14届大会,把国际单位制的基本单位增加到七个,并确定了二个辅助单位和一些导出单位。随着科学技术的发展,各国计量工作者的共同努力,国际单位制也在不断地完善和提高。1983年第17届国际计量大会,又对长度的基本单位“米”的定义作了改进。

按照1969年国际计量委员会的建议1,构成一贯体系(通过系数为1的公式用基本单位表示的单位称为一贯单位,一贯体系即指由基本单位与一贯导出单位组成的一组单位,通常称为一贯单位制)的基本单位、辅助单位和导出单位,构成国际单位制。而用来构成国际单位的十进位倍数单位和分数单位的词头,称为国际单位制词头。

自1971年第14届国际计量大会以来,世界上大多数国家都由政府的有关部门,通过法令或条例正式宣布采用或逐步采用国际单位制SI。正如前面所提到的,我国已正式颁布“中华人民共和国计量法”,保证国际单位制SI在我国的实施。

二、国际单位制的基本内容

从学习误差理论需要了解测量单位的有关知识出发,现就有关国际单位制的一些主要内容简介如下:

(一) 国际单位制的基本单位定义

为了使用上的方便,尽可能少地选择某些独立定义的单位,选定的这些单位是构成其它单位基础的单位,称为基本单位。

1. 长度单位——m(米)

米是光在真空中 $1/299792458$ s的时间间隔内所经路程的长度。

2. 质量单位——kg(千克或公斤)

千克等于国际千克原器的质量。

3. 时间单位——s(秒)

秒是铯-133原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的9192631770个周期的持续时间。

4. 电流强度单位——A(安)

安是一恒定电流,若使此电流通过处于真空中相距1 m的两根无限长而圆截面可忽略的平行直导线内,则此两导线之间产生的力在每米长度上等于 2×10^{-7} N。

5. 热力学温度单位——K(开)

热力学温度“开”是水三相点热力学温度的 $1/273.16$ 。

除以开表示的热力学温度外，也可用摄氏度。它们可按数值方程进行换算。

$$t/^{\circ}\text{C} = T/\text{K} - 273.15$$

式中 t ——摄氏温度；

T ——热力学温度。

6. 物质的量单位——mol (摩尔)

摩尔是一系统物质的量，该系统中所包含的基本单元数与 0.012kg 碳-12 的原子数目相等。

在使用摩尔时应指明基本单元，可以是分子、原子、离子、电子及其它粒子，或是这些粒子的特定组合。

7. 光强度单位——cd (坎)

坎是发射频率为 $540 \times 10^{12}\text{Hz}$ 单色辐射的光源在给定的方向上的发光强度，而且在此方向上的辐射强度为 $(1/683)\text{W/sr}$ 。

(二) 国际单位制的辅助单位定义

国际计量大会尚未规定它们是属于基本单位还是导出单位，称其为“辅助单位”，而且可以随意把它们当作基本单位或导出单位 (1960 年第 11 届国际计量大会，决议 12)。

1. 平面角单位——rad (弧度)

弧度是一个圆内两条半径之间的平面角，这两条半径在圆周上所截取的弧长与半径相等。

2. 立体角单位——sr (球面度)

球面度是一个立体角，其顶点位于球心，而它在球面上截取的面积等于心球半径为边长的正方形面积。

有关我国法定计量单位及其使用规则可参阅国标 GB 3100~3102-86，本书不再介绍。

三、基准与标准

为了保证量值的统一，就需要通过各种基准、标准以及相应的辅助设备，把各种物理量的单位准确地传递下去，一直传递到日常进行测量工作的千万个量具或测量仪器。这样才能保证各种测量结果得到统一。为此，必须通过国家各级计量部门，以法律形式规定一系列检验规程。这些规程应包括：对各级量具的检验方法；进行检验所用的设备；进行检验的步骤并定出接受检验的仪器或量具的误差给出方式等内容。对检验规程的执行，即称为对受检仪器或量具的检定。

保证和传递各种物理量的计量单位，主要是依靠各种基准或标准来实现的，现把有关内容简介如下：

基准是指用当代最先进的科学技术和工艺，以最高的精确度和稳定性建立起来的专门用以规定、保持和复现某种物理量计量单位的特殊量具或仪器。

根据基准的不同性质和用途，通常把一个国家直接按物理量单位的定义复现的最高水平的基准叫做主基准或原器。主基准可用来充当国家基准。为了保证国家基准的精确度不致因经常使用和搬动而降低，还做成有各种专门用途的若干副基准或称为次级基准，它的量值是根据主基准来确定的。一般副基准有这样几种：

为了检验国家基准的完善性，以及在国家基准一旦损坏或失效时有所代替，在副基准中

专门设置了一种作证基准（或称比较基准）。通过它与主基准定期的对比工作，可以判明国家基准与作证基准之间所定义的量值变化情况。当确实判定国家基准量值发生变化时，应当设法（例如通过国际间的对比）恢复它原来的值。

在副基准中，还有专门向下进行量值传递的称为参考基准。为了使用方便，以及对组成基准的不同方案进行比较，参考基准的具体形状、构造等可能与主基准不同。例如，电阻的主基准是一根具有一定形状灌有水银的玻璃管，而副基准则是一组密封的锰铜电阻线圈。

除了主基准、各种用途的副基准外，还有直接向下属标准量具或仪器进行量值传递的工作基准。

一般把主基准划作一级基准，各种副基准划作二级基准，而各种工作基准一般都属于三级基准。应当指出，并不是所有计量单位都已建立各种类别、等级的全部基准，而且基准也不限于具体的实物或仪器，有时也可能是某种特定条件下的标准物质。例如，温度的基准是用纯水在 101.325kPa（即 1 个标准大气压）下固态、液态和气态三相共存的平衡温度 273.15 K，也就是摄氏温度的 0℃。

另外，基准本身的量值并不一定都恰好等于一个计量单位。例如，铯原子时间基准所复现的时间数值并不是 1 s，而是 $(1/9192631770)$ s。直流电压基准所复现的电压值是 1.0186 V 等。

由于基准的制造工艺、结构都很精细，对使用条件都有严格的要求，并且操作往往也很复杂，价格昂贵，不允许经常动用。因此便根据基准复现的精度，制成了不同等级的标准量具或仪器，即通常所谓的标准。这是一些具有一定精度的计量仪器。它在量值传递的使用过程中比基准在使用上方便得多。按其精度高低也可把标准分为一级、二级和三级标准。一级标准的量值是由精度更高的基准来确定。然后把量值由上一级标准向下一级标准进行传递，一直传递到不同精度级别的工作量具或工作仪器。

各种类别、级别的基准、标准和工作用测量仪器或量具，必须按规定的检验周期、检定规程，交上级计量部门进行检定，并发给检定合格证书。没有检定合格证书或证书已超过有效期的量具，其原有说明书或检定合格证书上所标明的精度指标，只能作为参考。用这种量具得到的测量结果，在法律上已失去可信性。

四、目前工业自动化仪表量值的传递情况

工业自动化仪表所进行的各种测量，随着工业生产的发展，特别是各工业部门近年来大量引进的计量装置，其测量参数的种类和测量范围不断扩大。当前，要想得到一个公认的、能够概括出哪些仪表是属于工业自动化仪表的范畴是很困难的。因此，在工业自动化仪表行业中，为实现计量单位的统一，建立和健全计量网点、各种测量参数的基准和标准，也是一项比较艰巨的任务。工业自动化仪表所测各种参数基准和标准的建立情况，相差也比较悬殊。例如，温度、压力基准和标准以及相应的计量网点的建设，基本上能满足实际工作的需要。而流量基准和量值传递的标准还有待于进一步完善和开发。在成分分析仪表中，高纯度标准样气的制备与先进国家相比还存在一定的差距。所以，对于工业自动化仪表实施量值传递任务，还有大量工作要做。当然，这些工作应当由计量部门来完成。对于工业自动化仪表工作者来说，则应了解这些情况，熟悉各地区计量部门所掌握的量值传递精度水平。当实际工作提出的量值精度水平超过地方计量部门所能提供的精度时，可越级提出申请，进行量值传递。当自己研制的仪表或是引进的测量仪表，其测量精度高于当地计量部门所掌握的量

值精度时，应当会同计量部门进行认定，以便征得法律上的承认。

总之，法定计量单位的贯彻和量值的传递不仅是技术问题，而且也是国家的立法问题，特别是涉及到测量结果关系到人民的生命、财产和生产是否受到危害时，更应注意其测量的法律依据。关于这方面内容可查阅“中华人民共和国计量法条款说明（试用）”。作为测量工作者，一定要关心计量工作，随时了解计量工作中各项工作的进展情况，掌握和熟悉有关计量单位的修订和补充的新规定。肩负起贯彻法定计量单位的责任。

§ 1-3 有关测量误差的基本概念

人类对客观事物的认识，总是要经历由浅到深，由低级向高级的发展过程。测量实践也完全符合这样一个认识过程。不论科学技术怎样发展，但在一定时期总会带有局限性。从严格的意义上讲，很难说测量能够完全准确地反映客观的存在。所以说任何测量都带有一定的测量误差，这就是测量误差的普遍存在性。因此，误差理论所研究的只能是测量误差的大小，而绝不是测量误差的有无问题。即使测量误差小到可以忽略的程度，也还是存在着测量误差。从理论上讲，提高测量精度（减小测量误差）的极限，应该是达到被测量的量丧失本身的定义为止。例如，测量一个物体的长度，当所考虑的测量误差比该物体的分子尺寸还小时，则划定物体长度界限的两个端面就无法确定，从而也就丧失了该物体长度的概念。但是在实际测量中，这种理论上的测量精度极限是难于达到的，因为测量总要受到当时的技术水平和理论水平的限制。随着科学技术的发展，各种测量对测量结果精度的要求是在不断提高的，但其目标绝不是追求使测量误差趋于零，或小到不能再小的程度（当然研制计量基准除外）。因为，这样的目标是不能达到的，同时进一步减小测量误差所付的代价也太大，以致达到得不偿失的程度，故应当以满足实际需要为目的。对不同的需要应当用不同的测量精度来满足。对测量误差进行研究，其目的就是能够确切地了解测量误差的大小范围，能把测量误差控制在能够满足需要的程度，并能以误差理论为依据对测量结果作出科学的、合理的评价。

下面分别介绍与测量误差有关的一些基本概念：

一、真实值与测得值

（一）真实值

真实值是指某一被测量在一定条件下客观存在的、也就是实际具备的量值。严格讲：由于测量误差的普遍存在，若想通过测量得到某被测量的真实值是不可能的。通过测量得到的只能是真实值的近似值。但在实际工作中可把下面三种量值看作是真实值。

1. 真值 (A_0) 真值也称为理论值、理论真值或定义值，即根据一定的理论，在严格的条件下，按定义确定的数值。在实际测量中这种值是测不到的，但这种值又确实存在。例如作为温度计量单位的K，是开尔文根据卡诺循环原理提出的热力学温度，它定义出了自然界可能达到的最低温度，即热力学零度为(0K)。尽管当前科学技术相当发达，但如何实现0K的温度，以及如何测量它却是不能解决的。就是一般对温度进行测量，由于所用温度计有测量误差，所以也无法测到温度的真实值。例如在13.18~273.15K温度范围内采用标准铂电阻温度计作标准器，其测温精度仍为 $\pm 0.0002\text{K}$ 。对高温范围所用的标准，其测温精度都低于铂电阻温度计所能达到的精度。

再如对一个固定物理量进行测量, 根据误差理论, 推导正态分布概率密度函数时, 真值定义为在排除系统误差的条件下, 经过等精度多次重复测量, 当测量次数 n 趋近无穷大时, 所得测得值 x_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) 的算术平均值, 就是被测物理量的真值 A_0 。

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad (1-1)$$

而在实际进行测量过程中, 绝对排除系统误差是不可能的, 另外, 进行测量的次数也是有限的。所以, 尽管理论上能把真值定义出来, 通过实际测量是得不到的。在实际测量中得到的只能是随着科学技术的发展逐渐接近 A_0 的量值。

2. 指定值(A_s) 指定值又称约定真值、相对真值或代替真值。由于被测量的真值不能通过测量得到。为解决测量中的真值问题, 只能用约定的办法来确定真值。所以指定值就是由国际计量大会确定、得到国际上公认的各种基准或标准的指示值。即经过大家协商, 根据所能达到的理论水平和工艺技术水平所提供的最高精度的测量结果。作为指定值还应具有足够的稳定性和复现性, 它是人为约定的量值。所以, 指定值会随着科学技术的发展而不断完善和修正。也只有这样, 才能起到基准的作用, 从而进一步促进科学技术的发展。

3. 传递值(A) 由于指定值(A_s)的获得比较困难, 而在实际测量中对测量结果的精度要求又不是那样高, 因此在满足实际需要的前提下, 相对于实际测量所考虑的精度, 其测量误差可以忽略的测量结果, 称为传递值或称实际值。例如, 在量值单位的传递和检定过程中, 上级基准或标准的示值或经上级基准或标准校验而修正过的量值, 也就是计量网传递下来的量值, 都是传递值。

以上介绍的三种值, 就是在理论研究和科技工作中所能遇到的、可认为是被测量真实值的量值。

(二) 测得值

测得值包括通过各种实验所得到的量值, 其来源多是测量仪器或各种测量装置的读数和指示值。由于测量过程中普遍存在着测量误差, 所以测得值都是被测量真值的近似值。

在测量分类中已经提到, 对一般测量, 可直接把测得值作为测量结果表示出来。对于精密测量, 则应根据误差理论及有关知识对测得值进行加工整理, 然后才能给出合理的测量结果。只有这样, 才能充分利用所具备的测量条件, 得到比较精确的测量结果。

下面介绍常用的把测得值作为测量结果的表示方法。

1. 单次测得值(x) 若对测量结果的精度要求不高或有足够的把握, 经过一次测量所得测得值, 能够满足对测量结果的精度要求时, 就用单次测得值 x 来近似地表示被测量的真值。

2. 算术平均值($\bar{x}$) 在单次测量不能满足实际需要的测量精度情况下, 为了充分利用测量设备或仪器所能达到的测量精度, 必须经过多次测量, 在等精度的测量条件下, 取有限 n 次测得值 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 用这些测得值来估计被测量的真实值 μ (由于此处没有明确真实值是指前面介绍的三种 A_0, A_s, A 中哪一种具体值。所以, 用 μ 来表示。今后遇到这种情况也用 μ 来表示)。

在对测量数据进行处理中, 得到普遍应用的是取所有测得值的算术平均值 $\bar{x}$ 来代替不能测得的被测量真值 μ 。

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad (1-2)$$

式中 $i = 1, 2, \cdots n$ 。

由数理统计的估计理论可以证明, 算术平均值 $\bar{x}$ 是被测量真值 μ 的最佳估计值。可以证明, 对测量的算术平均值 $\bar{x}$ 的数学期望就是被测量的真值 μ , 即 $\bar{x}$ 是 μ 的一个无偏估计值。

$$\begin{aligned} E(\bar{x}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu \end{aligned} \quad (1-3)$$

比较严格地讲, 只有当测量次数 n 为无穷大时, $\bar{x}$ 才会依概率收敛于数学期望 μ 。当 n 为有限时, $\bar{x}$ 本身也是一个随机变量。即 $\bar{x} \approx \mu$, $\bar{x}$ 在 μ 的左右摆动, 只有当 n 相当大时 $\bar{x}$ 才趋于稳定, 随着测量次数 n 的增大, $\bar{x}$ 越接近真值 μ 。

用算术平均值 $\bar{x}$ 作为测量结果有如下优缺点:

优点: (1) 计算简便, 容易理解;

(2) 容易用代数的办法对测量值进行处理;

(3) 测得值 x_i 对真值 μ 所产生的不同方向的偏离, 经过取算术平均值, 有一定的相互抵消作用;

(4) 随着测量次数 n 的增加, $\bar{x}$ 则趋于稳定, 概率论中大数定理可证明此点。

缺点: (1) 算术平均值 $\bar{x}$, 受测得值的特大值或特小值的影响较大;

(2) 有时算术平均值不是表示被测量的实际表示值。例如, 必须用整数表示的量, 求平均值后可能得到小数;

(3) 依品次、程度或等级分类的系列, 不能用求算术平均值的办法表示测量结果;

(4) 对所研究的对象已明确数列的两端为不定时, 无法求到算术平均值。

3. 加权平均值 ($\bar{x}_p$) 算术平均值乃是加权平均值的特例。当每个测得值的可靠性或测量精度不等时, 为了区分每个测得值的可信性即重要程度, 对每个测得值都考虑给一个“权数”。最后测量结果用带上权数的测得值求出的平均值表示, 这就是加权平均值 $\bar{x}_p$,

$$\bar{x}_p = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad (1-4)$$

式中 x_i ——不等精度测得值, $i = 1, 2, \cdots n$;

p_i ——每个测得值相应的权数;

$\bar{x}_p$ ——加权平均值。

若为等精度测量, 各测得值的权数应相等, 即 $p_i = 1$, 则加权平均值等于算术平均值。有关不等精度测得值如何处理? 相应的权数如何确定? 将在下一章作进一步介绍

4. 中位值 ($\hat{x}$) 中位值又称中位数、中值或中序数。把一组测得值按大小顺序排列为 $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \cdots \geq x_{(n)}$, 取中间位置的数值, 即为中位值。用它也可作为被测量真值的近似值。

当

$$n \text{ 为奇数时 } \hat{x} = x\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$n \text{ 为偶数时 } \hat{x} = \frac{1}{2} \left[x\left(\frac{n}{2}\right) + x\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right]$$

在顺序统计中,数据的位置特征数占有重要的作用,通过各种位置特征数可以简便地估计出随机变量的某些分布特征。从理论上讲,对排除系统误差只含有纯随机误差的测得值、中值与算术平均值相差极微。特别,当测量次数 n 相当多时,两者就更加接近,故理论上可互相代用。

在概率论中,中值就是把连续型的随机数列分为概率值相等的两部分数值,若随机变量的概率密度函数为 $f(x)$, 则

$$\int_{-\infty}^{\hat{x}} f(x) dx = \int_{\hat{x}}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

顺便介绍一下分位数的概念,分位数就是把一个按大小顺序排列的数列等分为两段的所处位置上的数,所以也叫二分位数。若处在能把按大小顺序排列的数列等分为三段所处位置上的两个数,则称三分位数。同理,若把数列等分为四段的三个数,则称为四分位数,并按大小顺序称此三数为四分位数的第一分位数、第二分位数和第三分位数。四分位数的第二分位数就是中位数。

用中位值表示测量结果有如下优缺点:

优点: (1) 中位值不受数据中特大值或特小值的影响;

(2) 确定方法简单,不需要计算;

(3) 在数列两端的极端项不好确定时,不能求算术平均值,而采用中位值来求就比较方便;

(4) 被测量是一些质量指标或按等级分类的系列,可用中位值表示最后测量结果。

缺点: 难于用数学方法处理; 总体的中值不能从部分的中值求得; 若只知道测得值的总和及项数则求不出中位值等。

5. 众值 ($\hat{x}$) 众值又称众数,就是在测量过程中出现次数最多的数值。

在概率论中,众值就是概率最大的随机变量可取值。对不连续型随机变量,则需要把数据进行分组统计后,才能得到众值。若为连续型随机变量,可利用概率密度函数 $f(x)$ 的一阶导数,令其等于零,即令 $\frac{d}{dx} f(x) = 0$, 求解得到的 x 即为众值。

众值在严格的数理统计中用得很少。只有对连续型,并具有单峰性和对称分布的随机变量,众值对其分布特性才有较好的表征。对于这种情况,算术平均值、中位值与众值三者是相同的。

在实际测量中,通过有限次测量,可以得到测得值所服从的频率函数曲线或能求到频率函数,则频率曲线的峰值(也就是频率函数的最大值)所对应的测得值就是众值。在某些部门(例如水利工程的水文地质测量),众数乃是重要的技术数据,用来表示年雨量、河流的水流量等,作为工程设计的依据。

5. 几何平均值 ($\bar{x}_g$) 几何平均值是把一组 n 个测得值连乘后,再开 n 次方而求得的数

值。

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

式中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ——各次测得值。

有时也可用对数表示此关系：

$$\lg \bar{x}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lg x_i \quad (1-5)$$

$$\bar{x}_g = \lg^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lg x_i \right) \quad (1-6)$$

几何平均值一般用得较少。只有当一组测得值在取对数后所得的概率（或频率）分布曲线为对称的曲线时，才用到几何平均值。例如在研究构成对数正态分布曲线，或在最大似然估计中有时采用。

7. 方均根平均值 ($\bar{x}_h$) 方均根平均值，就是把一组 n 个测得值分别求其平方，再求其平均值的平方根所得的数值。

$$\bar{x}_h = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \quad (1-7)$$

式中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ——各次测得值。

方均根平均值在具有方根关系的运算中（例如计算分子运动的平均动能等）应用较多。

上面共介绍了七种测量结果的表示方法。根据它们在实际应用中的重要性和普遍性按顺序作了介绍。特别是后几种在测量中很少应用，故只作定义性的介绍。对前几种还介绍了其优缺点，所提的优缺点也是相互比较而言的，只能作为参考。在实际工作中，究竟采用哪种表示方法，这要根据测得值获取的难易、付出代价的大小、对数据处理的难易、表征被测量的某些性质是否确切和能否满足实际需要等因素来综合考虑。只有作具体分析，才能确定表示测量结果的具体形式。

在大多数测量中，由于随机误差对测得值的影响，使测得值的分布大部分都符合或基本上符合正态分布规律。因此，最常用的还是算术平均值或加权平均值。可以证明它是被测量的最佳表达式。

二、测量误差的来源

介绍测量误差产生的原因，不仅是为了确认在测量过程中测量误差的普遍存在性，更重要的是根据测量误差产生的原因，可以指导我们改进测量方法、提高测量的技术水平，以达到提高测量精度的目的。使最后测量结果出现误差，可能有如下两个方面的原因：

（一）在测量过程中产生的误差

在测量过程中造成的测量误差。一般可以概括成下述四种原因：

1. 方法误差 它是由于所采用的测量原理或测量方法本身所产生的测量误差。构成这类误差的来源，常遇到的有：

对被测对象的有关知识研究得不够充分，不能全面地考虑一些因素对测量所造成的影

响;

受客观条件及技术水平的限制;

应用的测量原理本身就是近似性的,或忽略了一些在测量过程中实际在起作用的因素;

用接触测量破坏被测对象的原有状况;

用静态的测量方法解决动态对象。

2. 装置误差 装置误差也称仪器误差,是指在进行测量时所使用的测量设备或仪器本身固有的各种因素的影响而产生的误差。测量装置的技术指标,如准确度、灵敏度、灵敏阈、最小分度值、变差值及稳定度等的好坏取决于测量装置的结构、设计、所用元器件的性能、零部件材料的性能、加工制造和装配的技术水平等因素。在设计和制造各种测量仪器时,只能根据现有的条件与可能提出的实际要求,而与理想的要求总会有一定的差距,所以在测量过程中所用的装置、设备和仪器仪表,在使用时无论怎样满足规定的使用条件,无论怎样细心操作,总会使测得值产生误差。

3. 环境误差 因为周围环境因素对测量的影响,而使测量产生的误差。这些影响因素存在于测量系统之外,但对测量系统会直接或间接发生作用,例如温度、湿度、大气压、电场、磁场、机械振动、加速度、地心引力、声响、光照、灰尘、各种射线或电磁波等。这些因素在不同的测量过程中,对测量产生的影响程度可能不同。它们不但能影响测量系统产生测量误差,有时也能引起被测量的变化,严重时甚至会造成测量设备的损坏或使测量难于进行。为了区分环境误差和装置误差,人为的确定所谓标准环境(基准条件),或在产品铭牌及使用说明书上规定测量仪器的使用条件。在基准条件下进行测量所产生的测量误差就认为是测量仪器的固有误差(装置误差)。若使测量仪器在超出基准条件规定的环境下工作,因环境因素的影响,造成测量误差的增大,这种测量误差的增加量,称为仪器的附加误差,也就是环境误差。因此仪表在满足规定的条件下进行测量,所获测得值的误差大小不应超过铭牌或说明书中给出的误差值。有些仪表还给出随环境条件变化而改变的环境误差值。

4. 主观误差 主观误差也称人员误差,是由进行测量的操作人员素质条件所引起的误差。其中有一类是难于避免的,例如因为测量人员感觉器官的分辨能力、反应滞后、习惯感觉和操作技术水平因素而引起的观测误差。另一类是应尽量避免的主观误差,例如因为测量人员的粗心大意而造成的读值、记录和计算错误,或操作失误所造成的测量误差。

上述四种测量误差的来源是从参加测量的四个环节,即人员、设备、方法和条件概括出来的。在具体测量过程中,各因素对测量的影响程度有所不同,甚至达到某一因素造成的测量误差可以忽略的程度。但测量得到的测得值总会带有测量误差是不容怀疑的。

(二) 在处理测量数据时产生的误差

有许多测量在取得测得值后,必须对测得数据进行整理或运算,才能得到最后的测量结果。在处理测量数据时也会带来误差。虽然,这种误差不是在测量过程中产生的。但作为最后测量结果,有时这种误差也是不可避免的。诸如

1. 有效数字的化整误差 对于一定精度的测得值,要用相应的一定有效位数的数来表示,对于多余数字就应当舍弃,对数进行化整,从而产生化整误差。详细内容在介绍有效数字时再进行介绍。

2. 利用各种数学常数引起的误差 在各种计算中常遇到一些数学常数。这些数学常数根据需要可取到任意精度的数值,但不论取多少位总是近似值。例如: