高等学校教材

电力系统优化的理论基础

湖南大学 杨毅刚 杨期余 东南大学 杨维汉

合 编

前　　言

本书是根据1985年高等学校电力工程类教材编审委员会电力系统教材编审小组成都会议上审定的“电力系统优化的理论基础”教材编写大纲编写的。

现代电力系统是一个技术复杂、综合性和整体性都很强的典型大系统，发挥系统的优越性，提高安全可靠性和整体经济效益是一个十分艰巨的任务。近年来，现代优化理论和计算机技术的迅速发展，为解决这类问题提供了新的途径。随着这些技术的广泛应用，将使电力系统的规划、设计、运行和管理水平提高到一个新的高度。

优化技术是一门新的学科、其内涵十分丰富，外延极其广泛。限于篇幅，本书主要介绍电力系统优化的基本理论及其常用的计算方法，注意反映这一领域的新成果，并结合电力系统实际列举一些应用实例。

全书内容由四部分组成。第一章至第三章介绍线性规划及其相关的网络规划和整数规划；第四、五两章介绍非线性规划；第六章为动态规划；第七、八两章对新近在电力系统逐步用到的大系统分解理论和多目标规划作了概括性介绍。每一部分相对独立，自成体系。但在整体安排上，体现了从线性到非线性、从静态到动态、从连续到离散、从单目标到多目标这一基本特点，并使原理与方法、理论与应用紧密结合，使全书构成了一个有机整体。

本书由湖南大学杨毅刚、杨期余，东南大学杨维汉编写。其中第一、二、三、八章由杨期余编写，第四、五、七章由杨毅刚编写，第六章由杨维汉编写，全书由杨毅刚统稿。

本书由武汉水利电力学院熊观佐主审。在编写过程中，曾得到有关同志的帮助和支持，周意诚同志提供了第五章第七节的应用算例，在此表示衷心的感谢。

本书为高等学校电力工程类专业高年级的选修课教材，也可作为有关专业的研究生和从事电力系统方面工作的工程技术人员的参考书。

限于编者水平，书中错误及不妥之处在所难免，敬希读者批评指正。

编　者

1988年7月

内 容 提 要

本书分八章全面介绍了电力系统优化的基本理论和计算方法，主要内容有：线性规划、网络规划、整数规划、无约束和有约束非线性规划、动态规划、大系统的分解与协调以及目标规划。

本书可作为高等学校发电厂及电力系统、电力系统及其自动化专业的选修课教材，也可供相应专业的研究生选用。对于从事电力系统规划、运行的工程技术人员也有参考价值。

目　录

第一章 线 性 规 划

本章主要讨论线性规划的数学模型、基本理论、求解方法和对偶原理。为加深理解，最后还介绍了线性规划在电力系统中的应用举例。

第一节 线性规划的数学模型

下面先由实例引出线性规划的一般数学模型，然后再介绍其标准形式和向量表达式。

一、一般数学模型

【例 1-1】 在发电机组检修时，需要一种合金材料，它由数量分别为x_1、x_2的两种金属所组成，材料费是自变量x_1、x_2的函数，即

$$f(x_1,x_2)=3x_1+2x_2 \tag{1-1}$$

试求在满足下列技术要求的前提下，x_1、x_2如何配料才使费用最低。

$$\left.\begin{array}{l} \text{重量要求：} x_1+x_2\leqslant 7\ (\mathrm{g}) \\ \text{弹性要求：} x_1-x_2\leqslant 4\ (\mathrm{mm/kg}) \\ \text{强度要求：} x_1+3x_2\geqslant 6\ (\mathrm{kg/mm^2}) \\ \text{热容量要求：} 2x_1+x_2\geqslant 4[0.24\mathrm{J/(g\cdot kWh)}] \\ \qquad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{array}\right\} \tag{1-2}$$

在线性规划问题中，表示经济效益（或社会效益）的函数称目标函数，问题所满足的前提条件称约束条件。在上例中(1-1)式是目标函数，(1-2)式是约束条件，而且目标函数和约束条件式均为变量x_1、x_2的一次式。在数学规划中，只有目标函数和约束条件均为自变量的线性表达式时才称为线性规划。

当有n个变量和m个约束式时，线性规划的一般数学模型可写成下列形式，即

$$\min f(\mathbf{X})=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1-3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{s·t·}\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ \qquad a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \qquad \cdots \\ \qquad a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \\ \qquad x_j\geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n \end{array}\right\} \tag{1-4}$$

（1-3）式是数学模型的一般形式，当用来求最大值时，即用$\max f(\mathbf{X})$表示。

二、数学模型的标准形式

为便于线性规划问题的求解，需将上述一般形式转化为下列标准形式，即

$$\min f(\mathbf{X})=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1-5}$$

$$
\text{s.t.}\quad \left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+S_1=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+S_2=b_2\\
&\cdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+S_m=b_m\\
&x_j\geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n
\end{aligned}\right\} \tag{1-6}
$$

上面的标准形式有下列三个特点：①都是求目标函数的最小化问题，②约束式都为等式约束，③全部变量均为非负。

如果实际优化问题是求最大化问题，只要将其目标函数系数加负号，即可变为求最小化问题。（1-4）式的不等式约束变成（1-6）式的等式约束，每个约束要引入一个非负的松弛变量S_i，S_i反映不等式两边的数值之差。如果实际问题的变量无 非负限制，处理方法是用两个非负变量代替原变量，即

$$x_j=x_j^+-x_j^-,\ x_j^+\geqslant 0,\ x_j^-\geqslant 0 \tag{1-7}$$

三、数学模型的向量表达式

将线性规划的标准形式用向量和矩阵形式表达时，常用下列两种形式

（1）
$$
\left.\begin{aligned}
&\min f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{c}\boldsymbol{X}\\
&\text{s.t.}\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}\\
&\boldsymbol{X}\geqslant 0
\end{aligned}\right\} \tag{1-8}
$$

（2）
$$\min\{\boldsymbol{c}\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\} \tag{1-9}$$

式中，$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{b}$分别表示n维及m维列向量，$\boldsymbol{c}$表示n维行向量，$\boldsymbol{A}$是$m\times n$阶矩阵，即

$$
\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\qquad
\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}\\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n}\\ & & \cdots & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn}\end{bmatrix},
$$

$$\boldsymbol{c}=[c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n]$$

如果$\boldsymbol{A}$矩阵用列向量$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_n$表示，$\boldsymbol{b}$矩阵用$\boldsymbol{P}_0$表示，则有

$$x_1\boldsymbol{P}_1+x_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{P}_0 \tag{1-10}$$

其中

$$
\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\qquad
\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\ \cdots,
$$

$$P_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad P_0=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}=b$$

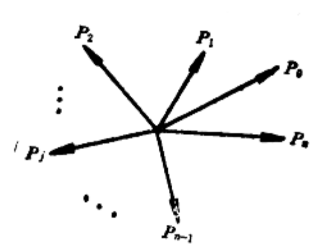

图 1-1 约束式的几何意义

以列向量表示的约束式（1-10）的几何意义，可用图1-1说明。图中的 P_0 与 P_1, $P_2 \cdots P_n$ 存在下列关系：P_1, P_2, $\cdots$, P_n在各自方向上伸缩x_1, x_2, $\cdots$, x_n倍以后再叠加起来，如果刚好等于P_0时，则$X=[x_1 x_2 \cdots x_n]^T$就为所求得的一个解。这样的解有无限多个。其中满足cX为最小的解就是我们所要求的最优解。

第二节 线性规划的基本理论

本节先介绍几个基本概念，然后讨论线性规划问题的可行解、基本解、基可行解和最优解的性质及有关基本理论，以便为下一步求解线性规划问题打下一个良好的基础。

一、几个基本概念

1. 线性无关

对给定的向量X_1, X_2, $\cdots$, X_n，若有实数α_1, α_2, $\cdots$, α_n能构成下列关系

$$\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\cdots+\alpha_n X_n=0$$

当α_1, α_2, $\cdots \alpha_n$全为 0 才使上式成立时，则称向量$X_1, X_2, \cdots, X_n$是线性无关的；当α_1, α_2, $\cdots \alpha_n$中至少有一个不为 0 能使上式成立，则称向量X_1, X_2, $\cdots X_n$是线性相关的，而且其中一个向量可以用其它向量的线性组合表示。

2. 凸集

设$a=(a_1, \cdots, a_n)$, $b=(b_1, \cdots, b_n)$是 n 维空间E^n中的任意两点。所有满足下列条件的点$X=(x_1, \cdots, x_n)$的集合

$$X=\alpha a+(1-\alpha)b, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

叫做a、b为端点的线段，端点a、b分别对应$\alpha=1$和$\alpha=0$；其余的称为该线段上的内点。

设D是E^n中的一个点集。若对于任意$X_1 \in D$, $X_2 \in D$有$X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2 \in D(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$，则称$D$为一个凸集。

换言之，凸集是指这样的集合，其中任意两点 X_1, X_2 连线上的所有点也在该集合内。

3. 极点

若凸集中的点X，不能成为D中任何线段的内点时，则称X为D的极点。例如三角形、四边形和六面体的顶点都是极点，这些极点的个数是有限的。圆周和球体表面上的点也都是极点，但这些极点的个数是无限的。

4. 凸多面体

极点数有限的凸集称为凸多面体。例如火柴盒就是有 8 个极点的凸六面体。

二、可行解

定义1.1 在线性规划问题中，凡满足约束方程$AX=b$，$X\geqslant 0$的所有解称可行解。可行解组成的几何图形（或可行解的集合）又称可行域，如图1-2所示。

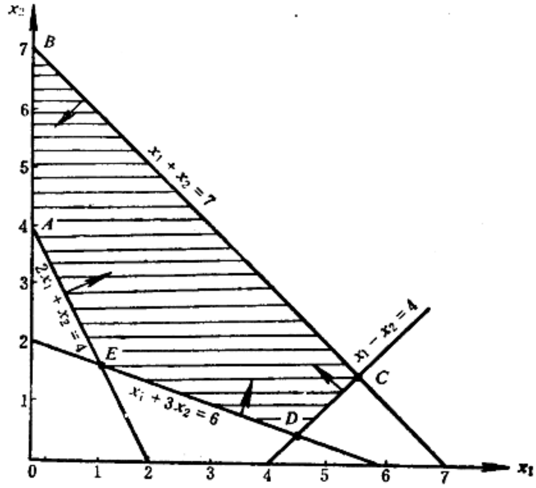

图 1-2 可行域图例

定理1.1 线性规划问题的可行解集合是一个凸集。即连接任意两行解线段上的点仍是可行解。

证明 设在可行域R中任意两可行解为$X^{(1)}\in R$，$X^{(2)}\in R$，则有下式成立

$$\left.\begin{aligned}&x_1^{(1)}P_1+x_2^{(1)}P_2+\cdots+x_n^{(1)}P_n=P_0\\&x_1^{(2)}P_1+x_2^{(2)}P_2+\cdots+x_n^{(2)}P_n=P_0\end{aligned}\right\}$$

$$X^{(1)}\geqslant 0,\quad X^{(2)}\geqslant 0$$

现在线段$X^{(1)}X^{(2)}$上任取一点X表示成

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

将上式代入约束式（1-10）中，就有

$$\begin{aligned}x_1P_1+x_2P_2+\cdots+x_nP_n&=\{\alpha x_1^{(1)}+(1-\alpha)x_1^{(2)}\}P_1+\{\alpha x_2^{(1)}+(1-\alpha)x_2^{(2)}\}P_2\\&+\cdots+\{\alpha x_n^{(1)}+(1-\alpha)x_n^{(2)}\}P_n=\alpha(x_1^{(1)}P_1+\cdots+x_n^{(1)}P_n)\\&+(1-\alpha)(x_1^{(2)}P_1+\cdots+x_n^{(2)}P_n)=\alpha P_0+(1-\alpha)P_0=P_0\end{aligned}$$

又因$x_i^{(1)}\geqslant 0$，$x_i^{(2)}\geqslant 0$，则

$$x_i=\alpha x_i^{(1)}+(1-\alpha)x_i^{(2)}\geqslant 0$$

既然X满足约束条件$AX=b$，$X\geqslant 0$，那么X必定是可行解，或说$X\in R$，R为凸集。

三、基本解

上面讨论过的可行解有无限多个，从中找出最优解是很困难的。因此下面就要引出个数有限的基本解的概念来，目的是为求最优解提供条件。

定义1.2 在n个变量m个方程组$AX=b$中，若B为A的任意一个秩为m的非奇异子方阵，且将不与B的列对应的$(n-m)$个变量置0，则求得的解$X=[X_B,\ 0]$就称为AX

$=b$的一个基本解。B称线性规划问题的一个基，记为$\mathbf{B}=[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_m]$，其中$\mathbf{P}_1$，$\mathbf{P}_2$，…，$\mathbf{P}_m$称为基向量，对应的$\mathbf{X}_B=[x_1, x_2, \cdots, x_m]$称为基变量。置 0 的变量称非基变量，对应的向量也称非基向量。

【例1-2】 求例1-1的基本解。

解 引入松弛变量，使约束不等式（1-2）变为等式

$$
\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3 &&= 7\\
&x_1-x_2+x_4 &&= 4\\
&x_1+3x_2+x_5 &&=6\\
&2x_1+x_2-x_6 &&=4\\
&x_j\geqslant 0 \quad j=1, 2, \cdots, 6
\end{aligned}
$$

本例中$n=6$，$m=4$。因变量数多于方程数，不便于求解，故将其中$(n-m)=2$个变量置 0，余下 4 个变量有 4 个方程就可以求解，其结果列于表1-1，备注中的A、B、C、D、E对应于图1-2相应的点。6 个变量令其中任意 2 个变量为 0 的排列组合有 15个，所以本例题的基本解也是15个。

基本解的个数，写成一般通式为

$$C_n^{n-m}=C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!} \tag{1-11}$$

表 1-1　　例 1-1 的基本解

序号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	可行解?	备注
1	0	0	7	4	−6	−4	否	
2	0	7	0	11	15	3	是	B
3	0	−4	11	0	−18	−8	否	
4	0	2	5	6	0	−2	否	
5	0	4	3	8	6	0	是	A
6	7	0	0	−3	1	10	否	
7	4	0	3	0	−2	4	否	
8	6	0	1	−2	0	8	否	
9	2	0	5	2	−4	0	否	
10	11/2	3/2	0	0	4	17/2	是	C
11	15/2	−1/2	0	−4	0	21/2	否	
12	−3	10	0	17	21	0	否	
13	9/2	1/2	2	0	0	11/2	是	D
14	8/3	−4/3	17/3	0	−22/3	0	否	
15	6/5	8/5	21/5	22/5	0	0	是	E

由表1-1可知，基本解不一定都是可行解，本例题15个基本解中只有 5 个是可行解。

在基本解中，若变量为 0 的个数刚好是$(n-m)$个，此解就称非退化的基本解；当变量为 0 的个数超过$(n-m)$个，此解就称为退化的基本解。所谓退化，就是指m个基向量中的$\mathbf{P}_i$，因有$x_i=0$，$\mathbf{P}_i$对产生$\mathbf{P}_0$不起作用（如图1-1）。

四、基可行解

定义1.3 在基本解中，当全部变量为非负时，则称这类基本解为基可行解。

由表1-1可知，例1-2的15个基本解中 有 5 个基可 行 解，即第 2 、 5 、10、13、15 号解，并分别与图1-2的 B、A、C、D、E 五个极点对应。

定理1.2 凸集$\boldsymbol{R}$上的极点$\boldsymbol{X}^e$（上角e表示极点）当中，其非零变量x_1^e，x_2^e，$\cdots x_p^e$($p \leqslant n$)所对应的列向量$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_p$是线性无关的，且$\boldsymbol{X}^e$中非零变量个数不大 于m.

用反证法证明如下：

若$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_p$线性相关，则必定存在一组 不 全 为 0 的α_1，α_2，…，α_p使$\alpha_1\boldsymbol{P}_1+\alpha_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+\alpha_p\boldsymbol{P}_p=0$ 成立，两边乘以任意常数K，则

$$K\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\boldsymbol{P}_i\right)=0$$

或

$$\sum_{i=1}^{p}(x_i^e\pm K\alpha_i)\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{b}$$

因$x_i^e>0$，取K充分小，可使$x_i^e+K\alpha_i>0$，$x_i^e-K\alpha_i>0$，$i=1$，2，…，p，这就得到了同时满足约束条件的两个不同解

$$\boldsymbol{X}^*=\begin{bmatrix} x_1^e+K\alpha_1\\ x_2^e+K\alpha_2\\ \vdots\\ x_p^e+K\alpha_p\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}^{**}=\begin{bmatrix} x_1^e-K\alpha_1\\ x_2^e-K\alpha_2\\ \vdots\\ x_p^e-K\alpha_p\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

因

$$x_i^e=\frac{1}{2}(x_i^e+K\alpha_i)+\frac{1}{2}(x_i^e-K\alpha_i)$$

故

$$x^e=\frac{1}{2}x^*+\frac{1}{2}x^{**}$$

上式表明，$\boldsymbol{X}^e$可以成为$\boldsymbol{X}^*$和$\boldsymbol{X}^{**}$线段上的内点，这与极点定义不符．因此，$\boldsymbol{X}^e$为极点，必定是$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_p$线性无关.

另外，因$\boldsymbol{A}$阵是$m\times n$阶矩阵($m<n$)，线性无关的列向量不可能大于m，故$\boldsymbol{X}^e$中非零变量个数不大于m．定理证毕.

由上述定理引出极点的性质如下：

（ 1 ）线性规划问题的约束域极点中，正元素个数不大于m，且极点与基可行解互相对应，即几何图形上的极点就是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的基可行解.

（ 2 ）基可行解的数目有限（最多为 C_n^m 个），即$\boldsymbol{X}^e$为有限个，在几何图形上表示 约束域$\boldsymbol{R}$为凸多面体.

（ 3 ）当$P=m$时，基可行解不退化，极点$\boldsymbol{X}^e$不会重合．当$P<m$时，基 可 行 解 退化，某些极点会重合.

【例1-3】 求下列约束方程组的基可行解.

$$
\left.\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3 &&=7\\
&x_1-x_2\quad +x_4 &&=4\\
&x_1+3x_2\quad -x_5 &&=6\\
&2x_1+x_2\quad -x_6 &&=7\\
&x_j\geqslant 0\quad j=1,\ 2,\ \cdots 6
\end{aligned}\right\}
$$

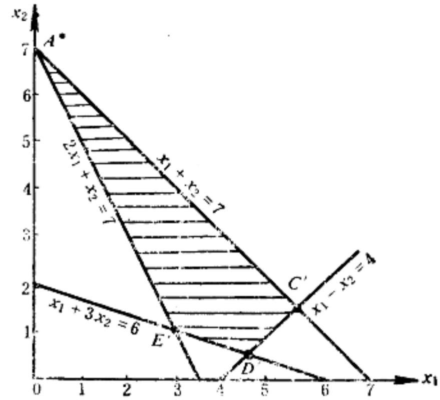

图 1-3　两极点重合的情况

解　同例1-2一样，先令6个变量中的任意2个变量为0，可求出15个基本解来，其中变量全为非负的基可行解有5个。其结果列入表1-2。由表可知第1，2两个解完全相同。在几何图形上表明这两个极点重合。即图1-3中的A^*点（对应图1-2中A、B两点）。因这种解的零元素超过了$(n-m)$个$(6-4=2$个$)$，故此种解又称退化的基可行解。

表 1-2　　　　　　　　　　　两个基可行解相同的情况

序　号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	备　注
1	0	7	0	11	15	0	A^*
2	0	7	0	11	15	0	A^*
3	11/2	3/2	0	0	4	11/2	C'
4	9/2	1/2	2	0	0	5/2	D'
5	3	1	3	2	0	0	E'

五、最优解

定义1·4　满足约束条件$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{X}\geqslant 0$，又使目标函数$\boldsymbol{cX}$为最小（或最大）的解，就称最优解。

定理1·3　如果线性规划问题有最优解，则目标函数的最优值可以在某极点上达到。

证明　设$\boldsymbol{X}^0$❶为最优解，最优值为$f(\boldsymbol{X}^0)=\boldsymbol{cX}^0$。如果$\boldsymbol{X}^0=0$，由定理1.2可知，$\boldsymbol{X}^0$已是极点，定理显然成立。若$\boldsymbol{X}^0\neq 0$，且又不是极点，那么，它的非零分量所对应的列向量$P_{i1},\cdots,P_{iK}$是线性相关的，于是存在$K$个不全为0的$\delta_{i1},\cdots,\delta_{iK}$，使

$$\sum_{t=1}^{K}\delta_{it}P_{it}=0$$

考虑向量$\boldsymbol{\delta}=[\delta_1,\ \delta_2,\cdots,\delta_n]^T$，其中

$$\delta_j=\begin{cases}\delta_{it}, & j=it,\ t=1,2,\cdots,K;\\ 0 & j\neq it\end{cases}$$

下面，就从$\boldsymbol{X}^0$出发，构造两个新的最优解

❶此处$\boldsymbol{X}^0$的上角0及后面出现的$\boldsymbol{X}^1$、$\boldsymbol{X}^2$的上角1、2均为标示符，无数学意义。

$$\mathbf{X}^1=\mathbf{X}^0+\theta\boldsymbol{\delta},\quad \mathbf{X}^2=\mathbf{X}^0-\theta\boldsymbol{\delta}$$

上式中的θ可按下式选取

$$\theta=\min\left\{\frac{x_{it}^0}{|\delta_{it}|},\ t=1,\cdots,K\right\}$$

将$\mathbf{X}^1$、$\mathbf{X}^2$写成下列展开式

$$\mathbf{X}^1\begin{cases}x_{i1}^1=x_{i1}^0+\theta\delta_1\\ x_{i2}^1=x_{i2}^0+\theta\delta_2\\ \quad\cdots\\ x_{iK}^1=x_{iK}^0+\theta\delta_K\\ x_i^1=0\\ i\neq it\quad t=1,\cdots,K\end{cases}\qquad\qquad \mathbf{X}^2\begin{cases}x_{i1}^2=x_{i1}^0-\theta\delta_1\\ x_{i2}^2=x_{i2}^0-\theta\delta_2\\ \quad\cdots\\ x_{iK}^2=x_{iK}^0-\theta\delta_2\\ x_i^2=0\\ i\neq it\quad t=1,\cdots,K\end{cases}$$

由上面构造$\mathbf{X}^1$，$\mathbf{X}^2$的方法可知，$\mathbf{X}^1$，$\mathbf{X}^2$中至少有一个其非零分量的个数比$\mathbf{X}^0$的非零分量的个数至少少一个，而且$f(\mathbf{X}^0)=f(\mathbf{X}^1)=f(\mathbf{X}^2)$，这是因为$\mathbf{X}^1$，$\mathbf{X}^2$对应的目标函数值分别为

$$f(\mathbf{X}^1)=\mathbf{c}\mathbf{X}^1=\sum_{t=1}^{K}c_{it}(x_i^0+\theta\delta_t)=\mathbf{c}\mathbf{X}^0+\theta\sum_{t=1}^{K}c_{it}\delta_t$$

$$f(\mathbf{X}^2)=\mathbf{c}\mathbf{X}^2=\sum_{t=1}^{K}c_{it}(x_i^0-\theta\delta_t)=\mathbf{c}\mathbf{X}^0-\theta\sum_{t=1}^{K}c_{it}\delta_t$$

前面两式中 $\sum_{t=1}^{K}c_{it}\delta_t=0$。

这是因为：若$\sum_{t=1}^{K}c_{it}\delta_t>0$，有$f(\mathbf{X}^2)<f(\mathbf{X}^0)$与假设$f(\mathbf{X}^0)$为最小值相矛盾；若$\sum_{t=1}^{K}c_{it}\delta_t<0$，则有$f(\mathbf{X}^1)<f(\mathbf{X}^0)$也与假设$f(\mathbf{X}^0)$为最小值相矛盾。所以，$\sum_{t=1}^{K}c_{it}\delta_t=0$，即

$$f(\mathbf{X}^0)=f(\mathbf{X}^1)=f(\mathbf{X}^2)$$

因此，已知最优解是$\mathbf{X}^0$，如果$\mathbf{X}^0$不是基础最优解，总可以构造出另一最优解$\mathbf{X}^1$，其非零分量个数至少比$\mathbf{X}^0$的非零分量个数要少一个，重复上述步骤作下去，可以得到$\mathbf{X}^2$，$\mathbf{X}^3$，…，它们的非零分量个数越来越少，这样进行到某个时候，一定可以找到最优解$\mathbf{X}^e$，或$\mathbf{X}^e=0$，或$\mathbf{X}^e\neq0$，但其非零分量所对应的列向量线性无关，这时$\mathbf{X}^e$即为极点。而$f(\mathbf{X}^e)=f(\mathbf{X}^0)$。证毕。

从定理1·3还可以看出，如果线性规划问题有最优解就只需从有限的几个极点中去找。后面将要讨论的求解线性规划的单纯形方法，就是根据这个原理，由一个极点迭代到另一极点，经有限次迭代求得最优解，或判定它无最优解。

【例1-4】 用图解法求例1-1的配料问题的最优解。

解 由（1-2）式作出约束方程的可行域如图1-4所示。它是一个凸多边形，其顶点A、B、C、D、E就是约束区域的极点，最优解就在它们当中寻找。

为了求出最优解，先给定目标f一组数值，如$f=4,\cdots,22$。将它们代入（1-1）式，就可以作出一组平行直线族如图1-4所示的虚线。这些线又称等高线。当其中一条等高线与距原点0最近的极点E相交时，就找到了目标函数值最小时的最优解；当其中一条等高

线与离原点0最远的极点C相交时，就找到了目标函数值最大时的最优解。

对应于极点E，解其相交于它的边界方程

$$\left.\begin{aligned}2x_1+x_2&=4\\x_1+3x_2&=6\end{aligned}\right\}\quad 得\quad \left.\begin{aligned}x_1&=6/5\\x_2&=8/5\end{aligned}\right\}$$

将其代入（1-1）式得

$$f_{\min}=3\times 6/5+2\times 8/5=6.8$$

对应于极点C，解其相交于它的边界方程

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2&=7\\x_1-x_2&=4\end{aligned}\right\}\quad 得\quad \left.\begin{aligned}x_1&=11/2\\x_2&=3/2\end{aligned}\right\}$$

同理可得$f_{\max}=3\times 11/2+2\times 3/2=19.5$

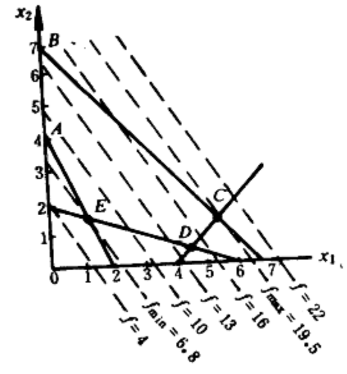

图 1-4 用图解法求最优解

第三节 线性规划的求解方法——单纯形法

一、基本思路

由上一节可知，如果线性规划问题有最优解，我们只限于在极点中去挑选。因极点的个数有限，原则上我们可以采用枚举法，即找出所有极点，然后计算这些点所对应的目标函数值，从中选取$f_{\min}$（或$f_{\max}$），问题就得以解决。但是，当变量和约束式的规模很大时，找到全部极点的工作量就很大，从算法来看，这显然不是有效的方法。为此1947年Dantzig提出了单纯形法。至今该方法仍然是求解线性规划问题的基本方法。

单纯形法是一种迭代求解方法。它的基本思路是：从可行域的某个极点出发，向邻近极点转移，并使其目标函数值比前一个极点更好。由于极点数有限，且最优解必定在极点上，所以迭代过程是有限的。这两条是单纯形法的依据。几何上从一个极点转移到另一个极点的有限次迭代，在代数上即为从一个基可行解到另一个基可行解的有限次数迭代运算。由于凸多面体在几何上又称为单纯形，既然，线性规划问题是在凸多面体极点集上迭代求解，因此，线性规划问题的这种求解方法就称单纯形法。单纯形法是适应于计算机求解大型线性规划问题的一种主要算法。

单纯形法可分为两个阶段：第一阶段是求初解（基可行解），第二阶段是从初始解出发，向邻近极点转移，并使其目标函数值不断改善，最后找到最优解。为了叙述方便起见，下面我们先介绍第二阶段，然后再讨论第一阶段。

二、极点转移——单纯形法的第二阶段

极点转移包含两个子过程，即基底变换（或简称换基）和目标函数的改善。

1.基底变换

设初始极点为$\boldsymbol{X}^{(1)}=[x_1,\ x_2\cdots x_n,\ 0\cdots 0]^T$，则有下列关系式成立。

$$x_1\boldsymbol{P}_1+\cdots+x_i\boldsymbol{P}_i+\cdots+x_m\boldsymbol{P}_m=\boldsymbol{P}_0 \qquad (1\text{-}12)$$

上式表明，初始基$\boldsymbol{B}_1$位于系数矩阵$\boldsymbol{A}$的前m列，即$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{N}]$，其中$\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_i\cdots\boldsymbol{P}_m)$

为基阵，$N=[P_{m+1}\cdots P_j\cdots P_n]$为非基阵。相应地，向量$X^{(1)}$、$c$也可分成两段

$$X^{(1)}=[X_B,\ X_N]^T,\ c=[c_B,\ c_N]$$

式中，X_B、c_B对应于前m个基变量，X_N、c_N 对应于$(n-m)$个非基变量。于是约束式可写成

$$AX=[B_1,N]\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix}\quad 或\quad B_1X_B+NX_N=b$$

用B^{-1}左乘上式两边，得基变量为

$$X_B=B_1^{-1}b-B_1^{-1}NX_N \tag{1-13}$$

或

$$x_i=a_i-\sum_{j=m+1}^{n}\beta_{ij}x_j\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{1-14}$$

其中

$$B_1^{-1}b=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{bmatrix},\quad B_1^{-1}N=\begin{bmatrix}\beta_{1,m+1} & \beta_{1,m+2} & \cdots & \beta_{1,n}\\\beta_{2,m+1} & \beta_{2,m+2} & \cdots & \beta_{2,n}\\\vdots & & & \\\beta_{m,m+1} & \beta_{m,m+2} & \cdots & \beta_{m,n}\end{bmatrix}$$

或

$$B_1^{-1}P_j=\begin{bmatrix}\beta_{1j}\\\beta_{2j}\\\vdots\\\beta_{mj}\end{bmatrix} \tag{1-15}$$

把（1-13）式代入目标函数式，得

$$\begin{aligned}z&=cX^{(1)}=c_BX_B+c_NX_N=c_B(B_1^{-1}b-B_1^{-1}NX_N)+c_NX_N\\&=c_BB_1^{-1}b-(c_BB_1^{-1}N-c_N)X_N\end{aligned} \tag{1-16}$$

或

$$z=\sum_{i=1}^{m}c_ia_i-\sum_{j=m+1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}c_i\beta_{ij}-c_j\right)x_j=z_0-\sum_{j=m+1}^{n}\lambda_jx_j \tag{1-17}$$

式中　$\lambda_j=\sum_{i=1}^{m}c_i\beta_{ij}-c_j$。

有了以上导出的公式，下面就可以讨论换基。

当$X^{(1)}$为非退化的基可行解时，则P_1，$\cdots$，P_i，$\cdots$，P_m会线性无关，非基向量P_j可用基向量P_i的线性组合表示如下

$$P_j=\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}P_i\quad j=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n \tag{1-18}$$

上式中的β_{ij}可由（1-15）式中$B_1^{-1}N$求得。现将非基向量P_{m+1}表示为

$$P_{m+1}=\beta_{1,m+1}P_1+\beta_{2,m+1}P_2+\cdots+\beta_{m,m+1}P_m \tag{1-19}$$

为使极点转移，引入实数θ乘以上式两边得

$$\theta P_{m+1}-\theta(\beta_{1,m+1}P_1+\cdots+\beta_{m,m+1}P_m)=0$$

将上式与（1-12）式相加，其值不变，得新的约束方程为

$$(x_1-\theta\beta_{1,m+1})P_1+\cdots+(x_m-\theta\beta_{m,m+1})P_m+\theta P_{m+1}=P_0 \tag{1-20}$$

对应的解为

$$
\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1-\theta\beta_{1;m+1}^{*} \\ \vdots \\ x_m-\theta\beta_{m;m+1}^{*} \\ \theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1-21}
$$

为使上式中$\boldsymbol{X}$的各元素为非负，保证$\boldsymbol{X}$是可行解，必须满足下列要求，即

$$
x_i-\theta\beta_{i;m+1}^{*}\geqslant 0 \qquad i=1,\cdots,m,\theta>0 \tag{1-22}
$$

现在讨论$\beta_{i;m+1}^{*}$值不同时的两种情况。

（1）当至少有一个$\beta_{i;m+1}^{*}>0$（$i=1,\ \cdots,\ m$）时，$\boldsymbol{X}$就有可能成为新的极点$\boldsymbol{X}^{e_2}$，由（1-22）式θ的取值范围是

$$
0<\theta\leqslant\min_{i\in I}(x_i/\beta_{i;m+1}^{*}) \tag{1-23}
$$

式中　$I=\{i\,|x_i>0\ ,\ \beta_{i;m+1}^{*}>0\ ,\ i=1,\cdots,m\}$。

当取$\theta_0=\min\limits_{i\in I}(x_i/\beta_{i;m+1}^{*})$时，(1-20)式中$\boldsymbol{P}_l$前的系数为0，$\boldsymbol{P}_l$消失由$\boldsymbol{P}_{m+1}$代替，(1-21)式中$\boldsymbol{X}$的正元素仍是$m$个，则$\boldsymbol{X}$已成为新的极点$\boldsymbol{X}^{e_2}$，并得新的基为$\boldsymbol{B}_2=(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_{m+1})$。因$\boldsymbol{P}_{m+1}$进入新基，故称进基元，$\boldsymbol{P}_l$已从$\boldsymbol{B}_2$中消失，故称离基元，因此，换基任务也就完成。

从上可知，新基$\boldsymbol{B}_2$和初始基$\boldsymbol{B}_1$只有一个向量不同，其它（$m-1$）个向量相同，这一点表明在图1-5上$\boldsymbol{X}^{e_1}$与$\boldsymbol{X}^{e_2}$是相邻的极点。也就是说，在（1-21）式中，若取$\theta=0$，则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{e_1}$；若取$\theta=\theta_0$，则得到$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{e_2}$。可见，对应于$0<\theta\leqslant\theta_0$，$\boldsymbol{X}$就相当于$\boldsymbol{X}^{e_1}$和$\boldsymbol{X}^{e_2}$连线上的各点，如图1-5所示。

（2）当$\beta_{i;m+1}$（$i=1,\cdots,m$）全为负时，由（1-21）式可知，因为$\boldsymbol{X}$中有$m+1$个元素为正（包括θ），故新得到的解$\boldsymbol{X}$已不是极点。

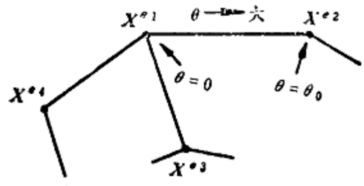

图 1-5　单纯形法的极点转移

2.目标函数的改善

在了解基底变换的有关运算以后，下面讨论$\boldsymbol{X}^{e_1}$应向相邻的（$n-m$）个极点中的哪一个极点转移，才有可能以最快的速度达到最优解。

首先，对应于（1-21）式的可行解$\boldsymbol{X}$，代入（1-16）式求出新目标函数值为

$$
\begin{aligned}
z'_{m+1}&=c_1(x_1-\theta\beta_{1;m+1}^{*})+\cdots+c_m(x_m-\theta\beta_{m;m+1}^{*})+c_{m+1}\theta \\
&=\sum_{i=1}^{m}c_ix_i-\theta\Big(\sum_{i=1}^{m}c_i\beta_{i;m+1}^{*}-c_{m+1}\Big)=z_0-\theta(z_{m+1}-c_{m+1})
\end{aligned} \tag{1-24}
$$

式中　$z_0=\sum\limits_{i=1}^{m}c_ix_i$——初始极点对应的目标函数值；

$z_{m+1}=\sum_{i=1}^{m} c_i\beta_{i,m+1}$——用 $\boldsymbol{P}_{m+1}$ 表达式（1-19）前的系数$\beta_{i,m+1}$和c_i相乘积之和。

令 $j=m+1$，写成通式为

$$z_j'=z_0-\theta(z_j-c_j)=z_0-\theta\lambda_j \quad j=m+1, \cdots, n \tag{1-25}$$

式中 $\lambda_j=z_j-c_j$——检验值；

$\theta\lambda_j$——修正项，它的数值越大，目标函数改善就越明显。

$\theta\lambda_j$应满足如下条件：

（1）因 $0<\theta\leqslant\theta_0$，应取其最大值，即

$$\theta_{\max}=\theta_0=\min_{i\in I}(x_i/\beta_{i,j}),\ I=\{i\,|x_i>0,\ \beta_{i,j}>0,\ i=1,\ \cdots,\ m\} \tag{1-26}$$

（2）
$$\lambda_j=z_j-c_j>0 \quad j=m+1, \cdots, n \tag{1-27}$$

以上分析表明，$\boldsymbol{X}^0$应向修正项$\theta\lambda_j$最大的某个极点转移。这样不断地转移下去，到什么时候才应终止呢？下面将介绍两个判别定理。

定理 1.4 当求得的某个极点$\boldsymbol{X}^0=[x_1^0,\ x_2^0,\ \cdots,\ x_m^0]^T$，相对应的$\lambda_j\leqslant 0\ (j=m+1,\ \cdots,\ n)$，则$\boldsymbol{X}^0$为最优解。

证明 对于全部的非基变量，因有$\lambda_j\leqslant 0$，由（1-25）式可知，极点如果再转移，目标函数已无法继续减小，即z_j'已达到下界，故$\boldsymbol{X}^0$是最优解。此时，极点转移的迭代计算终止。

定理 1.5 对应某非基变量若有$\lambda_K=z_K-c_K>0$，且$\beta_{iK}\leqslant 0\ (i=1,\cdots,m)$，则此线性规划问题无最优解。

证明 对照（1-21）式所示的结构，可作一个不同于$\boldsymbol{X}^0$的新可行解$\boldsymbol{X}^K$，其中

$$x_K=\theta>0 \quad x_j=0 \quad j=m+1,\ \cdots,\ n,\ j\neq K$$
$$x_i=a_i-\theta\beta_{ij}\geqslant 0 \quad i=1,\ \cdots,\ m$$

因$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$中的元素$a_i\geqslant 0$，$\theta>0$，$\beta_{ij}\leqslant 0$，故$x_i\geqslant 0$，显然对任意的$\theta>0$，$\boldsymbol{X}^K$都是可行解，对应的新目标函数由（1-25）式得

$$z_j'=z_0-\theta(z_K-c_K)$$

当$\theta\to\infty$时，因$z_K-c_K>0$，故$z_j'\to-\infty$，由此可知，z_j'在可行解区域中无下界，故此题无最优解。此时，极点转移的工作也应终止。

对于求最大值的问题，上述判别定理同样成立，只需要将z_j-c_j的不等式反号即可。

【例 1-5】 研究一下例1-1的极点转移过程。

解 首先，将（1-2）式写成下列标准形式

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3 = 7 \\ x_1-x_2+x_4=4 \\ x_1+3x_2-x_5=6 \\ 2x_1+x_2-x_6=4 \end{array}\right\} \tag{1-28}$$

$$x_j\geqslant 0 \quad j=1,\cdots,6$$

或者
$$x_1\boldsymbol{P}_1+x_2\boldsymbol{P}_2+x_3\boldsymbol{P}_3+\cdots+x_6\boldsymbol{P}_6=\boldsymbol{P}_0 \tag{1-29}$$

式中