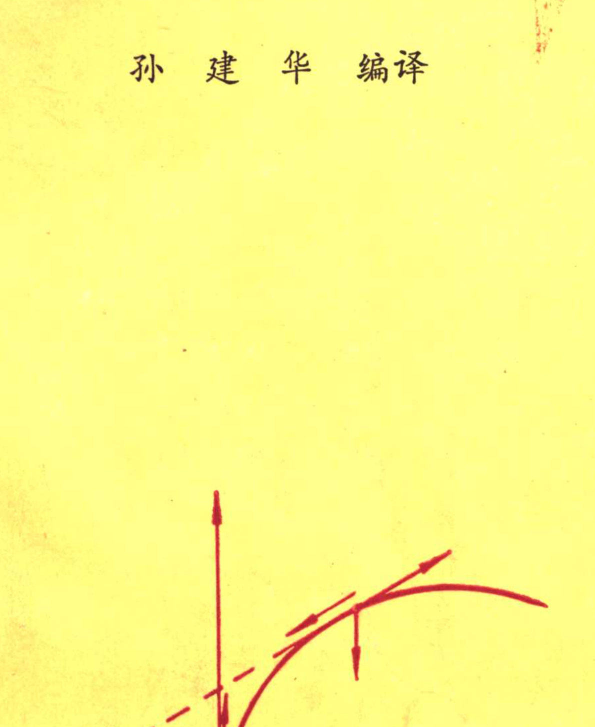
动力学教程

DONGLIXUE JIAOCHENG

孙建华 编译



西北工业大学出版社

动力学教程

孙建华 编译

西北工业大学出版社

内 容 提 要

本书以矢量法和拉格朗日解析法为基础，对动力学的基本原理和方法作了较详尽的叙述。内容包括：运动学、牛顿运动定律——质点动力学、质点动力学引深、轨道运动、质点系、刚体动力学导论、二维刚体动力学、三维矢量动力学、广义坐标、变分法简介。书中的例题和习题，多为英国牛津大学、剑桥大学、伦敦大学的力学试题，具有一定的典型性和综合性。

本书可作为理工科院校师生的教学用书和教学参考书，亦可供一般科技人员自学参考。

动 力 学 教 程

编 译 者　孙建华

责任编辑　胡梦仙

*

西北工业大学出版社出版发行

（西安市友谊西路 127 号）

陕西省新华书店经销

西北工业大学出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 毫米　1/32　8.25 印张　207 千字

1988 年 1 月第 1 版　1988 年 1 月第 1 次印刷

印数 1—3000 册

ISBN 7-5612-0050-1/O·2　定价：2.20元

前　言

本书系根据[英] F.CHORLTON 著《TEXTBOOK OF DYNAMICS》一书经删减增补编译而成。

原版书是以矢量法和拉格朗日解析法，论述和求解经典动力学问题的一本专著。它针对力学中的若干经典理论和原理，列举了大量的例题，详细准确地阐述了力学中的基本概念和物理实质，以消除过去许多教材中对各种原理的意义在解释方面的误解。适宜于理工科院校师生和工程技术人员阅读。全书共分十章：运动学；牛顿运动定律；质点动力学引深；轨道运动；质点系；刚体动力学导论，二维刚体动力学；三维矢量动力学；广义坐标；变分法简介。书中的例题和习题多选自英国牛津大学、剑桥大学、伦敦大学等著名大学近二三十年来的力学试题，具有一定的典型性和综合性。借鉴这些资料，以评估我国的力学教材程度，具有一定的参考价值。中外交流，东西贯溶，对于提高我国的力学教学质量，定会有所裨益。限于篇幅，书中对于某些问题的叙述不免有些从简，推理过程跳跃较大，但对于具有一定数理基础的读者，丝毫不会感到困难。

本书由蔡泰信副教授主审，陈守五教授、刘力行副教授、张治强副教授参加了审稿。在编译审校过程中，张治强副教授初译了原书的部分章节，宋芝俊、杨海三等同志作了大量的工作，西安陆军学院领导、杜泽源、史世昌、李有堂等同志给予了大力支持，谨此表示诚挚的谢意。由于时间仓促，编译者水平能力有限，错误在所难免，恳望读者斧正。

编译者　1987.7

目　录

第一章 运 动 学

§1.1 质点沿曲线运动的速度和加速度

假设一个质点沿曲线C运动，C不一定为平面曲线(图1.1)。P、P'分别是在时刻t，$t+\delta t$时质点的位置。相对于固定原点O，P和P'的矢径为$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$，$\overrightarrow{OP'}=\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}$。假定$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{v}+\delta\boldsymbol{v}$是质点在$P$和$P'$点时的速度，则这两矢量必须是曲线$C$在$P$、$P'$处的切线。由于$\overrightarrow{PP'}=\delta\boldsymbol{r}$是质点在时间$\delta t$内的位移，所以在$P$点的速度$\boldsymbol{v}$是$\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\delta t\to 0}\dfrac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t}$。如果极限存在，可用$\dfrac{\delta\boldsymbol{r}}{dt}$表示。如果$\widehat{PP'}$的弧长用$\delta s$表示，我们还可以得到

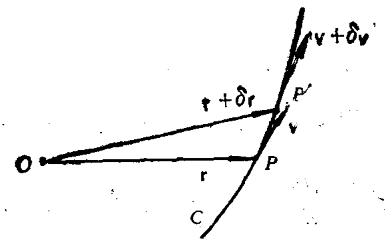


图 1.1

$$\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t}=\left(\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta s}\right)\times\left(\frac{\delta s}{\delta t}\right)$$

使$\delta t\to 0$，如果极限都存在，则有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{\delta s}\right)\times\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

为了弄清$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$的意义，我们来考查在$\overrightarrow{PP'}$方向上的矢量$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$，此矢量最终趋于曲线$C$在$P$点的切线，并指向质点运动的一方。用$\boldsymbol{t}$表示在此切线上的单位矢量。我们进一步讨论$\dfrac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta s}$的

大小为：

$$\frac{|\delta \boldsymbol{r}|}{\delta s}=\frac{\overline{PP'}}{\overparen{PP'}}$$

因为在长度上，$\overline{PP'}$弦和$\overparen{PP'}$弧在$P'\to P$时趋近于相等，我们就可以假定上述比式的极限等于1。这样$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$就表示大小是1，方向沿单位矢量$\boldsymbol{t}$，即$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{t}$。因此

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{t}=v\boldsymbol{t}$$

这里$v=\frac{ds}{dt}$，而v的大小为$v=\frac{ds}{dt}=\dot{s}$，方向沿$\boldsymbol{t}$。有时为了方便，$\frac{ds}{dt}\boldsymbol{t}$用$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}$或$\dot{\boldsymbol{s}}$来表示。

质点在P点的速度$\boldsymbol{v}$是矢径$\boldsymbol{r}$对时间的变化率。同理，我们也可定义加速度$\boldsymbol{f}$是速度$\boldsymbol{v}$对时间的变化率。于是

$$\boldsymbol{f}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d(v\boldsymbol{t})}{dt}=\dot{v}\boldsymbol{t}+v\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}$$

其中$\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\ \frac{ds}{dt}=v\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$。我们认为$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$大小就是$\lim\limits_{P'\to P}\left(\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta s}\right)$。因为$\boldsymbol{t}$是在$C$曲线$P$点处的切线上，并沿$\boldsymbol{v}$方向的单位矢量，则$\boldsymbol{t}+\delta\boldsymbol{t}$就表示在$P'$处对应的单位切线矢量。任意选择固定点$O'$，画出$\overrightarrow{O'T}\equiv\boldsymbol{t}$。$\overrightarrow{O'T'}\equiv\boldsymbol{t}+\delta\boldsymbol{t}$(图1.2)。$\varDelta O'TT'$是等腰三角形，$\overline{O'T}$、$\overline{O'T'}$都是单位长度。作$\delta\psi=\angle T'O'T$。当$\delta t\to 0$，$P'\to P$，这样，$T'\to T$，

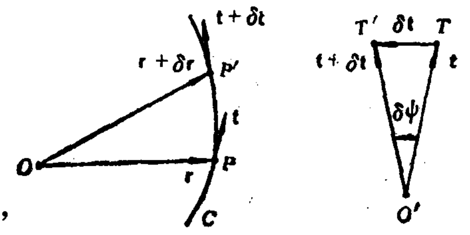


图 1.2

$\delta\boldsymbol{t}$的方向趋于和 $\boldsymbol{t}$ 垂直。如用 $\boldsymbol{n}$ 表示在极限方向上的单位矢量，它指向C曲线上P点的主法 线 方 向，而 $|\delta\boldsymbol{t}| = \overline{TT'} = 2\sin(\delta\psi/2)$，且 $\left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = \lim\left|\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta s}\right| = \lim[\sin(\delta\psi/2)/(\delta s/2)] = \lim\frac{\delta\psi}{\delta s} = \frac{d\psi}{ds}$。$\frac{d\psi}{ds}$的比值定义为$C$曲线在$P$点的曲率，并用 k 表示。我们选择 k 始终为正，则有

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = k\boldsymbol{n}$$

因而
$$\boldsymbol{f} = \dot{v}\boldsymbol{t} + kv^2\boldsymbol{n}$$

这一结果适用于扭曲线运动和平面曲线运动。在后一种情况下，$\boldsymbol{n}$ 指向曲率中心，曲率半径用ρ表示。因此加速度 f 有指 向 s 增加方向的切向分量 $\dot{v}$，和方向指向曲率中心的法向分量 v^2/ρ。

【例】 一个质点被限制沿圆螺线运动。在时刻 t 时，它的坐标是 $(a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ a\theta\tan\alpha)$。这里 a、α 是常数且 $0<\alpha<\pi/2$，速度随 t 线性增加。当 $t=0$ 时，速度为 0，当 $t=T$ 时，速度为 V，其运动向 θ 增加的方向进行。质点开始时在 $(a,\ 0,\ 0)$ 点。求在任意时刻 $t(<T)$的加速度。

【解】 在时刻 $t\ (0<t<T)$，质点的矢径是

$$\boldsymbol{r} = a(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} + \theta\tan\alpha\boldsymbol{k})$$

所以 $$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = a\dot{\theta}(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j} + \tan\alpha\boldsymbol{k})$$

因为 $(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j} + \tan\alpha\boldsymbol{k})$的大小为$\sec\alpha$

所以 $$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (a\dot{\theta}\sec\alpha)(-\sin\theta\cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\theta\cos\alpha\boldsymbol{j} + \sin\alpha\boldsymbol{k})$$

即 $$(Vt/T)\boldsymbol{t} = a\dot{\theta}\sec\alpha(-\sin\theta\cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\theta\cos\alpha\boldsymbol{j} + \sin\alpha\boldsymbol{k})$$
$$(0<t<T)$$

于是
$$\begin{cases} Vt/T = a\dot{\theta}\sec\alpha \\ \boldsymbol{t} = -\sin\theta\cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\theta\cos\alpha\boldsymbol{j} + \sin\alpha\boldsymbol{k} \end{cases}$$

由第一个式子 $\theta = Vt^2\cos\alpha/2aT$

由第二式 $$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{t}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}$$

$$=(-\cos\theta\cos\alpha\boldsymbol{i}-\sin\theta\cos\alpha\boldsymbol{j})\frac{d\theta}{ds}$$

现在 $$\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\theta}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}=(Vt\cos\alpha/aT)/(Vt/T)=(\cos\alpha/a)$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=(-\cos\theta\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{j})(\cos^2\alpha/a)$$

$$k=\cos^2\alpha/a$$

$$\boldsymbol{n}=-\cos\theta\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{j}$$

因此在任意时刻，质点运动的加速度在切向的分量为V/T，而在法向的分量为 $kv^2=V^2t^2\cos^2\alpha/aT^2$。

§1.2 质点平面运动的径向分量和横向分量

现在我们来讨论质点在平面内的运动，并设在时刻 t 时，其极坐标为$(r,\ \theta)$。如果$\boldsymbol{r}$表示在时刻 t 时的矢径$\overrightarrow{OP}$（图1.3），于是$\boldsymbol{r}=r\hat{\boldsymbol{r}}$。这里 $\hat{\boldsymbol{r}}$表示在$\overline{OP}$上的单位矢量，其方向为 r 增加的方向。

P的速度$\boldsymbol{v}$为

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d(r\hat{\boldsymbol{r}})}{dt}$$

$$=\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+r\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}$$

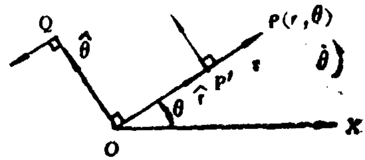


图 1.3

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$表示$P'$在$\overline{OP}$上的速度，$\overrightarrow{OP'}\equiv\hat{\boldsymbol{r}}$。现在$\overline{OP'}$长度固定，但其方向随$\theta$变化。用$\hat{\boldsymbol{\theta}}$代表在横轴方向上的单位矢量。这样$\hat{\boldsymbol{\theta}}$在平面$POX$内，垂直于$OP$并在$\theta$增加的方向上。在图中，$\overrightarrow{OQ}\equiv\hat{\boldsymbol{\theta}}$，$P'$的运动是沿着$\hat{\boldsymbol{\theta}}$的。如果将$POQ$整体按$\theta$增加的方向，绕垂直于$POQ$的轴以角速度$\dot{\theta}$旋转，可以看出$P'$的速度是

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}=\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\boldsymbol{V}=\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1}$$

可见P以径向和横向分速度组成[$\dot{r}$，$r\dot{\theta}$]运动

其次由（1）式得加速度$\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{f}=\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\ddot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+\dot{r}\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}+\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{d(r\dot{\theta})}{dt}+r\dot{\theta}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}$$

由图 1.3 可以看出Q的速度$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}=-\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{r}}$

$$\boldsymbol{f}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{2}$$

这样，P的运动中，有径向加速度和横向加速度

$$f_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 \qquad f_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=(1/r)\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}$$

【例】 一个质点限制在沿等角螺线 $r=ae^{b\theta}$ 运动，其矢径以匀角速度ω旋转。求该质点的速度和加速度。

【解】 设 $\theta=\omega t$ 　　则 $r=ae^{b\omega t}$

$$\dot{\theta}=\omega \qquad \dot{r}=\omega abe^{b\omega t}$$

$$\ddot{\theta}=0 \qquad \ddot{r}=\omega^2ab^2e^{b\omega t}$$

$$f_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=(b^2-1)\omega^2ae^{b\omega t}$$

$$f_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=2ab\omega^2e^{b\omega t}$$

因此，速度的径向和横向分量是[$\omega abe^{b\omega t}$，$a\omega e^{b\omega t}$]，加速度的径向和横向分量是[$(b^2-1)a\omega^2e^{b\omega t}$，$2ab\omega^2e^{b\omega t}$]。

§1.3 相对速度和相对加速度

在时刻t，设P、Q点相对于固定原点O的位置矢量是$\boldsymbol{r}_P$、$\boldsymbol{r}_Q$，则P、Q的速度分别为$\dot{\boldsymbol{r}}_P$、$\dot{\boldsymbol{r}}_Q$；加速度分别为$\ddot{\boldsymbol{r}}_P$、$\ddot{\boldsymbol{r}}_Q$。如果在t时刻P和Q点的笛卡尔坐标为(x_P, y_P, z_P)，(x_Q, y_Q, z_Q)，过O建立坐标系$OXYZ$（图 1.4）。则有

$$\boldsymbol{r}_P=x_P\boldsymbol{i}+y_P\boldsymbol{j}+z_P\boldsymbol{k}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P=\dot{x}_P\boldsymbol{i}+\dot{y}_P\boldsymbol{j}+\dot{z}_P\boldsymbol{k}$$

由于 $\dfrac{d\boldsymbol{i}}{dt}=0,\quad \dfrac{d\boldsymbol{j}}{dt}=0,\quad \dfrac{d\boldsymbol{k}}{dt}=0$

所以 $\quad \ddot{\boldsymbol{r}}_P=\ddot{x}_P\boldsymbol{i}+\ddot{y}_P\boldsymbol{j}+\ddot{z}_P\boldsymbol{k}$

同样可以得到 $\dot{\boldsymbol{r}}_Q$、$\ddot{\boldsymbol{r}}_Q$ 的表示式。

在时刻 t 时，P 和 Q 点的相对位置为 $\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_Q$；$P$ 相对于 Q 的相对速度为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P-\dot{\boldsymbol{r}}_Q=(\dot{x}_P-\dot{x}_Q)\boldsymbol{i}+(\dot{y}_P-\dot{y}_Q)\boldsymbol{j}+(\dot{z}_P-\dot{z}_Q)\boldsymbol{k}$$

P 相对于 Q 的相对加速度为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_P-\ddot{\boldsymbol{r}}_Q=(\ddot{x}_P-\ddot{x}_Q)\boldsymbol{i}+(\ddot{y}_P-\ddot{y}_Q)\boldsymbol{j}+(\ddot{z}_P-\ddot{z}_Q)\boldsymbol{k}$$

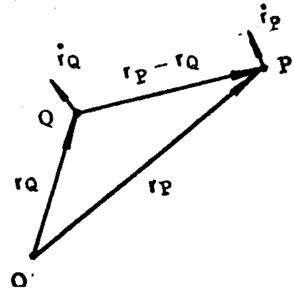


图 1.4

【例1】 速度矢端图 假定在某一时刻 t，$\overrightarrow{OP}\equiv\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$。O点为定点，而质点 P 沿曲线 C 运动，如图 1.5 (i) 所示。假定 $\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{r}/dt$ 是质点 P 的速度，在图 1.5 (ii) 中，通过固定点 O′ 作 $\overrightarrow{O'Q}\equiv\boldsymbol{v}$。那么点 Q 的轨迹 C' 称为质点 P 的速度矢端图。

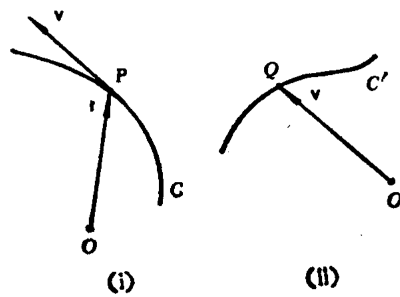


图 1.5

例如，如果质点 P 的轨迹是椭圆

$$x=a\cos nt \qquad y=b\sin nt$$
$$\dot{x}=-an\sin nt \qquad \dot{y}=bn\cos nt$$

其中 t 代表时间。可看出 $(\dot{x},\ \dot{y})$ 在速度矢端图平面上的轨迹是椭圆

$$\dot{x}^2/(na)^2+\dot{y}^2/(nb)^2=1$$

此椭圆相似于原来的椭圆，并近似位于原来椭圆的位置上。

【例2】 速度矢端图的用途 一个质点在平面上运动，在某

一时刻它的速度是$\boldsymbol{V}$，加速度 $\boldsymbol{f}=k\boldsymbol{V}+\boldsymbol{a}$ 。其中 k 是常数，$\boldsymbol{a}$ 是常矢量。证明它的加速度方向是不变的。

【证】 在图1.6中，$\overrightarrow{O'Q}\equiv\boldsymbol{V}$，$\overrightarrow{QA}\equiv\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{QB}\equiv k\boldsymbol{V}$。作平行四边形$QACB$，因此$\overrightarrow{QC}\equiv\boldsymbol{f}$。设$\angle CQA=\varphi$，$\boldsymbol{i}$ 是沿不变方向$\overline{QA}$的单位矢量，$\boldsymbol{j}$是在平面 $QACB$内与方向$\overrightarrow{QA}$垂直的单位矢量。设 $\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{i}$，则

$$\boldsymbol{f}=(ku+a)\boldsymbol{i}+kv\boldsymbol{j}$$

从而$\tan\varphi=kv/(ku+a)$。因为 $\boldsymbol{f}=\dot{u}\boldsymbol{i}+\dot{v}\boldsymbol{j}$，$\tan\varphi=\dot{v}/\dot{u}$，所以

$$\dot{v}/\dot{u}=kv/(ku+a)$$

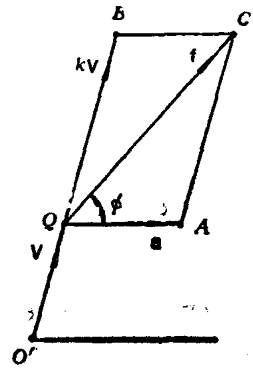


图 1.6

积分得。 $kv=A(ku+a)$。其中A是常量，因为 $\tan\varphi=A$，所以φ也是常量。

§1.4 刚体绕定点转动

任何两点间的距离保持不变的物体叫做刚体。

我们首先假定刚体通常在空间运动。设 P_1、P_2、P_3 是物体上不在同一直线上的三点，并假定任何时刻这些点对固定在空间的笛卡尔坐标是$(x_1、y_1、z_1)$，$(x_2, y_2、z_2)$，(x_3, y_3, z_3)。如果我们能确定这些点的位置，那末刚体的位置就确定了。这显然需要 9 个坐标值，但$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_1}$ 的距离是不变的。因此得到三个如下形式的方程

$$(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=\text{常数，等等。}$$

所以实际上仅有 6 个独立的坐标，我们说刚体运动具有 6 个自由度。

现在假设使刚体绕固定点O旋转。固定O点就要三个坐标，这

样绕固定点O旋转的刚体就只有三个自由度。需要两个方向余弦来确定通过点O的旋转轴的方向，确定了上述两个方向余弦值，以及一个绕此轴转动的角位移，则刚体的运动就完全确定了。因为定义刚体的自由度时，没有论及刚体的形状和大小。所以我们可以设想一个球心在O点并与刚体固定的球面S，通过此球来描述刚体的运动。如果P是刚体上任一点，且OP与球面S相交于P'点，那末P的速度显然可表示为OP/OP'乘球面S上P'点的速度。

设A和B是球面S上的两点。刚体在绕点O旋转，经过某一时间后，点A、B已运动到位置A'、B'。通过A、B在球面S上画出大圆弧分别通过A'、B'；A、A'和B、B'作圆弧（见图1.7），设A''、B''是大圆弧$\overset{\frown}{AA'}$、$\overset{\frown}{BB'}$的中点，过A''、B''分别在球面S上作AA'、BB'的垂直弧，这两弧相交于C点。在S上画CA、CA'、CB、CB'。因圆弧CA''是圆弧AA'的垂直平分线，所以弧CA、CA'是相等的。同样弧CB、CB'也是相等的。从刚体的定义知，弧AB、$A'B'$是相等的，球面三角形ABC、$A'B'C'$是全等的。因此，最初在球面三角形ABC内的球面部分现在落在球面三角形$A'B'C'$内，在这过程中点O固定不动。这证明发生了绕轴OC的旋转运动。

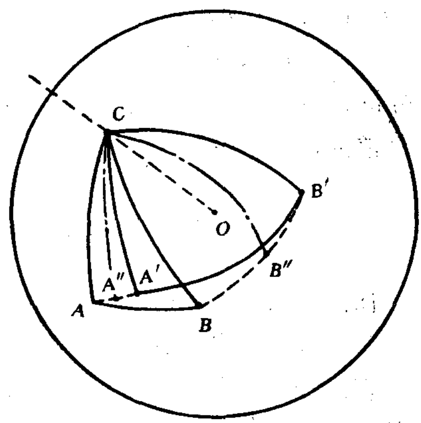


图 1.7

现假定刚体在δt时间内转动了$\delta\theta$，$\delta\theta$是平面AOC和$A'OC$间的夹角，也就是BOC、$B'OC$间的夹角。那末在δt时间内的平均角速度为$\delta\theta/\delta t$。如果角位移增量$\delta\theta$是在t到$t+\delta t$内实现的，那末在时刻t时绕轴OC的瞬时角速度是

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

这样，我们就证明了刚体绕固定点O的任何旋转运动等价于绕通过点O的定轴的转动。我们还进一步证明了怎样度量刚体绕这根轴作瞬时转动的瞬时角速度。刚体绕其瞬时转动的这根轴称做刚体转动的瞬轴。

§1.5 角速度矢量

设刚体绕固定点O转动。ω是在时刻t绕瞬轴OC转动的角速度。P是刚体内的一点，$\overrightarrow{OP} \equiv \boldsymbol{r}$。而$PM$是从$P$到$OC$的垂线（见图1.8）。因为$\overline{PM} = r\sin\theta$，所以点$P$的速度是$\omega r\sin\theta$，其方向如图所示。令$\hat{\boldsymbol{a}}$是$\overrightarrow{OC}$线上的单位矢量，其方向按右手螺旋法则沿$\omega$的转动方向确定。即以它表示角速度矢量$\boldsymbol{\omega}$的单位矢量，$\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{a}}$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = (\omega \cdot r\sin\theta)\hat{\boldsymbol{t}}$$

这里$\hat{\boldsymbol{t}}$是沿$\hat{\boldsymbol{a}} \times \hat{\boldsymbol{r}}$方向的单位矢量 。

$$\boldsymbol{v} = \omega\hat{\boldsymbol{a}} \times \hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

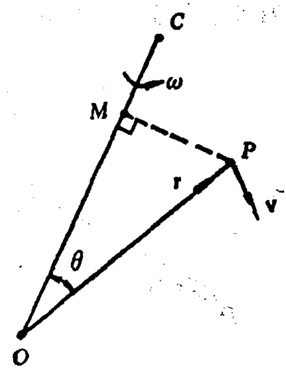


图 1.8

其中$\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{a}}$，矢量$\boldsymbol{\omega}$称做刚体绕点$O$转动的（瞬时）角速度矢量，它的大小$\omega$是绕瞬轴$OC$的实际角速度的大小，而$\hat{\boldsymbol{a}}$说明瞬轴的方向。

如果我们用以下形式写出$\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{r}$的笛卡尔分量

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \boldsymbol{r} = (x, y, z)$$

通过O建立空间固定坐标系，那末

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{r}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$