

SCHAUM'S  
ouTlines

全美经典 学习指导系列

# 工程力学

——静力学与动力学  
(原第五版)

[美] E. W. 纳尔逊 C. L. 贝斯特 W. G. 麦克莱恩 著  
贾启芬 郝淑英 译

获得好成绩的帮手

涵盖课程的所有基础，任一教材的补充

教授有效的解题技巧

460道详细解答的习题

860道带答案的练习题

理想的自学读物



科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

## 内 容 简 介

本书是一般工程力学教材的补充读物,内容涵盖工程力学课程的各个方面.全书共 19 章,每章开头阐述相关的定义、定理及原理,然后提供了各种类型和不同难度的例题以及补充习题.例题用于说明和引伸理论,展示分析方法,提供实例,以引导学生抓住问题的关键.例题中还包括了大量的定理证明和公式推导.每章的补充习题作为全章内容的复习材料,习题后给出了参考答案.

本书可供不同层次的高等学校工科各专业的学生参考.

E. W. Nelson, C. L. Best, W. G. Mclean; Schaum's Outline of Theory and Problems of Engineering Mechanics

ISBN: 0-07-046193-7

Copyright © 1998 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

Authorized translation from the English language edition published by McGraw-Hill Companies, Inc.

All rights reserved.

本书中文简体字版由科学出版社和美国麦格劳-希尔教育出版集团合作出版.未经出版者书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分.

版权所有,翻印必究.

本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签,无标签者不得销售.

图字:01-2001-5528 号

### 图书在版编目(CIP)数据

工程力学:静力学与动力学/(美)纳尔逊,(美)贝斯特,(美)麦克莱恩著;贾启芬,郝淑英译.—北京:科学出版社,2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009581-2

I.工… II.①纳… ②贝… ③麦… ④贾… ⑤郝… III.①工程力学:静力学-高等学校-教学参考资料 ②工程力学:动力学-高等学校-教学参考资料 IV. IB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 041394 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2002年2月第一版 开本:A4(890×1240)

2002年2月第一次印刷 印张:26

印数:1—4 000 字数:745 000

定价:38.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

## 序 言

本书是一般教材的补充,主要用于帮助理工科学生获取更深入的知识,熟练地掌握分析力学和应用力学.作者深信大量的例题有助于学生理解和巩固基本概念.这本书不针对任一本教材,但它对所有的教材都是非常有价值的辅导材料.

本书的前几版得到了广泛的采用.本次再版如第三版、第四版一样同时采用美国工程单位制和国际单位制,其中有近 50% 的例题和习题采用美国工程单位制,其余则为国际单位制,但每道题只用一种单位制.作者试图引用能被大学二年级学生接受的最好的数学工具,即在某些章节中运用了矢量方法,使理论叙述和问题解答更加简洁、清楚.但对用标量即可解决的问题仍然采用标量方法.第一章完整地复习了书中内容涉及到的矢量定义及矢量运算.书中的部分例题给出了计算机解,但大多数习题都可用其它方法容易地解出.

各章的标题与一般教材的标题一致.每章首先阐述相关的定义、定理及原理,然后是各种类型和难度的例题及补充习题.例题用于说明和引伸理论,展示分析方法,提供实例以引导学生抓住问题的关键,使学生能正确应用力学原理,增强学生的自信心.例题中还包括了大量的定理证明和公式推导.大部分补充习题作为全章内容的复习材料.

对于本书的第一版,作者衷心地感谢保罗·B.伊顿和 J.沃伦·吉尔森.查尔斯·L.贝斯和约翰·W.麦克纳伯对本书第二版的内容提出了十分有益的意见,且拉里·弗里德和保罗·加里校对了解题.詹姆斯·施瓦在第三版编写中协助我们做了附录 C 中的计算机解题,在第四版的编写中我们再一次感谢詹姆斯·施瓦和迈克尔·拉格伦 Jr.对附录 C 中计算机解提供的帮助.再次感谢威廉·贝尔斯对第五版中新增的例题及内容的审阅.我们衷心地感谢伊丽莎白·布尔克为本书第三版、第四版书稿的打印所付出的辛勤工作.

E. W. 纳尔逊

C. L. 贝斯特

W. G. 麦克莱恩

## Schaum 电子导学中包含的习题及章节

电子导学中包含了书中部分习题和内容,电子导学需在 Mathcad 软件包环境下运行,软件中的每一个数、每一个公式及每一张图都具有很强的交互性,并且可以进行修改.凡是标有 Mathcad 图标的习题或某项内容都可在电子导学中查到.

下表列出了电子导学所包含的习题、章节.有关软件的更多信息请参见附录 D.

习题 1.3	习题 5.6	习题 9.60	习题 14.10	习题 16.131
习题 1.5	习题 5.15	习题 10.11	习题 14.27	习题 16.132
习题 1.10	习题 5.42	习题 10.28	习题 14.50	习题 16.134
习题 1.15	习题 5.57	习题 10.42	习题 15.12	习题 16.156
习题 1.17	习题 6.1	习题 10.95	习题 15.28	习题 17.42
第 2.3 节	习题 6.2	习题 10.96	习题 15.32	习题 17.43
习题 2.3	习题 6.5	习题 10.108	习题 15.51	习题 17.48
习题 2.4	习题 6.9	习题 11.6	习题 15.57	习题 17.56
习题 2.12	习题 6.15	习题 11.8	习题 15.74	习题 17.89
习题 2.13	习题 6.29	习题 12.3	习题 15.76	习题 17.92
习题 2.28	第 7.3 节	习题 12.7	习题 16.8	习题 18.27
习题 2.30	习题 7.14	习题 12.17	习题 16.25	习题 18.40
习题 3.1	习题 7.16	习题 12.18	习题 16.27	习题 18.82
习题 3.4	习题 7.18	习题 12.36	习题 16.31	习题 18.83
习题 3.9	习题 8.3	习题 12.85	习题 16.34	习题 18.84
习题 3.46	习题 8.7	习题 13.4	习题 16.62	习题 18.109
习题 3.50	习题 9.1	习题 13.10	习题 16.70	习题 19.29
习题 4.1	习题 9.2	习题 13.53	习题 16.76	习题 19.32
习题 4.2	习题 9.20	习题 13.57	习题 16.80	习题 19.43
习题 4.4	习题 9.35	习题 14.5	习题 16.125	习题 19.48
习题 4.19	习题 9.47	习题 14.9	习题 16.128	习题 19.50
习题 5.5				

# 目 录

<b>第1章 矢 量</b> .....	( 1 )
1.1 定义 .....	( 1 )
1.2 二矢量的加法 .....	( 1 )
1.3 矢量的减法 .....	( 2 )
1.4 零矢量 .....	( 2 )
1.5 矢量的合成 .....	( 2 )
1.6 矢量与数量的乘法运算 .....	( 2 )
1.7 三维正交单位矢量 .....	( 3 )
1.8 矢径 .....	( 3 )
1.9 矢量的点积或标积 .....	( 3 )
1.10 矢量的叉积或矢积 .....	( 4 )
1.11 矢量的微积分 .....	( 5 )
1.12 量纲和单位制 .....	( 6 )
<b>第2章 力的运算</b> .....	( 15 )
2.1 力矩 .....	( 15 )
2.2 力偶 .....	( 15 )
2.3 力偶的矩矢 .....	( 16 )
2.4 力的等效 .....	( 16 )
2.5 共面力系 .....	( 16 )
2.6 要点 .....	( 17 )
<b>第3章 共面力系的合成</b> .....	( 24 )
3.1 共面力系 .....	( 24 )
3.2 汇交力系 .....	( 24 )
3.3 平行力系 .....	( 24 )
3.4 任意力系 .....	( 24 )
3.5 分布力系 .....	( 24 )
<b>第4章 非共面力系的合成</b> .....	( 35 )
4.1 非共面力系 .....	( 35 )
4.2 非共面力系的简化 .....	( 35 )
4.3 汇交力系 .....	( 35 )
4.4 平行力系 .....	( 35 )
4.5 任意力系 .....	( 35 )
<b>第5章 共面力系的平衡</b> .....	( 42 )
5.1 共面力系的平衡 .....	( 42 )
5.2 二力构件 .....	( 42 )
5.3 汇交力系 .....	( 42 )
5.4 平行力系 .....	( 42 )
5.5 任意力系 .....	( 42 )
5.6 附注——隔离体图 .....	( 43 )
<b>第6章 非共面力系的平衡</b> .....	( 60 )

6.1	非共面力系的平衡	( 60 )
6.2	汇交力系	( 60 )
6.3	平行力系	( 60 )
6.4	任意力系	( 60 )
<b>第 7 章</b>	<b>桁架和悬索</b>	<b>( 73 )</b>
7.1	桁架和悬索	( 73 )
7.2	桁架	( 73 )
7.3	悬索	( 73 )
<b>第 8 章</b>	<b>梁所受的力</b>	<b>( 88 )</b>
8.1	梁	( 88 )
8.2	梁的类型	( 88 )
8.3	剪力和弯矩	( 88 )
8.4	剪力图和弯矩图	( 89 )
8.5	剪力图和斜率	( 89 )
8.6	剪力的改变量	( 89 )
8.7	弯矩图的斜率	( 89 )
8.8	弯矩的改变量	( 90 )
<b>第 9 章</b>	<b>摩擦</b>	<b>( 98 )</b>
9.1	基本概念	( 98 )
9.2	摩擦规则	( 98 )
9.3	千斤顶	( 98 )
9.4	摩擦带和制动带	( 99 )
9.5	滚动摩擦	( 99 )
<b>第 10 章</b>	<b>一次矩和中心</b>	<b>( 120 )</b>
10.1	组合量的中心	( 120 )
10.2	连续量的中心	( 120 )
10.3	PAPPUS 与 GULDINUS 理论	( 121 )
10.4	压力中心	( 121 )
<b>第 11 章</b>	<b>虚功</b>	<b>( 143 )</b>
11.1	虚位移和虚功	( 143 )
11.2	平衡	( 143 )
11.3	稳定平衡	( 143 )
11.4	不稳定平衡	( 143 )
11.5	随遇平衡	( 144 )
11.6	平衡的概括	( 144 )
<b>第 12 章</b>	<b>质点运动学</b>	<b>( 152 )</b>
12.1	运动学	( 152 )
12.2	直线运动	( 152 )
12.3	曲线运动	( 153 )
12.4	正交分量	( 153 )
12.5	切向和法向分量	( 153 )
12.6	径向和横向分量	( 155 )
12.7	单位	( 156 )
<b>第 13 章</b>	<b>质点动力学</b>	<b>( 179 )</b>
13.1	牛顿运动定律	( 179 )

13.2	单位制	(179)
13.3	加速度	(179)
13.4	达朗贝尔原理	(179)
13.5	动力学问题	(180)
<b>第14章</b>	<b>刚体平面运动学</b>	<b>(203)</b>
14.1	刚体平面运动	(203)
14.2	平动	(204)
14.3	转动	(204)
14.4	转动的瞬时轴	(204)
14.5	科氏加速度	(204)
<b>第15章</b>	<b>惯性矩</b>	<b>(234)</b>
15.1	面积元的轴向惯性矩	(234)
15.2	面积元的极惯性矩	(234)
15.3	面积元的惯性积	(234)
15.4	面积的轴惯性矩	(234)
15.5	面积的回转半径	(234)
15.6	面积的极惯性矩	(234)
15.7	面积的惯性积	(234)
15.8	平行轴定理	(234)
15.9	组合面积	(235)
15.10	转轴公式	(235)
15.11	莫尔圆	(236)
15.12	质量元的轴向惯性矩	(236)
15.13	质量的轴向惯性矩	(236)
15.14	质量的回转半径	(237)
15.15	质量的惯性积	(237)
15.16	质量的平行轴定理	(237)
15.17	组合质量	(238)
<b>第16章</b>	<b>刚体的平面运动的动力学</b>	<b>(262)</b>
16.1	平面运动的矢量方程	(262)
16.2	平面运动的代数方程	(262)
16.3	方程的图示说明	(262)
16.4	刚体的平动	(263)
16.5	刚体转动	(263)
16.6	碰撞中心	(264)
16.7	刚体的惯性力方法	(264)
<b>第17章</b>	<b>功和能</b>	<b>(314)</b>
17.1	功	(314)
17.2	特殊情形	(314)
17.3	功率	(315)
17.4	效率	(315)
17.5	质点的动能	(315)
17.6	质点的动能定理	(315)
17.7	刚体平行移动的动能	(315)
17.8	转动刚体的动能	(316)

17.9	刚体平面运动的动能 .....	( 316 )
17.10	势能 .....	( 316 )
17.11	刚体的动能定理 .....	( 317 )
17.12	能量守恒定律 .....	( 317 )
<b>第 18 章</b>	<b>冲量与动量</b> .....	<b>( 337 )</b>
18.1	质点的动量定理 .....	( 337 )
18.2	质点系的动量定理 .....	( 337 )
18.3	动量矩 .....	( 337 )
18.4	相对动量矩 .....	( 338 )
18.5	相应的代数方程组 .....	( 338 )
18.6	单位 .....	( 339 )
18.7	线动量守恒 .....	( 339 )
18.8	角动量守恒 .....	( 339 )
18.9	碰撞 .....	( 339 )
18.10	变质量 .....	( 340 )
<b>第 19 章</b>	<b>机械振动</b> .....	<b>( 365 )</b>
19.1	定义 .....	( 365 )
19.2	自由度 .....	( 365 )
19.3	简谐运动 .....	( 365 )
19.4	多自由度系统 .....	( 366 )
19.5	单位 .....	( 366 )
<b>附录 A</b>	<b>SI 单位制</b> .....	<b>( 388 )</b>
<b>附录 B</b>	<b>一次矩和形心</b> .....	<b>( 390 )</b>
<b>附录 C</b>	<b>部分习题的计算机解</b> .....	<b>( 392 )</b>
<b>附录 D</b>	<b>Schaum 的电子导学算例分析</b> .....	<b>( 396 )</b>
<b>实例</b>	.....	<b>( 397 )</b>



# 第 1 章 矢 量

## 1.1 定义

标量只具有大小,例如,时间,体积,能量,质量,密度(比重),功.用代数的方法进行标量的求和运算,例如,  $2\text{ s} + 7\text{ s} = 9\text{ s}$ ;  $14\text{ kg} - 5\text{ kg} = 9\text{ kg}$ .

矢量具有大小和方向\*,例如:力,位移,速度,冲量.矢量用一个具有已知斜度的带箭头的线段表示.箭头的指向表示了矢量的方向,其线段长短表示了矢量的大小.矢量的符号用黑斜体印刷字母表示,例如  $\mathbf{P}$ ,其大小用  $|\mathbf{P}|$  或  $P$  表示.

自由矢量可以在空间任意移动,而不改变其大小和方向.

滑移矢量可以沿着其作用线方向自由滑动.根据力的可传性原理,滑移矢量对刚体的作用效果不变.

定位矢量的作用点不能移动.

单位矢量是一个具有单位长度的矢量.

矢量  $\mathbf{P}$  的负矢量用  $-\mathbf{P}$  表示,其大小和作用线相同但方向相反.

矢量系统的合成结果是表示已知矢量系统的最小数目的矢量.

## 1.2 二矢量的加法

(a) 根据平行四边形定则,矢量  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  的合矢量  $\mathbf{R}$ ,是以  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  为边组成的平行四边形的对角线,如图 1-1(a) 所示.  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  也称合矢量  $\mathbf{R}$  的分量.

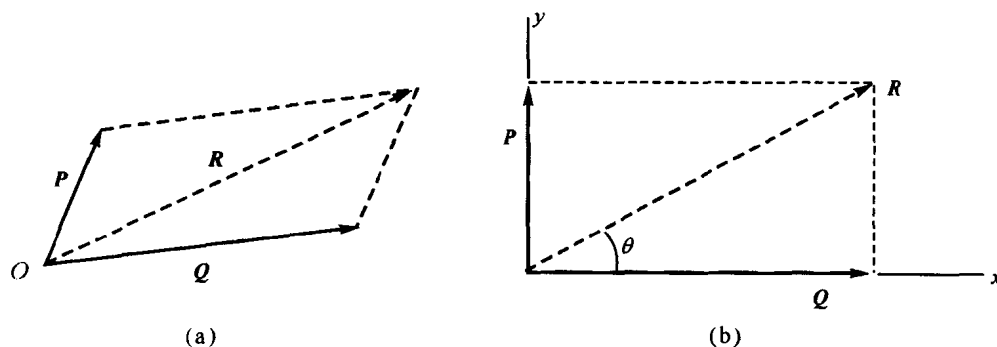


图 1-1

(b) 如果图 1-1(a) 所示的平行四边形的边是垂直的,则矢量  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  称作矢量  $\mathbf{R}$  的垂直分量,如图 1-1(b) 所示.垂直分量的大小表示为

$$Q = R \cos \theta$$

和

$$P = R \cos(90^\circ - \theta) = R \sin \theta$$

(c) 三角形定则.任取一个矢量,在其末端连接另一矢量的始端,则合矢量从第一个矢量的始端连接到另一矢量的末端.三角形定则由平行四边形定则引出,因为平行四边形的对应边是自由矢量如图 1-2 所示

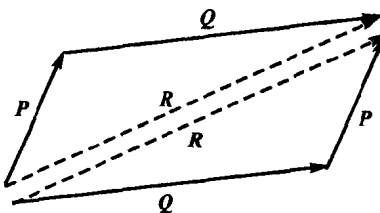


图 1-2

\* 方向是指力作用线的方位及箭头指向.

(d) 矢量加法满足交换律, 即  $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}$

### 1.3 矢量的减法

矢量的减法是矢量加法的逆运算, 即

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q})$$

或

$$-(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = -\mathbf{P} - \mathbf{Q}$$

### 1.4 零矢量

零矢量是一个矢量与自身的减法运算, 即,  $\mathbf{P} - \mathbf{P} = \mathbf{0}$ . 也称之为零矢量.

### 1.5 矢量的合成

矢量的合成是求矢量系统的合矢量的过程. 作矢量多边形, 是将每个矢量依此首尾连接而成如图 1-3 所示. 则合矢量从第一个矢量的始端连接到最后一矢量的末端. 最后指出, 不是所有的矢量系统都能简化成一个矢量. 合矢量与矢量的作图顺序无关, 例如 3 个已知矢量  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{S}$ , 则

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} \\ &= \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) = (\mathbf{P} + \mathbf{S}) + \mathbf{Q} \end{aligned}$$

以上方程可以扩展到具有多个矢量的系统.

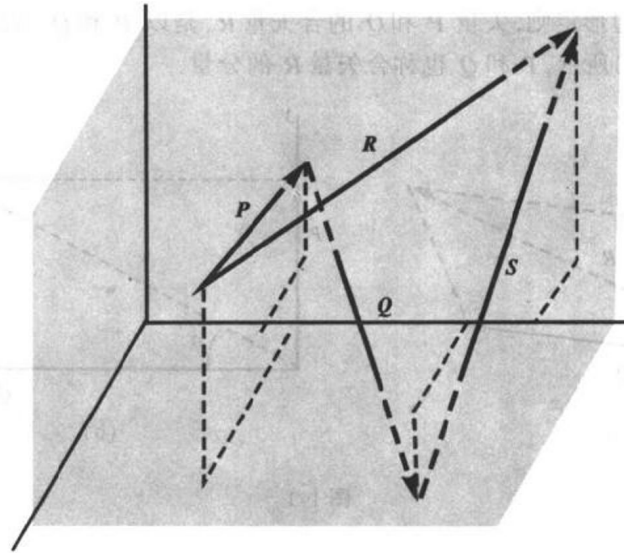


图 1-3

### 1.6 矢量与数量的乘法运算

(a) 矢量  $\mathbf{P}$  与数量  $m$  相乘等于  $m\mathbf{P}$ , 其大小是矢量  $\mathbf{P}$  的  $m$  倍, 作用线与  $\mathbf{P}$  相同, 但方向要取决于  $m$  的正负.

(b) 矢量与数量  $m$  和  $n$  的运算, 即

$$\begin{aligned} (m + n)\mathbf{P} &= m\mathbf{P} + n\mathbf{P} \\ m(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) &= m\mathbf{P} + m\mathbf{Q} \\ m(n\mathbf{P}) &= n(m\mathbf{P}) = (mn)\mathbf{P} \end{aligned}$$

### 1.7 三维正交单位矢量

沿着正交的三维坐标轴  $x, y$  和  $z$  作单位矢量  $i, j$  和  $k$ . 建立右手坐标系如图 1-4 所示.

矢量  $P$  可以写成

$$P = P_x i + P_y j + P_z k$$

这里  $P_x i, P_y j$  和  $P_z k$  是  $P$  沿着正交坐标轴  $x, y$  和  $z$  的分矢量, 如图 1-5 所示.

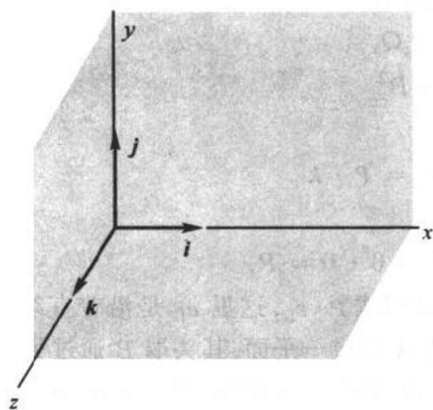


图 1-4

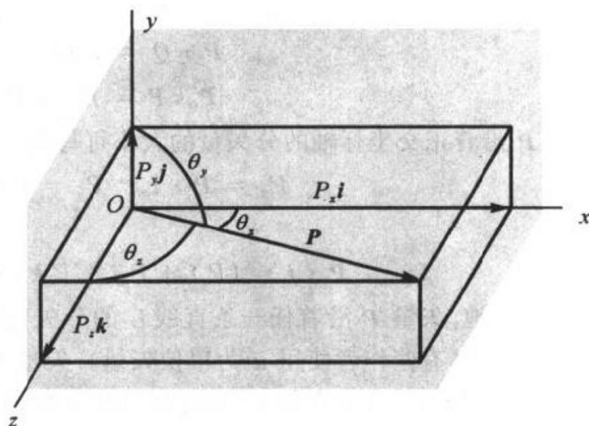


图 1-5

注意  $P_x = P \cos \theta_x$ ,  $P_y = P \cos \theta_y$ ,  $P_z = P \cos \theta_z$ .

### 1.8 矢径

坐标为  $(x, y, z)$  的矢径  $r$  可以写成

$$r = xi + yj + zk$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ 见图 1-6.}$$

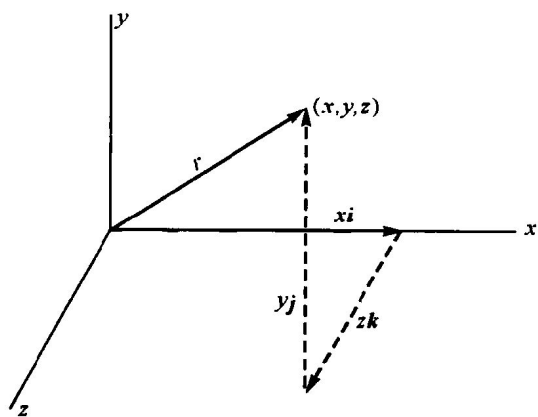


图 1-6

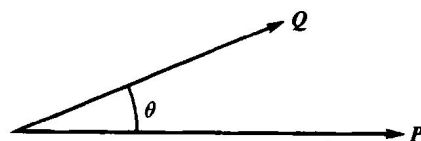


图 1-7

### 1.9 矢量的点积或标积

二矢量  $P$  和  $Q$  的点积或标积写成  $P \cdot Q$ , 是一个代数量, 其大小等于二矢量大小及其方向夹角  $\theta$  的余弦的乘积(见图 1-7). 即

$$P \cdot Q = PQ \cos \theta$$

下面列出标积的运算规律, 这里  $m$  表示标量:

$$P \cdot Q = Q \cdot P$$

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$$

$$(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{T}) + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}$$

$$m(\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}) = (m\mathbf{P}) \cdot \mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot (m\mathbf{S})$$

因为  $i, j$  和  $k$  是正交的单位矢量, 所以

$$i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = (1)(1)\cos 90^\circ = 0$$

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = (1)(1)\cos 0^\circ = 1$$

且, 如果  $\mathbf{P} = P_x i + P_y j + P_z k$  和  $\mathbf{Q} = Q_x i + Q_y j + Q_z k$ , 则

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$

矢量  $\mathbf{P}$  沿着正交坐标轴的分矢量的大小可写成

$$P_x = \mathbf{P} \cdot i, \quad P_y = \mathbf{P} \cdot j, \quad P_z = \mathbf{P} \cdot k$$

例如,

$$\mathbf{P} \cdot i = (P_x i + P_y j + P_z k) \cdot i = P_x + 0 + 0 = P_x$$

类似地, 矢量  $\mathbf{P}$  沿着任一条直线  $L$  的分矢量的大小可写成  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_L$ , 这里  $\mathbf{e}_L$  是沿着直线  $L$  的单位矢量(有些作者使用  $\mathbf{u}$  为单位矢量). 矢量  $\mathbf{P}$  的尾端  $A$  通过一平面, 其头端  $B$  通过另一平面, 此二平面垂直于直线  $L$ , 并与直线分别交于  $C$  和  $D$  点, 如图 1-8 所示. 矢量  $\mathbf{CD}$  是矢量  $\mathbf{P}$  沿  $L$  方向的分矢量, 其大小等于  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_L = P e_L \cos \theta$ .

这些原理的应用见题 1.15 和 1.16.

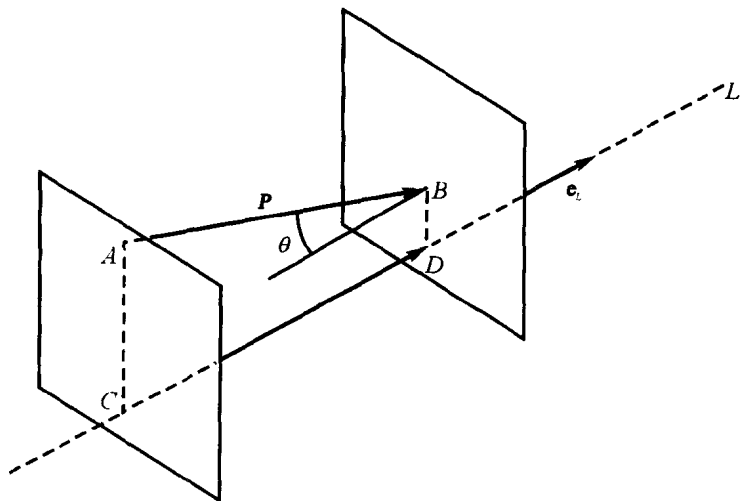


图 1-8

### 1.10 矢量的叉积或矢积

二矢量  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  矢积可以写成  $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ , 用  $\mathbf{R}$  表示. 其大小等于二矢量大小与其夹角正弦之积. 矢量  $\mathbf{R} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$  沿  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  组成的平面的法向, 其方向由右手螺旋法则决定, 即从  $\mathbf{P}$  的方向经过二矢量的最小夹角  $\theta$  到  $\mathbf{Q}$  方向. 这样, 如果用  $\mathbf{e}$  表示已知方向  $\mathbf{R} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$  的单位矢量, 叉积可以写成

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (PQ \sin \theta) \mathbf{e}, \quad 0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

图 1-9 表明  $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = -\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$  (不能交换).

下面列出矢积的运算法则, 这里  $m$  是标量.

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{S}$$

$$(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \times (\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \mathbf{P} \times (\mathbf{S} + \mathbf{T}) + \mathbf{Q} \times (\mathbf{S} + \mathbf{T})$$

$$= \mathbf{P} \times \mathbf{S} + \mathbf{P} \times \mathbf{T} + \mathbf{Q} \times \mathbf{S} + \mathbf{Q} \times \mathbf{T}$$

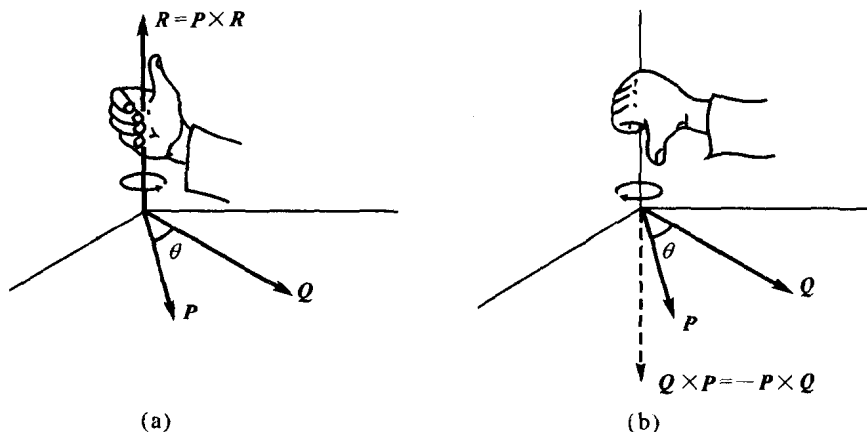


图 1-9

$$m(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = (m\mathbf{P}) \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times (m\mathbf{Q})$$

由于  $i, j$  和  $k$  是正交的, 所以有

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$$

并且, 如果  $\mathbf{P} = P_x i + P_y j + P_z k$  和  $\mathbf{Q} = Q_x i + Q_y j + Q_z k$ , 则

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_y Q_z - P_z Q_y)i + (P_z Q_x - P_x Q_z)j + (P_x Q_y - P_y Q_x)k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

矢积行列式的证明见例题 1.12.

### 1.11 矢量的微积分

(a) 以标量, 例如时间  $t$  为变量的矢量  $\mathbf{P}$  的微分运算规则如下.

令  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ , 即  $\mathbf{P}$  是时间  $t$  的函数.  $\Delta \mathbf{P}$  是当时间从  $t$  变化到  $(t + \Delta t)$  时  $\mathbf{P}$  的增量.

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t)$$

即

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t)}{\Delta t}$$

如果  $\mathbf{P}(t) = P_x i + P_y j + P_z k$ , 这里  $P_x, P_y$  和  $P_z$  是时间  $t$  的函数, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(P_x + \Delta P_x)i + (P_y + \Delta P_y)j + (P_z + \Delta P_z)k - P_x i - P_y j - P_z k}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x i + \Delta P_y j + \Delta P_z k}{\Delta t} = \frac{dP_x}{dt} i + \frac{dP_y}{dt} j + \frac{dP_z}{dt} k \end{aligned}$$

下列运算是有效的:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{Q}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \frac{d\mathbf{Q}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\psi \mathbf{P}) = \psi \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \mathbf{P}$$

这里  $\psi$  是  $t$  的数量函数.

(b) 关于对标量如时间  $t$  为变量的矢量  $\mathbf{P}$  的积分运算规则如下.

让  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ , 即  $\mathbf{P}$  是时间  $t$  的函数, 则

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{P}(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) dt \\ &= \mathbf{i} \int_{t_0}^{t_1} P_x dt + \mathbf{j} \int_{t_0}^{t_1} P_y dt + \mathbf{k} \int_{t_0}^{t_1} P_z dt\end{aligned}$$

### 1.12 量纲和单位制

在力学的学习中, 用一套被称之为量纲的基本量, 描述物体特性及其运动. 在美利坚合众国, 工程师们习惯用力、长度、时间的量纲作为基本系统. 在全世界大部分国家, 使用质量、长度和时间作为基本系统. 在美国也有趋于使用第二种系统的趋势.

两套系统起源于牛顿的运动第二定律, 即

$$\mathbf{R} = M\mathbf{a}$$

$\mathbf{R}$  是作用在质点上的所有力的合力,  $\mathbf{a}$  是质点的加速度,  $M$  是不变量被称之为质量.

#### 美国通用单位制

在这套工程单位制中, 长度的单位是英尺(ft), 时间的单位是秒(s), 力的单位是磅(lb). 质量为  $M$  的物体自由落到地面上, 由于受重力加速度  $g$  的作用, 产生地心引力  $W$ . 力  $W$  的重用磅(lb)来测量, 加速度  $g$  用  $\text{ft/s}^2$ . 牛顿第二定律写成标量形式为

$$W = Mg$$

重力加速度  $g$  的值随着地面位置的不同发生变化. 在本书中取值为  $32.2 \text{ ft/s}^2$ . 表明重 1 磅的物体, 自由落到地面上将获得  $32.2 \text{ ft/s}^2$  的加速度. 上式为

$$M = \frac{W}{g} = \frac{1 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = \frac{1 \text{ lbs}^2}{32.2 \text{ ft}} = \frac{1}{32.2} \text{ slug}^*$$

在求解静力学问题时, 不涉及到质量. 但认识对于已知物体的质量的不变性是十分重要的. 在月球上, 对于相同质量的物体其引力是地球引力的  $1/6$ .

#### 国际单位制(SI)

在国际单位制(SI)\*\*中, 质量的单位是千克(kg), 长度的单位是米(m), 时间的单位是秒(s), 力的单位是牛顿(N), 力的单位是导出单位, 即质量为 1 千克的质点, 获得  $1 \text{ 米/秒}^2$  的加速度时, 作用于该质点的力为 1 牛顿. 即

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

具有 1 kg 质量的物体自由落到地面时重力加速度的值将随位置的不同而变化. 在本书中, 假设重力加速度的平均值为  $9.80 \text{ m/s}^2$ . 这样 1 kg 质量的物体受到重力为

$$W = Mg = (1 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 9.80 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 9.80 \text{ N}$$

当然, 在求解静力学问题的力系中, 已知质量的千克数不是力, 应使用作用在质量上的重力. 在所有有关质量问题上, 学生们应当记住以质量的千克数乘以  $9.8 \text{ m/s}^2$ , 才能得到用牛顿表示的重力. 5 kg 质量受到的重力作用是  $5 \times 9.8 = 49 \text{ N}$ .

学生们应永远记住, 在国际单位制中, 毫米(mm)是工程制图标准长度单位. 因此, 所有工程制图量纲必须是毫米( $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ ). 另外, 在数字与单位符号之间应留有空, 例如  $2.85 \text{ mm}$  而不是  $2.85\text{mm}$ . 当书写五位或更多数字时, 应在小数点前 3 位留有空, 如  $12\ 832.325$ . 在国际单位制中不使用逗号. 书写四位数字的值时, 可以不留空隙, 但五位或更多位数值时则留有空隙.

SI 是国际单位制缩写. 附录 A 包含了国际单位制的表格及与现代米制的换算因数. 在本

\* slug 是“英尺-磅(力)-秒”单位制的质量单位, 名称为斯——译注.

\*\* SI 是国际单位制的缩写.

书中有 50% 的问题使用美国通用单位制, 50% 的问题使用国际单位制.

### 例 题

- 1.1 如图 1-10(a)所示, 在同一平面上, 作用有与水平  $x$  轴夹角为  $30^\circ$  的力 120 lb 和夹角  $90^\circ$  的力 -100 lb. 试用平行四边形法则求此二力之合力.

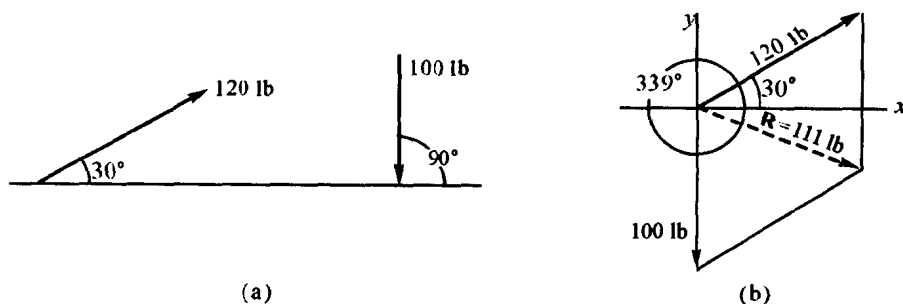


图 1-10

**解** 画原题中的力不必按比例, 只需画一个草图. 负号证明, 100 lb 的力沿着与水平线夹角  $90^\circ$  的作用线铅垂向下. 根据力的可传性, 此力等效于与水平线夹角为  $270^\circ$  的 100 lb 的力.

如图 1-10(b), 在平面上, 让二矢量的尾端汇在一个公共点上, 并选择合适的比例画出二矢量, 完成平行四边形. 选择比例测出合力  $R$  为 111 lb. 用量角器量出它与  $x$  轴的夹角为  $\theta_x = 339^\circ$ .

考虑如图 1-10(b)所示的三角形, 其中一边是与  $y$  轴重合. 三角形的三边是  $R$ , 100 和 200. 100 与 200 两边的夹角是  $60^\circ$ . 应用余弦定理.

$$R^2 = 120^2 + 100^2 - 2(120)(100)\cos 60^\circ, \quad R = 111 \text{ lb}$$

由正弦定理

$$\frac{120}{\sin \alpha} = \frac{111}{\sin 60^\circ}, \quad \alpha = 69^\circ$$

$69^\circ$  加上  $270^\circ$ , 则夹角是  $339^\circ$ .

- 1.2 用三角形法则求题 1.1. 见图 1-11.

**解** 先选哪个矢量都可以. 以 120 lb 的力为第一个矢量, 在其末端连接 100 lb 的力的始端. 最后, 从 120 lb 力的始端连向 100 lb 力的末端即为合力. 按选择的比例测量出大小和方向, 其合力如题 1.1 相同.

- 1.3 同一平面上二力之合力为 400 N, 方向  $120^\circ$ , 其中一分力为 200 N, 方向  $20^\circ$ . 试求另一未知分力. 见图 1-12.

**解** 选择公共点, 并用方便的比例画出合力和另一已知分力.

作出已知力与合力的矢端连线, 方向由力的矢端指向合力的矢端, 则此连线代表未知力, 用比例尺量出, 此力大小为 477 N, 且  $\theta_x = 144^\circ$ .

此结果也可通过三角学定则的解析法解出.  $R$  与 200 N 力之间的夹角是  $100^\circ$ , 因此, 由余弦定理, 未知力  $F$  为

$$F^2 = 400^2 + 200^2 - 2(400)(200)\cos 100^\circ, \quad F = 477 \text{ N}$$

令力  $F$  与 200 N 之间的夹角为  $\alpha$ , 则由正弦定理

$$\frac{477}{\sin 100} = \frac{400}{\sin \alpha}, \quad \alpha = 55.7^\circ, \quad \theta_x = 144^\circ$$

- 1.4 在同一平面中, 从 280 N,  $320^\circ$  的力中减去 130 N,  $60^\circ$  的力. 见图 1-13.

**解** 由平行四边形法则, 将 280 N,  $320^\circ$  的力与 -130 N,  $60^\circ$  的力求矢量和, 可获得合力为 330 N,  $297^\circ$ . 所有角度都是与  $x$  轴的夹角.

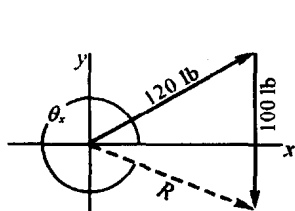


图 1-11

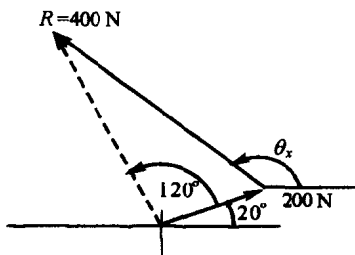


图 1-12

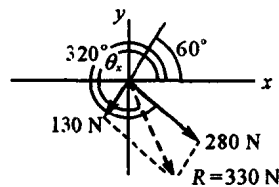


图 1-13

1.5 试求如下平面力系的合力: 26 lb, 10°; 39 lb, 114°; 63 lb, 183°; 57 lb, 261°, 见图 1-14.

解 应用力多边形法则, 将诸矢量依次首尾相接, 见图 1-14(a).

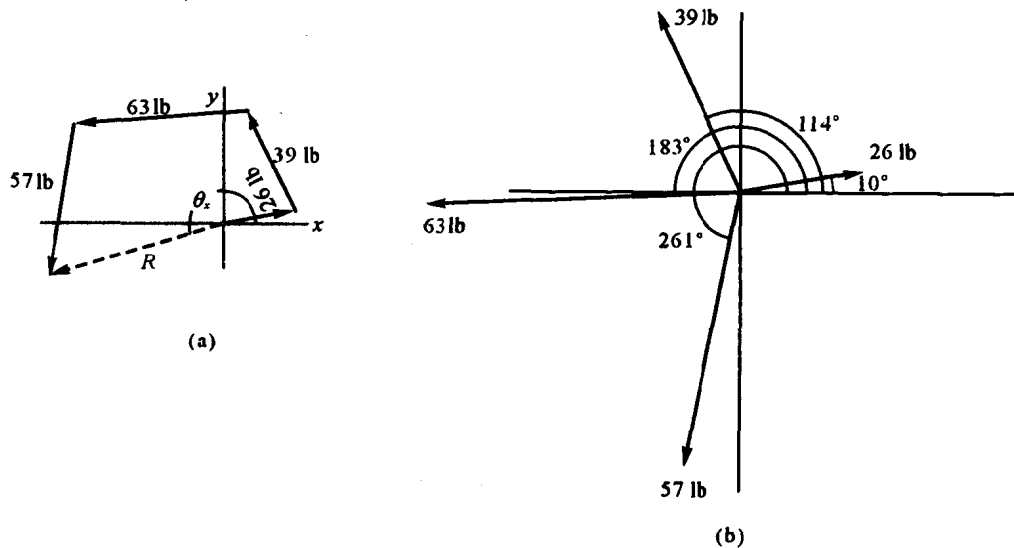


图 1-14

合矢量则从第一个矢量的始端连接到最后一个矢量的头端, 并用比例尺测出合力,  $R = 65 \text{ lb}$ ,  $\theta_x = 197^\circ$ .

本题也可以用求解合力的正交分量的解析法解出. 将图 1-14(b)中每个力求出沿  $x, y$  方向的垂直分量, 因为沿  $x$  轴的分量求和是求代数数,  $y$  方向相同. 现在, 如果分别求出了  $x$  与  $y$  的分量, 则相当于求出了合力在  $x, y$  方向的两个分量, 这样

$$R_x = 26\cos 10^\circ + 39\cos 114^\circ + 63\cos 183^\circ + 57\cos 261^\circ = -62.1$$

$$R_y = 26\sin 10^\circ + 39\sin 114^\circ + 63\sin 183^\circ + 57\sin 261^\circ = -19.5$$

$$R = \sqrt{(-62.1)^2 + (-19.5)^2}, \quad R = 65 \text{ lb}$$

$$\tan \theta_x = \frac{-19.5}{-62.1}, \quad \theta_x = 17^\circ, \quad \theta = 180^\circ + 17^\circ = 197^\circ$$

1.6 在图 1-15 中, 力  $F$  沿  $OH$  方向的垂直分量为 10 lb, 且力  $F$  与  $x$  轴正向夹角为  $60^\circ$ , 试求力  $F$  的大小.

解 力  $F$  沿  $OH$  的分量是  $F\cos\theta$ , 即  $F\cos 15^\circ = 10$  或  $F = 10.35 \text{ lb}$ .

1.7 一个重 80 kg 的人站在与水平面夹角为  $20^\circ$  的木板上, 求人的重力(a)沿木板的法向分量, (b)平行木板的分量. 见图 1-16.

解 (a) 重力矢量与木板法向夹角为  $20^\circ$ , 大小为  $80(9.8) = 784 \text{ N}$ . 有比例尺量出法向分量为 740 N, 由三角学, 法向分量为  $784 \cos 20^\circ = 737 \text{ N}$ .

(b) 由比例尺量出其平行分量为 270 N. 由三角学, 应是  $784 \cos 70^\circ = 268 \text{ N}$ .



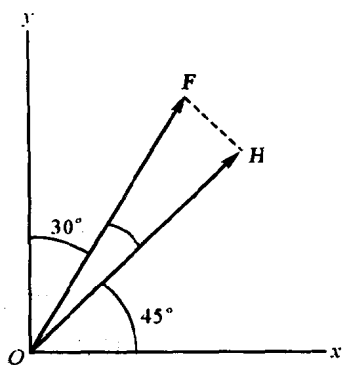


图 1-15

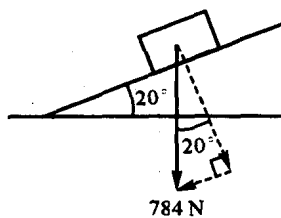


图 1-16

- 1.8 如图 1-17(a)所示,一木块静止放在与水平线成  $22^\circ$  夹角的斜面上,其上作用一与水平线夹角为  $60^\circ$  的力  $P = 235 \text{ N}$ . 试用代数方法解出 (b)  $P$  的水平及铅垂分量, (c)  $P$  与斜面平行及垂直分量.

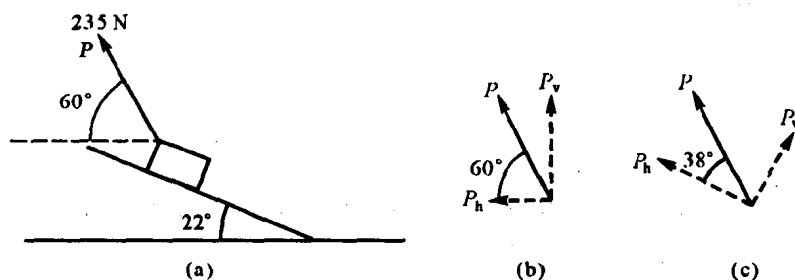


图 1-17

解 (a) 水平分量  $P_h$ , 方向指向左, 大小等于  $235 \cos 60^\circ = 118 \text{ N}$ . 垂直分量  $P_v$ , 铅垂向上, 大小等于  $235 \sin 60^\circ = 204 \text{ N}$ , 如图 1-17(b) 所示.

(b) 分量  $P_{\parallel}$ , 平行与斜面, 指向上, 等于  $235 \cos(60^\circ - 22^\circ) = 15 \text{ N}$ , 分量  $P_{\perp}$  沿斜面法向, 大小等于  $235 \sin 38^\circ = 145 \text{ N}$ , 如图 1-17(c) 所示.

- 1.9 如图 1-18 所示的 3 个力, 若合力大小为  $20 \text{ lb}$ , 沿  $y$  轴铅垂向下, 试求力  $F$  和  $P$  的大小.

解 由于合力是  $20 \text{ lb}$ , 并且沿  $y$  轴指向上, 则有  $R_x = 0, R_y = 20 \text{ lb}$ .

分力沿  $x$  轴的代数和等于合力在  $x$  轴的投影  $R_x = P \cos 30^\circ - 90 \cos 40^\circ = 0$ , 解出  $P = 79.6 \text{ lb}$ . 同样地,  $R_y = P \sin 30^\circ + 90 \sin 40^\circ - F = 20$ , 得  $F = 77.7 \text{ lb}$ .

- 1.10 如图 1-19 所示, 坐标轴  $x, y$  和  $z$  沿正六面体的三个边的方向, 且三边长度分别为  $4, 3$  和  $2 \text{ m}$ . 如果对角线  $OP$  代表  $50 \text{ N}$  的力, 试求该力沿  $x, y$  和  $z$  的分量. 并用单位矢量  $i, j, k$  符号表示力矢量.

解 让  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  表示对角线  $OP$  与坐标轴  $x, y, z$  之间的夹角. 则

$$P_x = P \cos \theta_x, \quad P_y = P \cos \theta_y, \quad P_z = P \cos \theta_z$$

长度  $OP = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = 5.38 \text{ m}$ . 这里

$$\cos \theta_x = \frac{4}{5.38}, \quad \cos \theta_y = \frac{3}{5.38}, \quad \cos \theta_z = \frac{2}{5.38}$$

每个分量均沿坐标轴的正方向, 有

$$P_x = 50 \cos \theta_x = 37.2 \text{ N}, \quad P_y = 50 \cos \theta_y = 27.9 \text{ N}, \quad P_z = 50 \cos \theta_z = 18.6 \text{ N}$$

矢量  $P = P_x i + P_y j + P_z k = 37.2 i + 27.9 j + 18.6 k \text{ N}$ .