

# 齿轮啮合理论

(附微分几何简介)

吴大任 骆家舜 著

2.4



科学出版社

## 内 容 简 介

本书以微分几何为工具阐述线接触的齿轮啮合理论，全书包括九章及一个附篇。前五章属于基本理论而以诱导法曲率为中心。后四章以二次作用和二次包络为中心并论述其应用。附篇对本书所涉及的微分几何知识作了扼要而较全面的介绍，读者可免于查阅一般的微分几何教材。

本书可供从事齿轮设计的工程技术人员和有关的数学工作者阅读，也可作为高等院校机械制造专业的选修课及研究生的教材。

## 齿 轮 啮 合 理 论

(附微分几何简介)

吴大任 骆家舜 著

责任编辑 杜小杨

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1985 年 10 月 第 一 版 开本：850×1168 1/32

1985 年 10 月 第 一 次 印 刷 印张：10 3/8

印数：0001—5,000 字数：269,000

统一书号：13031·2997

本社书号：4049·13—1

定 价： 2.95 元

## 前 言

本书以微分几何为工具阐述线接触的齿轮啮合理论。

第一章是微分几何补充。就其性质来说，它属于微分几何范畴，但其具体内容则是一般微分几何教材中未加论述的，或虽有论述但表达形式不便应用于齿轮啮合理论的。前者如相切曲面的相对曲率，后者如包络理论。

第二章至第四章比较系统地叙述了齿轮啮合理论的基础：其中第二章阐明了后面用到的相对微导的方法，第三章和第四章可以叫做共轭曲面理论；而第四章的诱导法曲率则是一个重要概念，我们给出了关于它的一般公式。第五章把对共轭曲面的探索深入到三阶微分邻域。

第六章论述二次作用和直接展成法原理。最后三章则是一般原理(包括二次作用原理)的一些应用。二类界点(和二界共轭点)在二次作用中的特殊地位进一步揭示了这些点的本质，而根据二次作用原理，可以设计出几种新型的齿轮副，其中的曲面偶在某些啮合点诱导法曲率的绝对值都较小。

第一章和第三章中带\*号的各节和分节依次是基本理论的推论和在一些常见齿轮副上的具体化，第一次阅读时可以略去，不影响对基本理论的探讨。

关于本书所用到的微分几何知识，我们辑成附篇，供读者参考。

从1971年起，南开大学开始对齿轮啮合理论进行研究，随后即在数学系成立了齿轮啮合研究组。严志达教授长期参加了研究组，并创立了本书所采用的理论体系；例如第二章至第四章中所阐述和论证的相对微导法、两个界函数的表达式及其相互关系、诱导法曲率的一般公式(第四章，§1，公式(3))等，都是他的重要贡

献,他的其他成果,不能尽举。

南开大学齿轮啮合研究组的研究成果,一部分已公开发表,一部分曾在一些会议上以油印资料形式散发。本书第三,四两章就曾汲取了油印资料《关于二次接触和直接展成法》(1977)和《欧拉公式的推广及应用和诱导法曲率公式》(1977)里的一些成果。

1976年和1977年,本书作者之一吴大任在南开大学开设了“微分几何与齿轮啮合理论”课程,并编写了讲义,讲授本书附篇和第一章至第四章的内容。该讲义曾经郑州机械研究所(1977)和重庆大学(1979)翻印。本书另一个作者骆家舜曾在八次讲习班上对啮合原理及其应用作了讲述。本书就是应工程技术界有关朋友的要求,以那份讲义为基础,经过整理修订,增加了以后的若干研究成果而编成的。

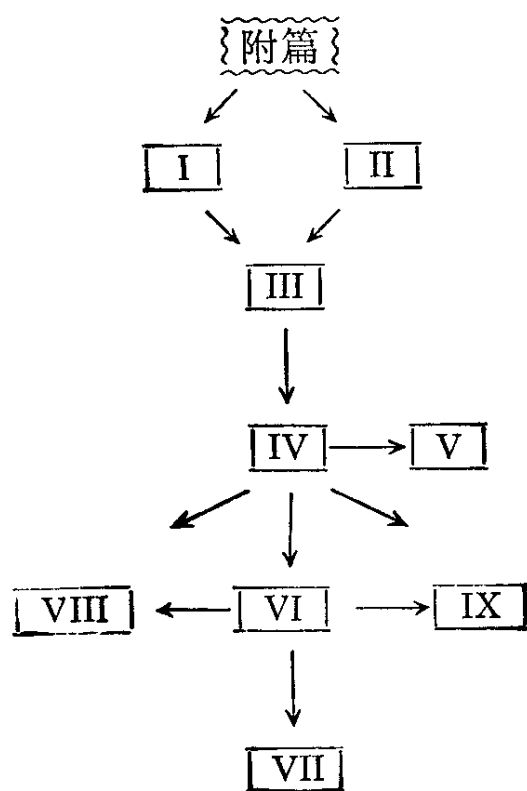
我们在研究齿轮啮合理论的过程中,曾经得到工程技术界许多同志不同形式的帮助。在这里,我们特别要感谢天津机械研究所的张亚雄和齐骥两同志,他们向我们提出了一系列问题,导致我们开展这方面的研究并逐步深入,在平面二次包络理论和应用的研究中,他们还是我们的合作者。南开大学数学系的姜作廉同志誊写了全部书稿,并绘了图;通过他的校核,避免了不少差错,我们也愿对他表示谢意。

由于作者接触实际不多,看到的文献有限,无论从理论或实践的角度看,本书都可能有不少缺点和错误,恳切希望读者指出,以便改正。

吴大任 骆家舜

1982年4月

## 本书各章的逻辑联系



# 目 录

前言

<b>第一章 微分几何补充</b> .....	1
§ 1 关于法曲率和短程挠率的相互关系.....	1
§ 2* 欧拉公式和贝特朗公式的一种推广 .....	5
§ 3 相对法曲率和相对短程挠率.....	7
§ 4 单参数曲面族的包络面.....	14
<b>第二章 运动和相对运动</b> .....	26
§ 1 刚体运动.....	27
§ 2 相对运动.....	33
§ 3 相对微导.....	45
<b>第三章 共轭曲面</b> .....	52
§ 1 啮合方程, 共轭曲面.....	52
§ 2* 直柱齿轮 .....	59
§ 3 两类界点.....	64
§ 4* 直柱齿轮齿条 .....	74
§ 5 有关两个界函数的公式.....	80
§ 6 接触线法线上的矢量.....	86
§ 7 界法曲率.....	90
§ 8 关于界函数的一个恒等式.....	92
§ 9 欧拉-萨瓦雷公式的一种推广 .....	95
§ 10* 几种特殊情况.....	98
<b>第四章 诱导法曲率</b> .....	110
§ 1 诱导法曲率公式.....	110
§ 2 诱导短程挠率公式.....	114
§ 3 一般结论.....	116
§ 4 在滚动接触点的情况.....	120
<b>第五章 诱导法曲率导数</b> .....	122

§ 1	法曲率导数	122
§ 2	相对法曲率导数	124
§ 3	诱导法曲率导数	126
<b>第六章</b>	<b>二次作用和直接展成法原理</b>	<b>133</b>
§ 1	关于三个相切曲面的一个引理	134
§ 2	关于二次接触	138
§ 3	第一次包络. 曲面偶 $[\Sigma^{(2)}, \Sigma^{(1)}]$	142
§ 4	第二次包络. 曲面偶 $[\Sigma^{(1)}, \hat{\Sigma}^{(2)}]$	144
§ 5	直接展成法概述	150
§ 6	关于直接展成法的一般计算方法	151
<b>第七章</b>	<b>平面二次包络(直接展成法)</b>	<b>155</b>
§ 1	坐标系及其底矢变换公式	155
§ 2	第一次包络. 曲面偶 $[\Sigma^{(2)}, \Sigma^{(1)}]$	158
§ 3	第二次包络. 曲面偶 $[\Sigma^{(1)}, \hat{\Sigma}^{(2)}]$	164
§ 4	第二次包络. 曲面偶 $[\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)*}]$	168
§ 5	经过修形的二次包络	174
<b>第八章</b>	<b>间接展成法原理. 平面二次包络(间接展成法)</b>	<b>181</b>
§ 1	中介齿面	181
§ 2	间接展成法原理	189
§ 3	平面二次包络(间接展成法)	198
<b>第九章</b>	<b>直线弧面蜗杆蜗轮</b>	<b>213</b>
§ 1	坐标系及其底矢变换公式	213
§ 2	蜗杆齿面	215
§ 3	蜗轮齿面	217
§ 4	二界函数	221
§ 5	一界函数. 诱导法曲率	223

## 附 篇

### 微分几何简介

<b>第一章</b>	<b>矢代数及其在解析几何中的简单应用</b>	<b>226</b>
------------	-------------------------	------------

§ 1	矢代数	226
§ 2	坐标变换	237
§ 3	刚体变换	243
<b>第二章</b>	<b>曲线</b>	<b>248</b>
§ 1	曲线与矢函数	248
§ 2	矢函数的导矢与曲线的切线	252
§ 3	切线与法面. 弧长	256
§ 4	曲率	259
§ 5	基本公式. 挠率	264
§ 6	简单的例	269
§ 7	主法线的正向	273
§ 8	密切曲线	275
§ 9	密切圆	276
<b>第三章</b>	<b>曲面</b>	<b>277</b>
§ 1	曲面的方程	277
§ 2	切面和法线	285
§ 3	第一基本齐式	291
§ 4	第二基本齐式. 法曲率	295
§ 5	主方向和主曲率. 曲率线	303
§ 6	欧拉公式	307
§ 7	短程曲率和短程线	311
§ 8	短程挠率	313
	<b>参考文献</b>	<b>316</b>
	<b>索引</b>	<b>317</b>



# 第一章 微分几何补充

本章内容完全属于微分几何学，这些内容在一般微分几何教材中或者没有论述(§1—§3)，或虽有所论述，但其表述形式不便在齿轮啮合理论中运用(§4)。关于本章所使用的符号，请参阅附篇。

法曲率是曲面理论的一个基本概念，它在齿轮啮合理论中有重要意义。法曲率和另一个概念——短程挠率关系密切，在许多地方平行地论述它们是有利的(参看[5])。

## §1 关于法曲率和短程挠率的相互关系

在曲面上一点，对沿任意方向的法曲率  $k_n$  和短程挠率  $\tau_g$ ，我们有欧拉公式(附篇第三章 §6 的(11))和贝特朗公式(附篇第三章 §8 的(5))，即

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi, \quad (1)$$

$$\tau_g = (k_2 - k_1) \sin \varphi \cos \varphi, \quad (2)$$

依次可以写成

$$k_n = H + R \cos 2\varphi, \quad (3)$$

$$\tau_g = -R \sin 2\varphi, \quad (4)$$

其中

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad R = \frac{1}{2}(k_1 - k_2), \quad (5)$$

而  $H$  就是曲面的中曲率。在  $H, R$  和全曲率  $K$  之间有恒等式

$$H^2 - R^2 = K. \quad (6)$$

由(3)和(4)，立刻可以获得法曲率  $k_n$  和短程挠率  $\tau_g$  之间的若干简单关系。应当指出，无论从理论或应用的观点看，法曲率都是主要的考察对象，短程挠率相对地处于从属地位，在齿轮啮合理

论中也只是偶然用到,但由于它们之间存在着这些关系,在一定程度上平行地论述它们,对于法曲率的理解和处理,都是有好处的.现在我们就来列举这些关系.我们专考察在曲面固定点  $P$  各个切线方向的法曲率和短程挠率.

1) 由(3)和(4),我们立刻看出:

$$\tau_g = \frac{1}{2} \frac{dk_n}{d\varphi}. \quad (7)$$

这个关系清楚地表明  $\tau_g = 0$  的方向是  $k_n$  达到极(最)大和极(最)小值的方向,即主方向.为了后面的应用,我们还指出,(7)中的  $\varphi$  本来是从主方向  $g_1$  到任意切矢  $\alpha$  的有向角,但若  $\theta$  为从任意固定切矢  $\alpha_0$  到  $\alpha$  的有向角,则(7)可以用以下较为普遍的关系代替:

$$\tau_g = \frac{1}{2} \frac{dk_n}{d\theta}. \quad (8)$$

这是因为,若  $\varphi_0$  为从  $g_1$  到  $\alpha_0$  的有向角,则

$$\varphi = \varphi_0 + \theta, \quad d\varphi = d\theta.$$

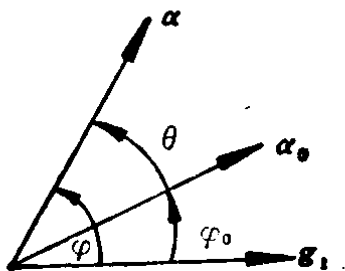


图 1

2) 由(3)和(4)消去  $\varphi$ , 就得

$$(k_n - H)^2 + \tau_g^2 = R^2 \quad (9)$$

或

$$(k_1 - k_n)(k_n - k_2) = \tau_g^2. \quad (10)$$

若把  $k_n$  和  $\tau_g$  看作平面上的直角坐标,则(9)代表一个圆,中心在  $(H, 0)$ , 半径是  $|R|$ , 而(3)和(4)则是它的参数方程.这个圆我们称为曲面在  $P$  点的**法曲率短程挠率圆**,简称**曲挠圆**<sup>1)</sup>.图2表示

1) 参看[5],第33页,在那里,这个圆叫做摩尔圆.

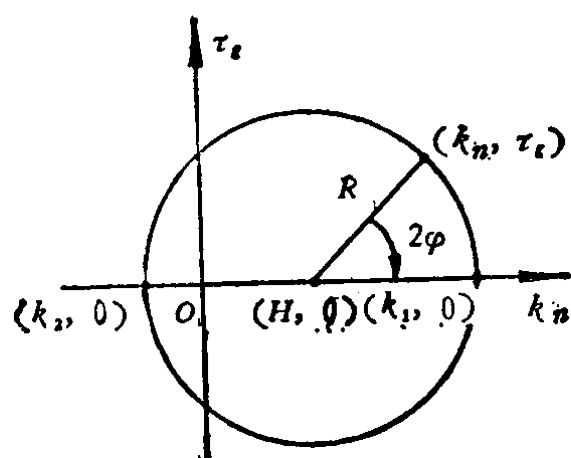


图 2

$k_2 < 0 < H < k_1$  时的曲挠圆。注意图中所标出的有向角  $2\varphi$  的方向。曲挠圆的图或(10)清楚地表明:  $\tau_g = 0$  时,  $k_n = k_1, k_2$ 。当  $P$  为椭圆点时, 曲挠圆和  $\tau_g$  轴没有交点; 当  $P$  为双曲线点时, 它和  $\tau_g$  轴交于两点; 当  $P$  为抛物点时, 它和  $\tau_g$  轴相切。特殊地, 当  $P$  为脐点时, 曲挠圆缩成一点。不妨指出, 引进曲挠圆的概念, 对于考察法曲率和短程挠率的关系也不是必要的, 但它提供几何直观, 并有助于我们分析。

3) 从(3), (4), 我们立刻看到, 若  $k_a, k_b$  为沿两个互相垂直方向的法曲率而  $\tau_a, \tau_b$  为沿这两个方向的短程挠率, 则(参看附篇三章 § 6 的(11a)和 § 8)

$$\frac{1}{2}(k_a + k_b) = H, \quad \tau_a + \tau_b = 0. \quad (11)$$

此外,

$$k_a k_b = K + \tau_a^2 = K + \tau_b^2. \quad (12)$$

特殊地, 在抛物点 ( $K = 0$ ),

$$k_a k_b = \tau_a^2 = \tau_b^2. \quad (13)$$

4) 若在(1)和(2)中, 令  $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ , 就得

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_n}{\tau_g}. \quad (14)$$

这表达了, 在一个非脐点的抛物点, 从渐近方向到任意方向  $\alpha$  的(有向)角  $\varphi$  同沿  $\alpha$  方向的法曲率  $k_n$  与短程挠率  $\tau_g$  的关系。

最后,对于非脐点,由于曲挠圆的圆心是在  $k_n$  轴上,只要给出它上面两个不对称于  $k_n$  轴的点,它就完全确定. 换句话说,已知在一点  $P$ ,沿两个方向的法曲率  $k'_n, k''_n$  和短程挠率  $\tau'_g, \tau''_g$ , 其中  $k'_n \neq k''_n$ , 则  $H$  和  $|R|$ , 因而主曲率

$$k_1, k_2 = H \pm R \quad (15)$$

都可以求得,主方向也可以确定. 具体证明如下: 由于  $k_1 \neq k_2$ ,  $P$  当然不是脐点. 我们先由

$$(k'_n - H)^2 + \tau_g'^2 = R^2,$$

$$(k''_n - H)^2 + \tau_g''^2 = R^2$$

消去  $R$ , 就可以解出

$$H = \frac{1}{2} \left( k'_n + k''_n + \frac{\tau_g'^2 - \tau_g''^2}{k'_n - k''_n} \right), \quad (16)$$

然后就求得

$$R^2 = \frac{1}{4} (k'_n - k''_n)^2 + \frac{1}{2} (\tau_g'^2 + \tau_g''^2) + \frac{1}{4} \left( \frac{\tau_g'^2 - \tau_g''^2}{k'_n - k''_n} \right)^2. \quad (17)$$

于是  $k_1, k_2$  就可以由(15)计算. 再由(3)和(4), 就可以求得两个所给方向和主方向之间的角  $\varphi', \varphi''$  (有两个解, 对应于两个主方向):

$$\begin{cases} \cos 2\varphi' = \frac{k'_n - H}{R}, & \sin 2\varphi' = -\frac{\tau_g'}{R}; \\ \cos 2\varphi'' = \frac{k''_n - H}{R}, & \sin 2\varphi'' = -\frac{\tau_g''}{R}. \end{cases} \quad (18)$$

此外, 还有

$$K = H^2 - R^2 = k'_n k''_n + \frac{k''_n \tau_g'^2 - k'_n \tau_g''^2}{k'_n - k''_n}. \quad (19)$$

由(18)还可以计算所给两方向之间的角  $\varphi'' - \varphi'$ :

$$\operatorname{tg}(\varphi'' - \varphi') = \frac{k''_n - k'_n}{\tau_g'' + \tau_g'}. \quad (20)$$

## § 2\* 欧拉公式和贝特朗公式的一种推广

沿用上节最后部分的记号,设在曲面  $\Sigma$  上一点  $P$ , 已给沿任意两个方向的法曲率  $k'_n, k''_n$  和短程挠率  $\tau'_g, \tau''_g$ . 在上节,我们指出,若  $k'_n \neq k''_n$  (这时  $P$  当然是非脐点),则在  $P$  点,  $\Sigma$  的曲挠圆完全确定,因而中曲率、全曲率和曲挠圆半径也都可以计算,并给出了它们的公式. 现在,我们在同样条件下,推导在  $P$  点  $\Sigma$  沿任意方向的法曲率  $k_n$  和短程挠率  $\tau_g$  的公式.

设  $\alpha', \alpha''$  为所给方向的切矢,对应于法曲率  $k'_n, k''_n$  和短程挠率  $\tau'_g, \tau''_g$ . 用  $\varphi', \varphi''$  表示它们和主方向  $g_1$  所作的有向角,则根据 § 1 的(3)和(4),

$$\begin{cases} k'_n = H + R \cos 2\varphi', & \tau'_g = -R \sin 2\varphi'; \\ k''_n = H + R \cos 2\varphi'', & \tau''_g = -R \sin 2\varphi''. \end{cases}$$

故

$$\begin{cases} k'_n - k''_n = -2R \sin(\varphi' + \varphi'') \sin(\varphi' - \varphi''), \\ \tau'_g + \tau''_g = -2R \sin(\varphi' + \varphi'') \cos(\varphi' - \varphi''), \end{cases}$$

因而

$$(k'_n - k''_n) \cos(\varphi' - \varphi'') = (\tau'_g + \tau''_g) \sin(\varphi' - \varphi''). \quad (1)$$

现设  $\alpha$  为  $\Sigma$  在  $P$  点又一任意切矢,  $\varphi, k_n, \tau_g$  的意义如前,则根据(1),

$$\begin{cases} (k_n - k'_n) \cos(\varphi - \varphi') = (\tau_g + \tau'_g) \sin(\varphi - \varphi'), \\ (k_n - k''_n) \cos(\varphi - \varphi'') = (\tau_g + \tau''_g) \sin(\varphi - \varphi''). \end{cases} \quad (2)$$

再令

$$\psi = \varphi - \varphi', \quad \theta = \varphi'' - \varphi', \quad (3)$$

则  $\psi, \theta$  依次为由  $\alpha'$  到  $\alpha$  和  $\alpha''$  的有向角,而且

$$\varphi - \varphi'' = \psi - \theta.$$

于是(2)可以写成

$$\begin{cases} (k_n - k'_n) \cos \psi = (\tau_g + \tau'_g) \sin \psi, \\ (k_n - k''_n) \cos(\psi - \theta) = (\tau_g + \tau''_g) \sin(\psi - \theta), \end{cases} \quad (4)$$

而(1)则可以写成

$$(k_n'' - k_n') \cos \theta = (\tau_g'' + \tau_g') \sin \theta, \quad (5)$$

现在假定  $P$  是非脐点, 而且  $k_n' \neq k_n''$ , 则由(5)可得

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{\tau_g'' + \tau_g'}{k_n'' - k_n'}, \quad (6)$$

这就是 §1, (20). 把(4)写成含  $k_n, \tau_g$  的线性方程组

$$\begin{cases} k_n \cos \psi - \tau_g \sin \psi = k_n' \cos \psi + \tau_g' \sin \psi, \\ k_n \cos(\psi - \theta) - \tau_g \sin(\psi - \theta) = k_n'' \cos(\psi - \theta) + \tau_g'' \sin(\psi - \theta), \end{cases}$$

解出  $k_n, \tau_g$ , 利用(6)并化简, 就得我们所求的公式:

$$\begin{cases} k_n = \frac{1}{2} \left( k_n' + k_n'' + \frac{\tau_g'^2 - \tau_g''^2}{k_n' - k_n''} \right) + \frac{1}{2} \left( k_n' - k_n'' - \frac{\tau_g'^2 - \tau_g''^2}{k_n' - k_n''} \right) \\ \quad \times \cos 2\psi + \tau_g' \sin 2\psi, \\ \tau_g = \frac{1}{2} \left( k_n'' - k_n' + \frac{\tau_g'^2 - \tau_g''^2}{k_n' - k_n''} \right) \sin 2\psi + \tau_g' \cos 2\psi. \end{cases} \quad (7)$$

注意由此中第一式, 利用 §1(7), 可以得到第二式. 这两个公式可以看作欧拉公式和贝特朗公式的推广.

为了求曲面  $\Sigma$  在  $P$  点的主方向, 令  $\tau_g = 0$ , 由(7)中第二式即得对应于主方向的两个解  $\psi_1, \psi_2$ :

$$\operatorname{ctg} 2\psi_i = \frac{1}{2\tau_g'} \left( k_n' - k_n'' - \frac{\tau_g'^2 - \tau_g''^2}{k_n' - k_n''} \right) \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

由余切性质可知

$$\sin 2\psi_1 + \sin 2\psi_2 = 0, \quad \cos 2\psi_1 + \cos 2\psi_2 = 0, \quad (9)$$

这无非表明两个主方向垂直.

把由(8)求得的解  $\psi_i$  代入(7)中第一式, 就得  $\Sigma$  在  $P$  点的主曲率  $k_1, k_2$ :

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{1}{2} \left( k_n' + k_n'' + \frac{\tau_g'^2 - \tau_g''^2}{k_n' - k_n''} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( k_n' - k_n'' - \frac{\tau_g'^2 - \tau_g''^2}{k_n' - k_n''} \right) \cos 2\psi_i + \tau_g' \sin 2\psi_i \\ &\quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (10)$$

利用(8),把(10)中  $\cos 2\phi_i$  的系数写成  $\tau'_g \operatorname{ctg} 2\phi_i$ , 然后化简, 就得

$$k_i = \frac{1}{2} \left( k'_n + k''_n + \frac{\tau'_g - \tau''_g}{k'_n - k''_n} \right) + \tau'_g \operatorname{csc} 2\phi_i \quad (i = 1, 2). \quad (11)$$

把(8)中所得的  $\phi_i$  值代入, 就可以计算主曲率  $k_i$  (可以和 § 1 关系(15)比较).

由(10)和(11)容易推得上节已经得到的关于中曲率  $H$ , 全曲率  $K$  以及曲挠圆半径  $R$  的公式.

### § 3 相对法曲率和相对短程挠率

设曲面  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  在一点  $P$  相切, 并且有相同的么法矢  $\mathbf{n}$ . 设  $k_n^{(1)}, k_n^{(2)}; \tau_g^{(1)}, \tau_g^{(2)}$  是  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  在  $P$  点沿任意公切矢  $\alpha$  的法曲率和短程挠率, 则

$$k_n^{(12)} = k_n^{(1)} - k_n^{(2)}, \quad \tau_g^{(12)} = \tau_g^{(1)} - \tau_g^{(2)} \quad (1)$$

依次称为  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  沿  $\alpha$  的**相对法曲率**和**相对短程挠率**. 显然, 若  $\Sigma^{(2)}$  是平面, 或者  $P$  是  $\Sigma^{(2)}$  的平点,  $k_n^{(12)} = k_n^{(1)}, \tau_g^{(12)} = \tau_g^{(1)}$ . 因此,  $k_n^{(1)}, \tau_g^{(1)}$  是  $\Sigma^{(1)}$  相对于它的切平面的法曲率和短程挠率.

设  $\alpha_0$  为  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  在  $P$  点的任意固定的公切矢, 而  $\theta$  为从  $\alpha_0$  到  $\alpha$  的有向角, 则根据 § 1 关系(8),

$$\tau_g^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{dk_n^{(1)}}{d\theta}, \quad \tau_g^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{dk_n^{(2)}}{d\theta},$$

因此, 根据定义(1),

$$\tau_g^{(12)} = \frac{1}{2} \frac{dk_n^{(12)}}{d\theta}. \quad (2)$$

现设  $\mathbf{g}_1^{(1)}, \mathbf{g}_2^{(1)}$  为  $\Sigma^{(1)}$  在  $P$  点的主方向, 对应于主曲率  $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}$ ;  $\mathbf{g}_1^{(2)}, \mathbf{g}_2^{(2)}$  为  $\Sigma^{(2)}$  在  $P$  点的主方向, 对应于主曲率  $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ . 再设  $\varphi_1$  为从  $\mathbf{g}_1^{(1)}$  到  $\mathbf{g}_1^{(2)}$  的有向角,  $\varphi$  为从  $\mathbf{g}_1^{(1)}$  到  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  的任意公切矢  $\alpha$  的有向角, 则  $\varphi - \varphi_1$  为从  $\mathbf{g}_1^{(2)}$  到  $\alpha$  的有向角. 于是根据 § 1 (3) 和(4)

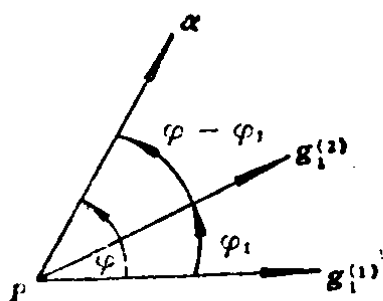


图 1

$$\begin{cases} k_n^{(1)} = H^{(1)} + R^{(1)} \cos 2\varphi, & \tau_g^{(1)} = -R^{(1)} \sin 2\varphi; \\ k_n^{(2)} = H^{(2)} + R^{(2)} \cos 2(\varphi - \varphi_1), & \tau_g^{(2)} = -R^{(2)} \sin 2(\varphi - \varphi_1), \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= \frac{1}{2} (k_1^{(1)} + k_2^{(1)}), & R^{(1)} &= \frac{1}{2} (k_1^{(1)} - k_2^{(1)}); \\ H^{(2)} &= \frac{1}{2} (k_1^{(2)} + k_2^{(2)}), & R^{(2)} &= \frac{1}{2} (k_1^{(2)} - k_2^{(2)}). \end{aligned} \quad (4)$$

于是根据定义(1),

$$\begin{cases} k_n^{(12)} = H^{(12)} + R^{(1)} \cos 2\varphi - R^{(2)} \cos 2(\varphi - \varphi_1), \\ \tau_g^{(12)} = -R^{(1)} \sin 2\varphi + R^{(2)} \sin 2(\varphi - \varphi_1), \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$H^{(12)} = H^{(1)} - H^{(2)} \quad (6)$$

叫做  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  在  $P$  点的**相对中曲率**; 根据 § 1, (11), 它显然等于任意两个互相垂直方向的相对曲率的平均值.

由(5), 可以立即验证(2)(此时  $\theta = \varphi$ ):

$$\tau_g^{(12)} = \frac{1}{2} \frac{dk_n^{(12)}}{d\varphi}. \quad (7)$$

其次, 可以验证

$$(k_n^{(12)} - H^{(12)})^2 + \tau_g^{(12)2} = R^{(12)2}, \quad (8)$$

其中

$$R^{(12)2} = R^{(1)2} + R^{(2)2} - 2R^{(1)}R^{(2)} \cos 2\varphi_1. \quad (9)$$

这个关系虽然很象三角形的余弦定律, 但本质上却不相同, 因为



$R^{(1)}, R^{(2)}$  都是可正可负的. 现在需要判明的是, 能否假定它右边  $\geq 0$ . 显然, 右边可以写成  $(R^{(1)} - R^{(2)})^2 + 2R^{(1)}R^{(2)}(1 - \cos 2\varphi_1)^{1)}$ , 其中

$$R^{(1)}R^{(2)} = \frac{1}{4} (k_1^{(1)} - k_2^{(1)})(k_1^{(2)} - k_2^{(2)}).$$

因此, 在已经随意选定  $\Sigma^{(1)}$  的一个主方向为  $g_1^{(1)}$  (这有两种选择) 之后, 我们总可以选定  $g_1^{(2)}, g_2^{(2)}$  的次序 (这意味着同时选定  $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$  的次序) 使  $R^{(1)}R^{(2)} \geq 0$ . 这样, (9) 右边就  $\geq 0$ , 而 (8) 就没有矛盾. 这时候, 若把  $k_n^{(12)}, \tau_g^{(12)}$  看成平面的直角坐标, (8) 就代表一个圆, 称为相切曲面  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  在切点  $P$  的**相对曲挠圆**<sup>2)</sup>. 特殊地, 若  $R^{(12)} = 0$ , 相对曲挠圆缩成一点, 但这时根据 (8), 沿一切方向, 相对法曲率  $k_n^{(12)}$  有固定值  $H^{(12)}$ , 而且  $\tau_g^{(12)} = 0$ . 这样的点  $P$  叫做  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  的**脐切点**, 在脐切点,  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}$  沿一切方向的相对法曲率相同.

在  $P$  点, 相对法曲率的最大和最小值  $k_1^{(12)}, k_2^{(12)}$  称为在  $P$  点的**相对主曲率**, 它们相对应的方向称为**相对主方向**. 为了求相对主曲率和相对主方向, 根据 (7) 或 (8), 我们只要令  $\tau_g^{(12)} = 0$ , 于是由 (8), 首先得相对主曲率

$$k_1^{(12)}, k_2^{(12)} = H^{(12)} \pm R^{(12)}. \quad (10)$$

若  $P$  是脐切点,  $R^{(12)} = 0, k_1^{(12)} = k_2^{(12)}$ , 一切方向都是相对主方向. 若  $P$  不是脐切点,  $R^{(12)} \neq 0, k_1^{(12)} \neq k_2^{(12)}$ , 这时有两个相对主方向. 在 (5) 里, 令  $\tau_g^{(12)} = 0$ , 就得到确定相对主方向的方程

$$-R^{(1)} \sin 2\varphi + R^{(2)} \sin 2(\varphi - \varphi_1) = 0. \quad (11)$$

不难求得这个方程的解:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{R^{(2)} \sin 2\varphi_1}{R^{(1)} - R^{(2)} \cos 2\varphi_1}. \quad (12)$$

1) 由此可见,  $|R^{(12)}| \neq |R^{(1)} - R^{(2)}|$ , 它们相等的充要条件是  $R^{(1)} = 0$  ( $P$  是  $\Sigma^{(1)}$  的脐点) 或  $R^{(2)} = 0$  ( $P$  是  $\Sigma^{(2)}$  的脐点) 或  $\varphi_1 = \pm \frac{\pi}{4}$ .

2) 参看 [5], 第 35 页.