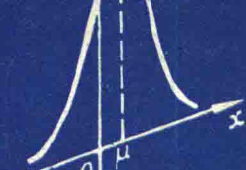
职工高等工业专科学校教材




# 概率论

★ 刘谓夫等编

高等教育出版社

工高等工业专科学校教材

# 概　率　论

刘谔夫　等编

高等教育出版社

# 内容提要

本书是根据原教育部1983年制订的职工高等工业专科学校的工程数学教学大纲（草案）中概率论部分编写的，内容分随机事件与概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理等五章，以及集合知识简介、排列与组合等附录，可供职工大学作为概率论课程的教材使用，也可供成人自学概率论内容时使用.

职工高等工业专科学校教材

**概率论**

刘谔夫　等编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 6.375　字数 158 000

1987年9月第1版　1987年9月第1次印刷

印数　00 001—[illegible]9 100

ISBN 7-04-000115-2/O·48

书号 13010·01477　定价 1.30 元

# 前　言

本书系根据原教育部1983年11月审订的职工高等工业专科学校各专业适用的《工程数学教学大纲(草案)》中对“概率论”的要求作为该课程的教学用书而编写的．其中带*号者属于加宽加深的内容，有的是为了某些专业的需要，有的是为了加强对基本概念的理解而编入的．对于这些带*号的内容，任课教师可根据需要与可能决定取舍．

考虑到本书的读者系来自现职职工中的成年人，他们的中学数学基础比不上高中毕业后即进入高等学校的学生，但有一定的实践经验与独立工作能力．同时又考虑到概率论中研究随机现象的方法，对于初学者来说是比较陌生的，往往感到难以掌握．故对基本概念的引进，一般都从具体问题着手，逐步深入．充分说明其客观背景和实际含义；对一些主要定理和公式，则列举足够的例题说明其应用，启发读者的解题思路．在文字叙述上，采用讲解式，力求层次分明，通俗易懂，便于自学．

习题按章分节安排，以便读者能及时地去思考有关问题，巩固所学的知识．全书习题均统一编号，以便查找．书末附有习题答案或提示．

徐希贤同志参加了编写工作，陈彦辉同志参加了习题的编选工作，并逐一演算，编制了答案或提示．

本书的主审人是哈尔滨工业大学曹彬教授和有色金属管理干部学院杨绍家同志．参加审稿的还有黑龙江省农业银行干部学校徐文培副教授、北京机械工业管理学院杨裕生、上海毛麻公司职工大学讲师宋一平等同志．审稿人和哈尔滨工业大学王泽汉教授、

水电部丹江口培训中心孟宪钢副教授、葛州坝水电工程学院沈意诚讲师以及二汽职工大学数学教研室的同志，对书稿均提出了宝贵的意见．二汽职工大学讲师杨洁仪同志还用书稿进行了试教．对上述诸同志的帮助与支持，致以由衷的谢意．

限于编者的水平，错误与不妥之处在所难免，希广大读者批评指正．

**编　者**

**1986年3月于第二汽车制造厂职工大学**

# 目　录

# 第一章　随机事件与概率

## §1.1　样本空间与随机事件

### 1.1.1　引言

在日常发生的各种自然现象与社会现象中，有一类现象，它的发生与否具有确定的规律性．即在一定的条件下它必然发生或不可能发生．例如纯水在标准大气压下加温到 100°C 时，必然沸腾．又如作等速直线运动的物体，若无外力作用，必然继续作等速直线运动．再如掷一粒骰子得 8 点显然是不可能发生的．我们把这类现象称为**确定性现象**．这种在一定条件下必然发生或不可能发生的事情，分别称为**必然事件**和**不可能事件**．然而，还有另一类现象，在一定条件下，它可能发生也可能不发生．例如向桌面上投掷一枚硬币，可能是正面（比如把有币值的一面算作正面）向上，也可能是反面向上．从一批产品中随意抽取一件产品，可能是合格品也可能是不合格品．在机床上加工一个零件，其尺寸可能比规定的尺寸偏大或偏小．用同一仪器在同样条件下对一个未知量进行多次测量，所得的结果总有些差异．上面所列举的这些现象，一方面呈现不确定性，即在同样条件下，对同一现象进行多次观察或实验，所得的结果可能是这样也可能是那样．另一方面，人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象又具有某种规律性．例如把一枚均质的硬币投掷许多次，就会发现出现正面的次数与出现反面的次数大约各占一半．再如机床加工出来的零件的尺寸与图纸规定的尺寸虽然有些偏差，但对该机床加工出来的同一型号的全部

零件而言，偏大或偏小的零件数大致相等，而且偏差的绝对值越小的零件数越多，偏差的绝对值越大的零件数越少．这也是一种规律性，不过是另一类型的规律性，我们把它称为**统计规律性**．这种在个别实验或观察中呈现偶然性，而在大量重复实验或观察中又具有统计规律性的现象，叫作**随机现象**．对于随机现象，我们关心的是在一定条件下某些可能发生也可能不发生的结果．这样的结果称为**随机事件**．例如，“把一枚硬币投掷两次均出现正面”，“从一批产品中随意抽取两件均为合格品”，“某人射击一次命中目标”等都是可能发生也可能不发生的结果，它们都是随机事件，简称**事件**．我们常用大写字母 $A$、$B$、$C$ 等表示事件．

概率论就是研究随机现象的统计规律性的科学，它的理论和方法在自然科学、工程技术和管理科学等许多领域中得到广泛的应用．例如近代物理学对微观世界的研究，无线电通讯和导航，生产过程的控制，气象、水文和地震的预报，工业企业与公用事业的计划与管理，以及化学、生物学、医学的研究等，都广泛地运用着概率的理论和方法．总之，概率的理论和方法已经广泛地渗透到各个基础科学和应用科学的领域．

### 1.1.2 随机试验与样本空间

为研究随机现象作准备，现引进随机试验与样本空间概念．

“试验”一词在概率论中具有较广泛的含义．各种科学实验、技术测量以及对事物的观察等均称为试验．例如：

$E_1$：投掷一枚硬币，观察其出现正面或反面的情况；

$E_2$：记录电话交换台在某一段时间内接到呼叫的次数；

$E_3$：从一批产品中随意抽取 10 件产品，记录其中次品的件数；

$E_4$：掷两粒有区别的骰子，观察其出现的结果；

$E_5$: 对准目标进行射击，记录落弹点偏离目标中心的距离.

所有这些都是试验，它们均有以下的特性：

1. 可以在同样条件下重复进行；

2. 每次试验可能出现各种不同的结果，所有可能出现的结果是可以想象得到的；

3. 每次试验必有且仅有其中一种结果出现，但在试验之前无法预知哪种结果出现.

例如 $E_1$ 所表示的试验显然是可以重复进行的，每次投掷的结果，向上的一面可能是正面也可能是反面，只有这两种情况，且每次试验必有且仅有其中一种情况出现，但在投掷之前无法预知是正面出现还是反面出现.

我们把具有上述特性的试验称为**随机试验**. 简称为**试验**，记作 $E$. 随机试验的所有可能结果构成的集合叫作**样本空间**，记作 $\Omega$. 试验的每一个可能出现的结果叫作**样本点**，记作 $\omega$. 于是，有 $\Omega=\{\omega\}$.

**例 1** 试验 $E_1$: "掷一枚硬币观察其正面或反面向上的情况"，有两种可能的结果："正面向上"与"反面向上"，它们构成的样本空间 $\Omega=\{$正面向上，反面向上$\}$. 如用 $\omega_1$ 表示"正面向上"，$\omega^2$ 表示"反面向上"，则可写 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$.

**例 2** 试验 $E_2$: "记录某电话交换台在某一段时间内接到呼叫的次数"，则所有可能的结果是 $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$. 于是 $E_2$ 的样本空间为

$$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}.$$

**例 3** 试验 $E_4$: "掷两粒有区别的骰子，观察其可能出现的结果". 试构造其样本空间.

［解］ 用 $(i, j)$ 表示第一粒骰子掷得 $i$ 点，第二粒骰子掷得 $j$ 点这样的结果，则 $E_4$ 的样本空间为

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6).\end{Bmatrix}$$

简记为

$$\Omega=\{(i,j)\mid i,j=1,2,3,4,5,6\}.$$

**例 4** 试验 $E_5$:“对准目标进行射击，记录落弹点偏离目标中心的距离(米)”.因落弹点偏离目标中心的距离可以是任意非负实数 $r$，这时，全部样本点不能一一列举出来，就写成

$$\Omega=\{r\mid r\geqslant 0\}.$$

**例 5** 设试验 $E$ 是向 $xOy$ 平面上以 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$，$C(0,1)$ 为顶点的正方形区域上投点，则其样本空间可表为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

其中 $(x,y)$ 表示落点的坐标.

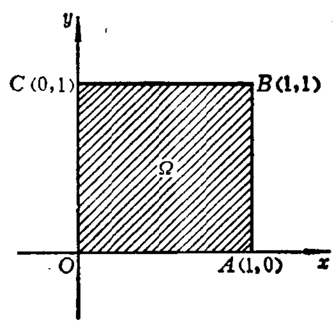


图 1.1

样本空间是概率论的一个基本概念，样本空间的结构随着试验的要求而有所不同. 例如进行射击(试验)时，若射击的要求仅考虑“中靶”(记作 $\omega_1$)或“不中靶”(记作 $\omega_2$)，则样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，其中只包含两个样本点. 若射击的目标是环靶，要求用命中的环数记录射击的结果，则 $\Omega=\{0,1,2,\cdots,10\}$，其中 0 表示未中靶. 这时，$\Omega$ 中有 11 个样本点. 若射击时要求记录落弹点至目标中心的距离，则样本空间是 $\Omega=\{r\mid r\geqslant 0\}$，其中包含无穷多个

样本点．样本空间中的样本点可以是有限个(如例 1 和例 3)，也可以是无穷可列个(如例 2)；也可以是无穷不可列个(如例 4 和例 5)．样本点为有限个或无穷可列个的样本空间叫作**离散样本空间**；样本点为无穷而又不可列的样本空间叫作**无穷不可列样本空间**.

### 1.1.3 事件的集合表示

在引言中，已对随机事件作了直观的描述．但是，用文字描述显得罗苏，而且有时欠确切，容易产生误解．在引入了样本空间之后，便可把事件用样本空间的子集具体表示出来．当试验的结果为 $\omega$ 时，若 $\omega$ 属于 $A$，则称 $A$ 发生．现举例说明如下．

**例 6** 在例 3 中曾将试验 $E_4$ (掷两粒有区别的骰子观察其可能出现的结果)的样本空间记为

$$\Omega=\{(i,j)\mid i,j=1,2,3,4,5,6\}.$$

设 $A$ 表示"掷两粒骰子共计得 5 点"这样的事件，则 $A$ 就是 $\Omega$ 的下述子集:

$$\begin{aligned}A&=\{(i,j)\mid i+j=5,\ i,j=1,2,3,4,5,6\}\\&=\{(2,3),(3,2),(4,1),(1,4)\}.\end{aligned}$$

显然，只要试验的结果是 $A$ 中的任何一个样本点，就是"掷两粒骰子共计得 5 点"这一事件发生.

若 $B$ 表示"掷两粒骰子共计不超过 5 点"，则 $B$ 就是 $\Omega$ 的子集:

$$\begin{aligned}B&=\{(i,j)\mid i+j\leqslant 5,\ i,j=1,2,3,4,5,6\}\\&=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,2),(1,4),(4,1),\\&\qquad(2,3),(3,2)\}.\end{aligned}$$

只要试验的结果是其中任意一个样本点，就是"掷两粒骰子共计不超过 5 点"，即 $B$ 发生.

**例 7** 掷两枚可区别的硬币所有可能发生的结果可表示为

$\omega_1=$(正，正)，$\omega_2=$(反，反)，$\omega_3=$(正，反)，$\omega_4=$(反，正)。
故样本空间是

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}.$$

设$A$表示事件："两枚硬币同时出现正面或同时出现反面"；$B$表示事件："恰有一个正面一个反面"；$C$表示"两个都是反面"．则$A$、$B$、$C$是$\Omega$的下列子集：

$$A=\{\omega_1,\omega_2\},\ B=\{\omega_3,\omega_4\},\ C=\{\omega_2\}.$$

**例8** 在例4中如用$A$表示"落弹点偏离目标中心不超过10米"这样的事件，则$A$就是

$$A=\{r\,|\,0\leqslant r\leqslant 10\}.$$

同样，集合

$$B=\{r\,|\,5\leqslant r\leqslant 10\}$$

表示事件："落弹点偏离目标中心的距离在5米至10米之间"．

样本空间$\Omega$本身表示必然事件，因为对于每次试验必有$\Omega$的某一个样本点(结果)发生，所以在试验中$\Omega$必然发生．此外，我们约定用空集$\varnothing$(不含任何样本点的集)表示不可能事件．我们把只包含一个样本点的集合叫作**基本事件**．于是，样本点与基本事件是一一对应的．若约定空集$\varnothing$是任意集合的子集，则每一个随机事件均可用$\Omega$的一个子集(包括$\Omega$本身与空集$\varnothing$)表示。

### 1.1.4 事件间的关系与运算

现在，我们根据事件的集合表示，比照集合之间的关系与运算来建立事件之间的关系与运算，不过在概率论中事件之间的关系与运算，一般不采用集合论的通用术语而采用概率论的专门术语来叙述．

1．**包含关系** 若在一次试验中，事件$A$发生一定导致事件$B$发生，即$A$中的样本点均为$B$中的样本点．这时，我们称**事件$B$包**

含事件 $A$，或称事件 $A$ 含于事件 $B$，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. 如在例6中，

$$A=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\},$$

$$B=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,2),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\},$$

显然事件 $A$ 发生(掷两粒骰子共计得5点)必导致事件 $B$ 发生（掷两粒骰子共计不超过5点)，故有 $A\subset B$.

2. **相等关系** 若 $A\subset B$ 和 $A\supset B$ 同时成立，或者说 $A$ 和 $B$ 中的样本点完全相同，则称 $A=B$. 例如

$$A=\{x \mid x \text{ 是不大于 10 的正偶数}\},$$

$$B=\{x \mid x=y+z, y=1,3,5, z=1,3,5\}$$

是相等的.

3. **事件的和(并)** "事件 $A$ 和事件 $B$ 中至少有一发生"这样的事件，记作 $A\cup B$，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**和(并)**. 即 $A\cup B$ 表示由属于 $A$ 但不属于 $B$，或者属于 $B$ 但不属于 $A$，或者既属于 $A$ 又属于 $B$ 的样本点所构成的集.

类似地，"事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 中至少有一发生"这样的事件，记作

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n,$$

称为事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 的和(并).

4. **事件的积(交)** "事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生"这样的事件，记作 $A\cap B$，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**积(交)**. 即 $A\cap B$ 表示由既属于 $A$ 又属于 $B$ 的样本点构成的集. 为简便起见，我们常把 $A\cap B$ 直接写成 $AB$.

类似地，"事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 同时发生"这样的事件，记作

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_n,$$

称为 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 的积(交).

**例 9** 设甲、乙两名射手进行射击，观察其命中的情况，则

$\Omega=\{$(甲命中,乙命中),(甲命中,乙不中),(甲不中,乙命中),(甲不中,乙不中)$\}$.

令

$A=\{$(甲命中,乙命中),(甲命中,乙不中)$\}$,

$B=\{$(甲命中,乙命中),(甲不中,乙命中)$\}$,

则

$A\cup B=\{$(甲命中,乙命中),(甲命中,乙不中),(甲不中,乙命中)$\}$,

$A\cap B=\{$(甲命中,乙命中)$\}$.

有时还需要把和与积两种运算推广到无穷可列个事件的情形. 设 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 为无穷可列个事件，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$

表示"$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生"这样的事件. 又

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$$

表示"$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生"这样的事件.

例如某人进行一项科学实验，直到实验成功为止. 若 $A_n$ 表示第 $n$ 次实验成功，$B_n$ 表示第 $n$ 次实验失败，$A$ 表示实验成功，$B$ 表示实验失败，则

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

5. **事件的差** “事件$A$发生且事件$B$不发生”的事件，记作$A-B$，称为$A$减$B$的差．它是由属于$A$不属于$B$的样本点构成的集．如在例 9 中，有

$$A-B=\{(\text{甲命中},\text{乙不中})\}.$$

6. **不相容事件** 若事件$A$与事件$B$不能同时发生，即$A\cap B=\varnothing$，或直接写成$AB=\varnothing$，则称$A$与$B$**互不相容**．例如基本事件中任何两个事件均互不相容．

若$AB=\varnothing$，则常将$A\cup B$直接写成$A+B$.

7. **对立事件** 用$\bar{A}$表示$A$不发生，即$\bar{A}=\Omega-A$，它称为$A$的**对立事件**，或称为$A$的**逆事件**．它是由$\Omega$中不属于$A$的样本点组成的集。如在例 6 中，

$$\Omega=\{(i,j)\mid i,j=1,2,3,4,5,6\},$$
$$B=\{(i,j)\mid i+j\leqslant 5,\ i,j=1,2,3,4,5,6\}.$$

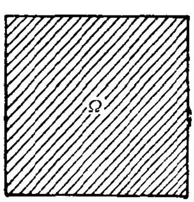
则

$$\bar{B}=\{(i,j)\mid i+j>5,\ i,j=1,2,3,4,5,6\},$$

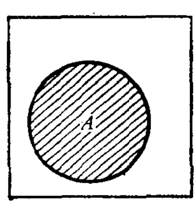
表示“掷两粒骰子共计超过 5 点”。

显然，事件$A$和它的对立事件$\bar{A}$互不相容．

我们常用平面上一个正方形表示样本空间，用正方形内划有斜线的区域表示事件以及事件间的关系和运算．这种表示法称为凡恩(Venn) 图．现将上面所定义的事件间的关系和运算用凡恩图表示如下：




(a) $\Omega$




(b) $A$