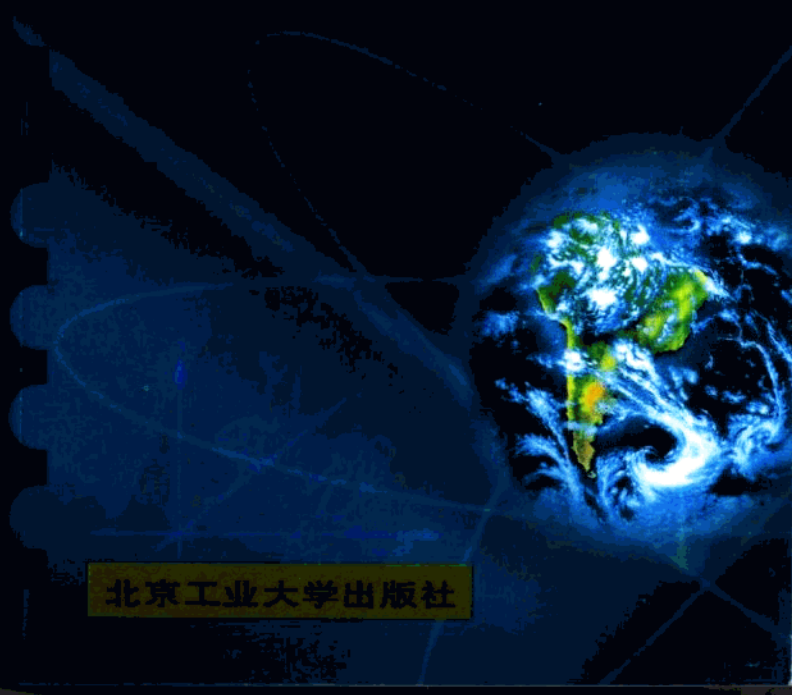


中学生 数学手册

MATHEMATICS

The background of the cover is a dark, textured blue. On the right side, there is a detailed image of the Earth, showing continents and clouds. Overlaid on the entire background are several thin, light-colored lines that represent mathematical concepts like orbits or geometric paths. In the lower-left quadrant, there is a faint, stylized illustration of a compass and a ruler, suggesting the practical application of mathematics.

北京工业大学出版社

内 容 提 要

本书是中学数学内容的归纳、总结和浓缩,编写的目的是帮助中学生掌握好数学的基础知识和基本的解题方法。本书图文并茂、条理清晰、理论严谨、言简意赅,对重点内容有分析、有补充,对有些内容阐述方法有新意。本书的编排顺序与课本同步,适合所有的中学生阅读和使用。

绪 言

数学是一门工具性学科，它的足迹几乎遍及一切领域。没有数学的发展，就不会有今天的人类文明。

数学是中学教学的重要课程。如何学好数学，无数前人的经验说明：首先要掌握好基础知识，其中包括数学的概念、公理、定理、公式、法则，以及各种解题方法；其次要通过足够数量和质量的习题进行练习，培养和提高运用数学知识的能力。由于后者又要在前者的基础上进行，因此掌握好基础知识就成了学好数学的关键。

我国著名的已故数学家华罗庚教授有过一句名言：“读书要由厚到薄，再由薄到厚。”意思是说学习任何课程，要先把它的内容进行浓缩，抓住其中最核心、最本质的东西，而后在此基础上再去充实、去繁衍、去派生。本书就是把中学数学极其丰富的内容进行了浓缩，帮助中学生掌握好它的基础知识，使之在头脑中形成一个清晰、完整的知识框架。

本书的编写是以修订后的《数学教学大纲》和现行的课本为依据；为了便于不同年级学生都能阅读和使

用编排顺序与课本同步；编排的方法力求做到知识自身系统与逻辑结构的统一；重点内容都做了必要的补充和较详尽的剖析；对各种解题方法进行了归纳和总结；语言的表述力求做到通俗、简洁、准确和规范；书的最后附有常用的数表、字母表和各种数学符号的说明，便于使用和查寻。

本书对中专生、有志自学的青年，以及中学数学教师都有参考价值。

总之，衷心地希望这本书能为提高中学数学的教学质量做出一些有益的贡献。

编 者

目 录

第一部分 初中代数

第一章	实数	(1)
第二章	代数式	(6)
第三章	方程和方程组	(22)
第四章	指数	(33)
第五章	函数及其图象	(35)
第六章	不等式	(44)
第七章	解三角形	(48)
* 第八章	统计初步	(58)

第二部分 平面几何

第一章	直线、相交直线和平行直线	(61)
第二章	三角形	(70)
第三章	四边形	(77)

* 注：带星号的为选学内容。

第四章	比例线段和相似形	(86)
第五章	圆和正多边形	(94)
* 第六章	视图	(108)

第三部分 高中代数

第一章	集合	(114)
第二章	映射与函数	(121)
第三章	幂函数、指数函数和对数 函数	(132)
第四章	任意角的三角函数	(140)
第五章	三角函数的图象和性质	(150)
第六章	两角和与差的三角函数	(158)
第七章	反三角函数和简单三角方程	(162)
第八章	不等式	(168)
第九章	数列、极限、数学归纳法	(176)
* 第十章	行列式和线性方程组	(199)
第十一章	复数	(207)
第十二章	排列组合、二项式定理	(222)
* 第十三章	概率	(230)

第四部分 立体几何

第一章	直线和平面	(233)
第二章	多面体和旋转体	(247)

第五部分 解析几何

第一章	基本概念和公式	(263)
第二章	直线	(269)
第三章	圆锥曲线	(279)
第四章	坐标变换	(296)
第五章	参数方程、极坐标	(304)

第六部分 解题方法

第一章	解一般题的常用方法	(328)
第二章	解选择题的常用方法	(340)

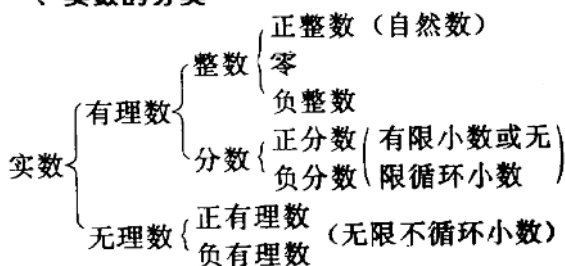
附 录

一、常用的数学符号	(344)
二、希腊字母表	(347)
三、常用数	(348)
四、100 以内的质数	(348)
五、1~10 的阶乘	(348)
六、常用计量单位和换算	(349)
七、常用数学用表	(351)

第一部分 初中代数

第一章 实数

一、实数的分类



二、数轴

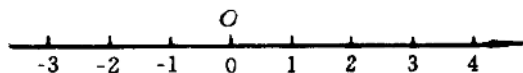


图 1-1

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。

零用原点表示，正数 a 用原点右边 a 个单位的点表示，负数 $-a$ 用原点左边 a 个单位的点表示。

数轴上的点和实数一一对应。因此数轴上的点可以用实数表示；实数也可以用数轴上的点表示。数轴上越靠近右边的点所表示的实数越大。数轴上每个点所对应的实数叫做这点的坐标。

三、相反数和倒数

只有符号不同的两个数叫互为相反数。零的相反数是其本身。如 $+2$ 和 -2 是互为相反数， -2 是 $+2$ 的相反数， $+2$ 也是 -2 的相反数。

1 除以一个数的商叫做这个数的倒数。零没有倒数。例如若 $a \neq 0$ ， $\frac{1}{a}$ 是 a 的倒数。倒数关系也是互逆的，即 a 也是 $\frac{1}{a}$ 的倒数。

四、数的绝对值

正数和零的绝对值是它们本身，负数的绝对值是它的相反数。数 a 的绝对值通常用 $|a|$ 表示，即

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

一个数的绝对值也是数轴上表示这数的点到原点的距离。

五、实数的运算法则

(1) 加法：同号两数相加，取原来的符号，并把绝

对值相加；异号两数相加，取绝对值较大加数的符号，并用较大的绝对值减较小的绝对值；两个相反数相加得零；一个数和零相加仍得这个数。

(2) 减法：减法是加法的逆运算，减去一个数等于加上这数的相反数。

若干个连续相加或相减，可根据减法运算法则把其中减法转化为加法，这样所得的式子叫做这些加数的代数和。若干个数的代数和其中的加号“+”可以省略，如 $(-20) + (+5) + (-3) + (+7)$ 可以写成 $-20 + 5 - 3 + 7$ ，剩下的符号都是各加数的性质符号。

(3) 乘法：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘；任何数和零相乘都得零。

若干个不为零的数相乘，绝对值相乘，负因数的个数是奇数时取负号，负因数的个数是偶数时取正号；若干个连续相乘，如果其中有一个因数为零，则积为零。

(4) 除法：除法是乘法的逆运算，除以一个数等于乘以这数的倒数。也就是，两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除；零除以任何不为零的数都得零；零不能做除数。

(5) 乘方： n 个相同因数的积 $a \cdot a \cdot a \cdots a$ 记做 a^n ，
即

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个}}$$

求相同因数积的运算,叫做乘方。乘方的结果叫做幂。在 a^n 中, a 叫底数, n 叫指数, a^n 表示乘方运算时,读做 a 的 n 次方;表示运算结果时,读做 a 的 n 次幂。

正数的任何次幂都是正数;负数的奇次幂是负数,负数的偶次幂是正数;零的任何次幂都是零。

一个数的二次幂和三次幂也叫做这个数的平方数和立方数。平方数和立方数都可以从数表中直接查到。

六、混合运算的运算顺序

算式中含有加、减、乘、除、乘方等多种运算时,先做乘方,再做乘除,最后做加减。如果算式中有括号,先做小括号(即做小括号内的运算),再做中括号,最后做大括号。

七、运算定律

(1) 加法交换律: $a+b=b+a$

(2) 加法结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$

(3) 乘法交换律: $a \cdot b=b \cdot a$

(4) 乘法结合律: $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$

(5) 乘法分配律: $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$

八、近似数和有效数字

(1) 近似数: 和某数接近的数叫做这数的近似数。近似数大于某数时叫过剩近似值;近似数小于某数时,叫不足近似值。近似数和某数的差叫做这近似数的误差。误差不超过某位数的 $1/10$,这近似数叫做精确到

这一位(或这个单位)的近似数。例如 0.324 是 0.3245 精确到千分位(或精确到 0.001)的近似值。0.324 和 0.3240 是 0.32405 的两个不同精确度的近似值。

无理数运算一般可根据需要取适当精确度的近似值进行运算。

(2)有效数字:一个数从左边第一个不是零的数字起到最后一位上的所有数字叫做这数的有效数字,如 324、0.324 和 0.0324 它们的有效数字都是 3、2、4。但 0.3240 的有效数字是 3、2、4、0。平方数表和立方数表中所列出的数一般都是含有 4 个有效数字的近似数。

第二章 代 数 式

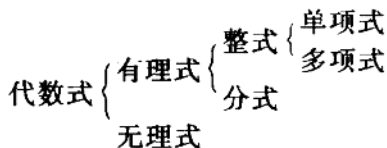
一、代数式的概念和分类

(1) 代数运算：加、减、乘、除、乘方和开方六种运算叫代数运算。

(2) 代数式：数和表示数的字母用代数运算符号连结成的式子叫做代数式。

(3) 代数式的值：用数值代替代数式中的字母计算后所得的结果叫做代数式的值。

(4) 代数式的分类：



二、整式

1. 整式的概念

(1) 单项式：只含有乘号（包括乘方号）的代数式叫做单项式。单独一个数或单独一个表示数的字母也叫做单项式。单项式中的乘号一般都省略不写，如 $-\frac{3}{4}ab^2$, x , -5 。

单项式中的数字因数叫做单项式（或字母部分）的

系数。单项式中所有字母的指数的和叫做单项式的次数，如单项式 $-\frac{3}{4}ab^2$ 和 x 的系数分别为 $-\frac{3}{4}$ 和1，次数分别为3次和1次。

(2)多项式：两个或两个以上单项式的和叫做多项式。多项式中的加号一般也都省略，如

$$6x^2 + \left(-\frac{1}{2}x \right) + (+7)$$

要写成 $6x^2 - \frac{1}{2}x + 7$

多项式中的每个单项式叫做多项式的一项，多项式次数最高项的次数叫做多项式的次数。 $6x^2 - \frac{1}{2}x + 7$ 称为关于 x 的二次三项式。多项式中不含字母的项叫做常数项。

为了便于书写和运算，根据加法交换律，多项式的各项可以按某个字母指数从大到小或从小到大进行排列。由大到小的排列叫做对这个字母的降幂排列；由小到大的排列叫做对这字母的升幂排列。如多项式 $3x^2y + 4xy^2 - 3x^3 - 5y^3$ ，按 x 的降幂进行排列为 $-3x^3 + 3x^2y + 4xy^2 - 5y^3$ ；按 x 的升幂进行排列为 $-5y^3 + 4xy^2 + 3x^2y - 3x^3$ 。

(3)整式：单项式和多项式统称为整式。

2. 整式运算

(1) 整式的加减法

①去括号法则：括号前是“+”号，把括号连同它前边的“+”号去掉，括号内各项符号不变；括号前是“-”号，把括号连同它前面的“-”号去掉，括号里的各项变号。

②添括号法则：括号前是“+”号，括号内各项不变；括号前是“-”号，括号内的各项变号。

③同类项与合并同类项：多项中所含字母相同，并且字母的指数也分别相同的项叫同类项。常数项和常数项也叫同类项。合并同类项的方法是：系数相加，字母及字母的指数不变。

④整式的加减法：就是先去掉括号，再合并同类项。

(2) 整式的乘除法

①正整指数幂的运算法则

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

②整式乘法

单项式乘以单项式：用它们系数的积做为积的系数，相同字母的指数和作为积里这字母的指数，只有一个单项式里含有的字母连同指数也做为积里的一个因式。

单项式乘以多项式：用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加。

多项式乘以多项式：用一个多项式里的每一项去乘以另一个多项式里的每一项，再把所有的积相加。

两个含有某字母的降幂(或升幂)排列的多项式相乘可以按竖式进行，如

$$\begin{array}{r}
 x^2+2x-1 \\
 \times \quad x+1 \\
 \hline
 x^3+2x^2-x \\
 \quad x^2+2x-1 \quad (+) \\
 \hline
 x^3+3x^2+x-1
 \end{array}$$

③乘法公式

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

④整式除法(限于整除情况)

单项式除以单项式：系数和同底的幂分别相除，作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同字

母的指数作为商的一个因式。

多项式除以单项式：先把多项式的各项分别除以单项式，再把所有的商相加。

多项式除以多项式：先把两个多项式都按同一字母降幂进行排列，然后仿照两个多位数相除的方法用竖式进行演算，如

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x - 1 \\
 2x + 1 \overline{) 2x^3 + 5x^2 - 1} \\
 \underline{2x^3 + x^2} \\
 4x^2 \\
 \underline{4x^2 + 2x} \\
 -2x - 1 \\
 \underline{-2x - 1} \\
 0
 \end{array}$$

即 $(2x^3 + 5x^2 - 1) \div (2x + 1) = x^2 + 2x - 1$

3. 多项式因式分解

把多项式化为若干个整式的乘积的形式叫做多项式的因式分解。因式分解有如下一些方法。

(1) 一般方法

①提公因法：例如，

$$am + bm + cm = (a + b + c) \cdot m$$

②公式法：例如，

$$\begin{aligned}
 a^6 - b^6 &= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \\
 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)
 \end{aligned}$$