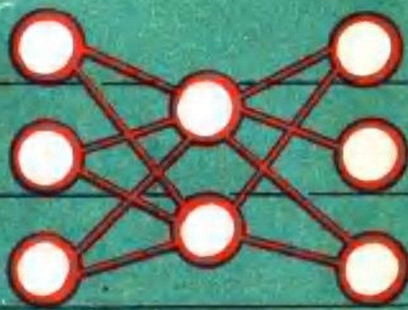
MODEL

经济管理数学模型

主编/常大勇　副主编/李念伟



北京经济学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济管理数学模型/常大勇主编. —北京:北京经济学院出版社,1996.12

ISBN 7-5638-0577-X

Ⅰ.经…　Ⅱ.常…　Ⅲ.经济数学-数学模型　Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 21774 号

经济管理数学模型

主　编　常大勇

副主编　李念伟

北京经济学院出版社出版

(北京市朝阳区红庙)

河北三河腾飞印刷厂印刷

全国新华书店发行

850×1168 毫米　32 开本　9.375 印张　242 千字

1996 年 12 月第 1 版　1996 年 12 月第 1 次印刷

印数:0001—4000

ISBN 7-5638-0577-X/O·21

定价:12.90 元

序

由于计算机的迅速发展，近二十多年来数学建模(Mathematical Modeling，即建立、求解、验证数学模型的多次迭代过程的简洁表示)及其应用得到了巨大的发展，涉及几乎一切领域。数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具。同样，在经济及经济管理领域的数学方法，特别是数学建模的方法，也已经成为不可或缺的重要工具。综观全部诺贝尔经济学奖获奖者的工作，几乎无一例外地与经济行为的数学建模方面的出色工作有关，他们本人或具有数学博士学位，或具有很好的数学基础，有两位就是数学家，他们是前苏联的 L. V. 康托洛维奇(Leonid Vitalyevich Kontorovich)和美国的 J. 纳什(John Nash)。L. V. 康托洛维奇由于在资源最佳分配理论方面的贡献，与美国的 T. C. Koopmans 分享 1975 年诺贝尔经济学奖；J. 纳什由于通过对策论(Game theory，又译作博弈论)的研究，在推动经济学的发展方面的贡献，与美国的 R. Selten 和德国的 J. C. Harsanyi 分享 1994 年诺贝尔经济学奖。数学建模的发展和广泛应用，一方面有赖于数学科学的进展，另一方面也极大地推动了数学科学的发展。

数学建模并不是新东西，只要用数学去解决实际问题就会用到数学建模，只是其发展在很大程度上有赖于“计算”手段的进展。正是由于计算机的迅速发展，使数学建模的“威力”得到了充分的展现。数学建模的教学和活动也必然进入到人才培养的领域，特别是正规教育和继续教育的领域，这确实是一件新事物，也是人才培养竞争的一个重要方面。近二十多年来，数学建模的教学正逐步地在博士后、博士和硕士、大学以及中学四个层次上进入教育领域。

特别是大学生数学建模竞赛（自 1989 年以来，我国已有 33 所院校的近千名大学生参加过美国大学生数学建模竞赛，1992 年起，我国有了自己的大学生数学建模竞赛并得到了迅速发展）和中学生数学知识应用竞赛（上海和北京都举办过，上海已经连续办了四届）活动的开展深受学生、家长、教育部门各级领导和企业界的欢迎，并进一步推动了数学建模课程的建设，从而使更多的学生受益。国内已经出版了好几本数学建模方面的教材，但适合经济、经济管理类专业学生使用的数学建模教材却很少。然而，由于发展经济和国际竞争，国家需要培养大量经济和经济管理方面的人才，愈来愈多的大学生、研究生选学了经济或经济管理专业。这方面人才的素质很大程度上取决于他们的数学基础和应用数学的能力，因而开设数学建模课程和开展相应的实践活动就变得十分重要了。当然，编著适合于经济、经济管理类专业学生使用的数学建模教材也就相当迫切了。

北京物资学院的常大勇、孟尚雄、于克祥、李念伟四位老师在多年讲授数学建模课程实践经验的基础上编写的这本教材，为经济、经济管理类专业提供比较合适的数学建模教材作出了贡献。

叶其孝

1996 年 3 月 10 日于北京理工大学

前　言

所谓数学模型，就是用数学语言和方法对实际问题的一种数学描述，其过程就是数学建模的过程。

数学模型并不是一个新概念，早在公元前三百年，欧几里德所著的《几何原本》就是一个很好的数学模型。17 世纪，牛顿、莱不尼兹发明的微积分也是一个数学模型。其后，牛顿建立了万有引力定律，更可称之为伟大的数学模型，它不仅解释了行星的运动规律，而且对航天事业的发展也产生了巨大的影响。可以说，自数学产生以来，数学建模工作就没有停止过，而且它总是和工程、经济以及其他自然科学的发展紧密结合。

我们用数学模型来解决实际问题，仅靠数学的分析、推理等手段是不够的，还需要强有力的计算工具。近半个世纪以来，电子计算机的迅速发展，使数学模型如虎添翼。数学模型已逐渐发展成为数学科学中一个相对独立的分支，而且不断向应用数学和纯粹数学提供大量的挑战性问题，从而推动了数学科学的发展。

众所周知，21 世纪经济和科学技术竞争的关键是人才的竞争，人才靠培养，而人才培养的关键是教育。仅就大学数学教育来说，大学生应得到以下三方面的训练：①掌握必要的数学理论知识和方法；②能独立地扩大并掌握更多的数学知识，即要有较强的自学能力；③用数学方法解决实际问题的能力。由于种种原因，过去大学数学教学中过分侧重于单纯理论知识的传授，在不同程度上忽视了后两种能力的培养。现在，在大学数学教学中增加数学模型的教学和实践，必将对学生后两种能力的培养起到积极的作用，同时也可适应社会对于具有一定数学建模能力的人才需求的要求。

我国从 80 年代开始，先后在一些高等院校中开设了数学模型

课，积累了教学经验，出版了少量适合于理工科院校使用的数学模型课教材。但是，到目前为止还没有适合于经济管理类院校使用的数学模型教材。为此，我们编写了《经济管理数学模型》一书，奉献给读者，以期达到抛砖引玉的作用。

本书具有以下几个特点：

第一，本书介绍了 60 多个经济管理领域的数学模型，这些数学模型涉及的数学知识，主要是目前经济管理院校开设的微积分（含微分方程和差分方程）、线性代数、概率论与数理统计、运筹学和模糊数学。考虑到某些读者不完全具备上述数学知识，因此在书中对一般读者较生疏的数学内容作了简单介绍；

第二，数学模型不同于一般数学教材，因此不一定按照书中的顺序讲授，教师可根据学生的专业、知识水平作出灵活处理，某些章节还可以作为学生的阅读教材；

第三，本书在讲述数学模型的过程中，重点分析将实际问题转化为数学模型的思想和方法，数学建模过程一般按实际问题的提出、模型假设、模型的建立、模型的求解及结果分析、模型的改进等模式叙述。

第四，本书在每章后配有适量的习题，便于读者消化和巩固各章的内容。

本书第一、二、三、四、五、六章由常大勇副教授编写，第十一、十二章由孟尚雄副教授编写，第七、八、十章由于克祥副教授编写，第九章由李念伟副教授编写。该书的出版发行，得到了北京物资学院领导及有关部门的大力支持。在书稿的编写过程中，基础部主任潘兴勃副教授付出了辛勤的劳动，在此一并致谢。

数学模型是一门新课，国内外均缺少较为定型的教材，特别是经济管理方面的数学模型，可借鉴的资料还不多，加之我们水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

编者

1996 年 2 月

目　录

第一章　数学模型概述

随着电子计算机的出现和不断完善，数学的应用已深入到经济、生态、人口、社会等更为复杂的非物理领域. 目前，许多以定性方法为基础的学科正在逐步走上定量化的道路，这就使数学在自然科学、社会科学、工程技术和经济管理中的重要性，受到越来越多的人的重视.

众所周知，利用数学方法解决实际问题，首先要建立数学模型，然后才能在该模型的基础上，对实际问题进行分析、研究和计算. 很明显，一个好的数学模型是解决实际问题的关键.

本章首先介绍数学模型的基本概念；其次用一些实例说明建立数学模型的常用分析方法；最后介绍数学建模的一般途径.

第一节　模型概述

1. 原型和模型

所谓原型是指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产、管理的实际对象，如机械系统、电力系统、生命系统、社会经济系统等. 再如，钢铁冶炼过程、火箭飞行过程、化学反应过程、生产销售过程、计划决策过程等. 而模型是对原型中某个属性的模拟，它具有使研究者感兴趣的性质，是原型的替代物，但又不是原型的原封不动的复制品.

例如建筑模型，人们对该建筑物的外形设计，色彩选择以及环境布局感兴趣，而对其内部的结构和装修则较少注意. 对于一个飞机模型，如果是为了参加航模飞行比赛，则它应具有良好的飞行性

能，而外观不是考虑的重点.

2. 模型的分类

按模型替代原型的方式分类，模型可以分为形象模型和抽象模型.

(1)形象模型. 它包括直观模型和物理模型等.

①直观模型. 把原型的尺寸按比例缩小或放大，主要追求外观上的逼真，如展览会中的实物模型、玩具、照片等.

②物理模型. 这是科技工作者为某种目的，根据相似原理构造的模型. 它不仅显示原型的某些外部特征，还可以进行模拟试验，以便间接地研究原型的某些规律. 例如水利实验室的水流试验、大坝的稳定性试验等.

(2)抽象模型. 它包括思维模型、符号模型和数学模型.

①思维模型. 这是指通过人脑对原型的反复认识，将获取的知识以经验形式直接储存于人脑中，从而可以根据思维或直觉作出相应的决策. 如汽车司机对方向盘的操作；某些领导凭经验作出的决策等.

②符号模型. 在一些约束和假定下，借助于专门的符号、线条等，按一定的形式组合起来，描述原型. 例如地图、电路图、化学结构图等. 它的特点是简明、方便、目的性强，是一种非量化的方法.

③数学模型. 要了解什么是数学模型，首先看一个简单的应用题.

例 1-1　一个星期天，某人驾汽车在正午时分离开 A 处，下午 3 点 20 分到达 B 处. 若车以 60 公里/小时的速度等速行驶. 从 A 到 B 有多远？

解　首先作出假设. 设 A 到 B 的距离为 s；行驶时间为 t；速度为 v.

根据物理学知识，可得匀速运动的路程公式

$$s=v\cdot t.$$

其中：$v=60$ 公里/小时；$t=3\frac{1}{3}$小时.

于是

$$s=60\text{ 公里/小时}\times 3\frac{1}{3}\text{小时}$$

$$=\frac{600}{3}\text{公里}=200\text{ 公里}.$$

这个问题的解决似乎十分容易，但有不符合实际的地方：汽车从 A 地出发时，不可能就以 60 公里/小时的速度行驶. 因此，题目可以改为下面的形式.

例 1-2 一个星期天，某人驾汽车在正午时分离开 A 处，下午 3 点 20 分到达 B 处. 他从静止开始均匀加速，当他到达 B 处时，速度为 60 公里/小时. 从 A 到 B 有多远？

解　字母如前所设. 汽车速度均匀增加，意味着车速是时间的线性函数，而速度又是距离关于时间的导数. 于是

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=at+b,$$

积分后得

$$s=\frac{1}{2}at^2+bt+c. \tag{1-1}$$

如何确定 a,b,c 呢？从题中可以得到如下信息：

(1)$s(0)=0$；

(2)$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$；

(3)$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=3\frac{1}{3}}=60$.

由此可以算出 $c=0,b=0,a=18$. 代入公式(1-1)可得 $s=100$ 公里.

这个问题的数学模型的建立和求解过程如下：

第一，根据建立数学模型的目的和问题的背景，作出必要的假设(有时需要简化假设)；

第二，用字母表示待求的未知量；

第三，利用物理学或其他理论，列出数学式子；

第四，求出解答；

第五，用这个解答解释原问题；

第六，用实际现象验证上述结果，如果不符合实际，再对模型进行修改.

一般地说，数学模型可以描述为：对于现实世界的一个待定对象，为了一个特定目的，根据特有的内在规律，作出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具，得到一个数学结构.为了叙述方便，有时称数学模型为模型.

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学.数学的特点不仅在于它的抽象性、逻辑的严密性和结论的准确性，而且还在于它应用的广泛性.进入20世纪以来，数学不但在物理领域继续获得了一些重要进展，而且进入了经济、管理、交通、人口、生态、医学、社会科学等非物理领域，并且取得了许多成果.

马克思曾经说过，一门科学只有成功地运用数学时，才算达到了完善的地步.我们可以这样认为，数学在这门科学中应用的水平，标志着这门科学的发展水平.一般来说，当实际问题涉及分析、预报、决策和控制等方面的问题时，往往都离不开数学，而建立数学模型则是这一过程的关键环节.

3. 数学建模过程

建立一个有实用价值的数学模型是一种创造性的劳动，从一定意义上讲，建模是一种艺术.由于现实世界的复杂性，因此建立一个比较符合实际的数学模型，需要经过长期实践和反复修改才能达到.下面对数学建模过程给出一般性描述.

(1)对模型的一般要求.

①要有足够的精确度.这就要求在模型中把事物的本质属性反映出来，把非本质的东西去掉，但同时不能影响反映事物的真实程度.

②模型要尽量简单.建立复杂的数学模型要花费很大的代价，

而且复杂的数学模型难于进行数学处理，也不便于求解. 根据实际需要，如果能用简单的数学模型获得满意解，就不必去建立复杂的数学模型.

③建立数学模型的根据要充分. 在建立数学模型时，要根据科学规律和经济规律建立有关的公式和图表.

(2)建立数学模型的一般步骤.

①了解实际问题的背景，明确建模目的并掌握必要的数据资料. 为此，必须进行深入的调查研究，在此基础上将实际问题“翻译”成数学问题，用数学语言明确地表述出来.

②去粗取精，去伪存真，找出主要矛盾. 建模时要对实际问题进行必要的简化，作出几个适当的假设，根据主要矛盾确定主要变量.

③找出各种内部联系，确定系统的约束条件，利用适当的数学工具刻划变量间的关系，从而形成数学模型.

④对模型的分析和检验. 建立数学模型是为了解决实际问题，为使模型更符合实际需要，必须选择适当的数学方法，对数学模型求解，并将结论同实际情况比较，反复修改模型的有关内容，使其更切合实际，从而更具有实用性.

⑤解释. 用数学语言表述的解答再“翻译”成普通语言，也就是结合实际问题作出解答，以适应实际工作者的需要.

数学建模的逻辑框图如图 1-1 所示.

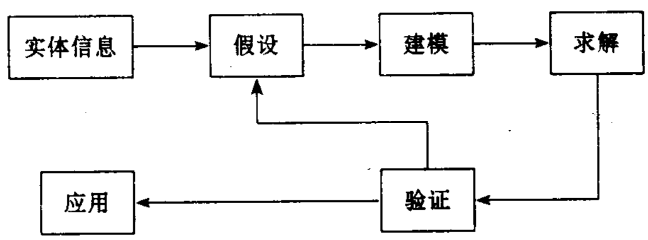


图 1-1

第二节　椅子问题——数学建模示例

我们举这个例子是想说明，如何用数学语言来描述一个实际问题，作出合理的简化假设，求解模型，并用计算结果解释实际问题.

1. 实际问题的提出

在日常生活中存在这样的事实，把椅子往不平的地面上一放，通常只有三只脚着地，放不稳. 但只要稍稍挪动几次，就可以四脚着地放稳了. 下面用数学语言描述该问题，并用数学方法证实这一结论.

2. 模型假设

对椅子和地面作出假设：

(1)椅子的四条腿一样长，椅脚与地面接触处看作是一个点，四脚连线呈正方形；

(2)地面高度是连续变化的，沿任何方向不会出现间断(如没有台阶那种情况)，即地面是数学上的连续曲面；

(3)地面相对平坦，不会出现连续变化的深沟或凸峰，能使椅子在任何位置上至少有三只脚同时着地.

这里的假设(1)是显然的；假设(2)给出了椅子可以放稳的条件；假设(3)排除了三只脚无法同时着地的情况.

3. 模型的建立

模型建立的关键是如何用数学语言，把椅子四只脚同时着地的条件和结论表示出来.

首先，用变量表示椅子的位置. 注意到椅脚的连线呈正方形 $ABCD$，以 o 为中心，将其旋转 θ 角，得到正方形 $A'B'C'D'$，表示椅子位置的改变(见图 1-2).

其次，用变量表示椅脚(椅腿的端点)与地面的竖直距离，则当该距离为零时椅脚就着地了. 显然，椅子旋转时就是在调整这一距

离，因此该距离是θ的函数.

由于正方形的椅子腿是中心对称的，所以只考虑两组对称的椅脚与地面的竖直距离就可以了.

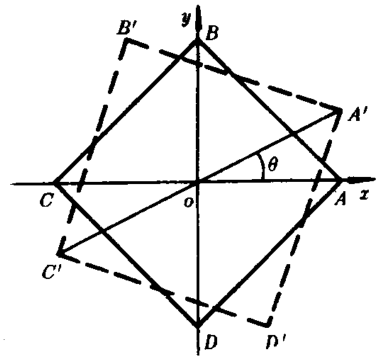


图 1-2

设A,C两脚与地面距离之和为$f(\theta)$；B,D两脚与地面距离之和为$g(\theta)$. 显然

$$f(\theta),\ g(\theta)\geqslant 0. \qquad (1\text{-}2)$$

由假设(2)可知，$f(\theta)$，$g(\theta)$均为连续函数. 由假设(3)，$f(\theta)$与$g(\theta)$中至少有一个为零，这意味着对于任意的θ，椅子在任何位置至少有三只脚着地. 当$\theta=0$时，设

$$g(0)=0,\ f(0)>0. \qquad (1\text{-}3)$$

这样，改变椅子的位置使其四脚着地，就归结为证明下面的命题：

已知$f(\theta)$，$g(\theta)$为θ的连续函数，对任意的θ，$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，且$g(0)=0$，$f(0)>0$，证明存在$\theta_0$，使得$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

3. 模型求解

本题是一个证明题.

假设将椅子旋转$\frac{\pi}{2}$，对角线AC与BD交换. 由$g(0)=0$和$f(0)>0$可知，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

令$h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则有$h(0)>0$和$h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$. 因为$f(\theta)$，$g(\theta)$都是连续函数，所以$h(\theta)$也是连续函数. 由连续函数的性质可知，必存在$0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$，使得$h(\theta_0)=0$，于是

$$f(\theta_0)=g(\theta_0).$$

因为总有$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，于是$f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$.

综上所述，得到